韓國數學教育學會誌 < 數學教育 >
1990. 6. 제 29 권 제 1 호 35 - 37

Journal of the Korea Society of Mathematical Education
June 1990: Vol. 29, No. 1, 35 - 37

수학적 참에 대하여

전 재석 (아주대학교)

I. 서론

먼저 수학적 진리의 절대성을 주장하는 다음과 같은 논증을 살펴보자 [1].

"2 + 2 = 4 라는 명제는 인간에 대한 상대적 진리이다."

이 명제를 참이라 하고, A 라 표시하자. 만약 A 가 인간 정신의 구조에 기인하는 상대적 진리라고 하면 어떤 다른 동물에 있어서는 A 가 진리가 아닐 수도 있다. 따라서 A 가 부정되고 2 + 2 = 4 는 절대적 진리가 된다. 따라서 절대적 진리라는 의미에 따라 인간에게도 절대적 진리가 된다. 이것은 모순이며 따라서 A 는 상대적 진리일 수 없다.

다음 A 가 절대적 진리라고 하자. 그러면 A 는 절대적 진리라는 것을 이미 알고 있지 않으면 안된다. 따라서 절대적 입장에서 2 + 2 = 4 의 진리를 비판하고 있는 것인 데 이것은 A 의 내용상 가능하지 않다. 즉 절대적 입장에서 비판할 수 없는 것이므로 A 는 절대적 진리라고 할 수 없다. 결국 A 를 참이라고 했을 때 A 를 상대적 진리라 해도, 절대적 진리라 해도 모순이 생기므로 A 는 참이라고 할 수 없다. 따라서 A 는 부정되고 2 + 2 = 4 는 절대적 진리이다.

그러나 위 논점을 받아 들인다고 해도 이 논증에서 우리가 알 수 있는 것은 2 + 2 = 4 가 왜 인간에게 진리인가가 아니라 다만 인간에 대한 모든 상대적 진리인 것은 절대적 진리일 수 밖에 없다는 이상한 결론 뿐이다.

그러면 위와 같은 유사한 논증들처럼 과연 수학적 지식은 선험적이고 절대적이며 확실한 것인가? 여기에 대해서 Putnam 은 수학적 지식을 선험적이지도 확실한 것도 아니라고 주장한다. 우리는 이 논문에서 수학적 증명 못지 않게 의사 경험적 (Pseudo-empirical) 인 방법의 중요성을 강조하는 Putnam 의 주장을 중심으로 수학적 진리의 본질을 살펴 보고자 한다.

II. 본론

수학적 진리의 필연적 확실성을 주장하는 Ayer [2] 에 의하면 기하학을 포함한 모든 수학적 명제는 분석적 (Analytic) 이며, 따라서 분석적이란 말의 의미에 의해서 모든 분석적 명제는 그 명제의 전제에 결론을 포함하고 있지 않으면 안되는 것이다. 그러므로 분석 명제는 동어 반복 (Tautology) 에 지나지 않는 것이며 동어 반복인 이상 경험적 내용을 전혀 포함하고 있지 않은, 경험과 무관한 지식이라는 것이다. 말하자면 2 + 2 = 4 라는 명제의 필연적 확실성은 2 + 2 라는 기호 표현은 4 라는 기호와 동의어이기 때문이라는 것이다.

그러나 모든 수학적 명제가 분석적이라는 주장을 받아 들인다 해도 분석적 판단과 종합적 판단의 구별이 그렇게 확고 하지 못하다는 점을 Quine [3] 은 지적했다.

Quine 의 주장을 요약해 보자.

분석판단에는 두 가지 종류가 있는 데, 그 하나는 논리적으로 참인 명제이고 다른 하나는 동의어에 의존하여 그 분석성이 정의되는 명제이다.

전자의 예로는 다음과 같은 명제를 들 수 있다.

(i) No unmarried man is married

이 명제의 특성은 이 명제 자체로서도 참일 뿐만 아니라 <man> 과 <unmarried> 을 어떻게 해석하더라도 항상 참이라는 점이다.

일반적으로 논리적으로 참인 분석 명제는 이렇게 정의 될 수 있다.

분석 판단의 두 번째 유형인 동의어에 의존하는 분석 명제의 예로 다음 문장을 들 수 있다.

