

數學 問題 類型의 分類와 그 實際

김 진락 (문교부 편수관)

I. 序論

수학(산수)에서 문제를 어떻게 해석하고 분류할 것인가는 수학 교육 전반에 걸쳐서 중대한 의의를 갖는다. 문제의 제시는 그 방법에 따라 수학 학습 활동의 방향을 결정하며 문제 해결의 실마리가 되고, 수업의 전략과 평가에 지대한 영향을 미치게 된다.

수학(산수)교육의 세계적인 추세와 우리 나라 제5차 교육과정의 시행 과정에서 수학의 문제 유형을 분류해 보고 지도의 실제를 연구해 보는 활동은 산수 보조 교과서(산수 익힘책)의 개발로 대단히 활발해지고 있다. 산수 익힘책에서는 교과서의 "여러 가지 문제"의 유형을 확대하여 산수와 기초 학력의 정착과 문제 해결력의 신장을 위한 창의적인 문제가 현저히 나타나고 있다