(ii) No bachelor is married

이 둘째 분석 명제의 특성은 동의어를 대치 함으로써 첫째 유형에 속하는 분석 명제로 만들 수 있다는 점이다. <bachelor> 대신에 <unmarried man> 을 대치함으로서 (ii) 을 (i) 로 바꿀 수 있는 것이다. Quine 은 둘째 유형에 속하는 분석 명제에 주목함으로서 분석성을 정의하는 일이 쉽지 않음을 보여준다. Quine 의 논증에 의하면 분석성이라는 개념을 정의하기 위하여 동의어라는 개념이 필요하고 동의어라는 개념을 정의하는 데는 분석성이란 개념이 동원되야 하는 순환성을 지적한다. 그러므로 동의어에 의존하는 분석 명제는 엄격한 논리적 규정이 결여된 것이므로 첫째 유형에 속하는 분석 판단만이 엄밀한 논리적 기준을 가진것이라 할 수 있다. 그러나 첫째 유형은 명제의 논리적 형식에 의존하는 명제로서 말의 의미와는 무관한 것이다. 그러나 전통적으로 분석 판단, 종합 판단은 말의 의미 즉, 개념의 성질에 의해서 구별하려 했으므로 분석 판단과 종합 판단의 구별은 명확하지 못하다는 것이다. 결국 분석적이란 말이 매우 모호하므로 수학적 명제가 분석적이란 이유로 수학적 진리의 절대성을 주장하는 것은 별로 설득력이 없다고 봐야한다.

Putnam [4] 은 Gödel 의 불완전성 정리를 원용해서 분석적이 아닌, 즉, 종합적인 수학적 진리가 존재할 가능성을 제시한다.

Gödel 의 불완전성 정리에 의하면 참이지만 증명 불가능한 수학적 명제가 존재한다는 것이다.

Putnam 의 주장에 따르면 우리가 수학에서 사용하는 모든 공리가 분석적이라 인정하고 또한 연역의 과정을 통해서 분석성이 보존된다고 하더라도 (사실은 아무도 분석성이 보존됨을 보인적이 없지만) 수학의 모든 명제가 분석적일 수 없다는 것이다. 증명이란 공리로 부터의 연역을 의미하는 것이므로 증명 불가능의 명제가 존재하는 이상 모든 수학적 명제가 분석적이지 못하며 오히려 수학에도 종합적 진리가 존재해야 한다는 것이다.

따라서 Putnam 은 수학에도 물리학과 유사한 방법을 사용할 것을 강력히 주장한다. 즉 의사-경험적 (Psuedo-empirical) 인 방법을 실재로 사용한 예로서 실수와 직선상의 점들간의 일대일 대응이라든지 선택공리의 채택이라든지 오일러의 정리 $\sum 1/n^2 = \pi^2/6$ 와 같은 것들을 제시했다.

특히 아직까지 증명된 바 없는 쌍둥이 소수가 무한히 존재한다는 주장에 의사 경험적인 방법을 적절히 적용한 예를 살펴보자.

n 이 소수이고 $n+2$ 가 소수가 되는 사건을 통계학적 의미로 독립적인 사건이라고 볼 수 있다 (경험적인 자료와 일치한다).

그러나 n보다 작은 소수들의 빈도는 대략 $1/\log n$ 이다. 따라서 n 보다 작은 쌍둥이 소수들의 빈도는 대략 $1/(\log n)^2$ 이어야 한다. 따라서 n 보다 작은 쌍둥이 소수의 갯수는 $n/(\log n)^2$ 인데 n 을 무한히 크게 하면 $n/(\log n)^2$ 도 무한히 커지므로 결국 쌍둥이 소수의 갯수는 무한하다.

III. 결론

수학자 Wilder [5] 는 수학적 증명이란 것이 절대적인 진리를 보증하는 것이 아니라는 점을 강조하면서 수학적 증명이란 아래와 같은 것에 불과하다고 말했다.

"우리의 직관의 소산물을 검사하는 것 ... 분명히 우리는, 시대와는 관계없는 어떠한 증명의 기준도, 증명되어야 할 것도 증명을 하는 사람이나 학파도 가지고 있지 않으며, 아마도 결코 가지지 못할 것이다. 이러한 상황에서 할 수 있는 현명한 일은, 대중들이야 어떻게 생각하든지 간에 수학에 있어서는 일반적으로 절대적인 진리 [증명] 같은 것은 없다는 것을 인정하는 일이라고 생각된다."

따라서 수학적 증명 역시 절대적인 확실성을 보증하는 것이 아니므로 물리과학과 같은 가설 연역적 방법 내지 의사 경험적 방법을 수학에 도입

ㅏ고 활용해야 할 것으로 생각된다. 결국 수학 역 ㅣ 물리 과학과 같이 과감한 추측과 신랄한 반박 늘 통해서 성장한다고 생각된다.

참고문헌

1. 이라이시 사데오, "수와 연속의 철학(일본어)" 공립전서, 東京, 共立出版, 1950
2. Ayer, A. J, "Language, Truth and Logic" New York, Dover, 1946
3. Quine, W. V., *Two dogmas of empiricism*, Philosophical Review **60**.
4. Tymoczko, T., "New Directions in the Philosophy of mathematics" Basel, Birkhäuser Verlag, 1985
5. Wilder, R. L., *The nature of mathematical proof*, Amer. Math. Monthly, 51 (1944), 309-323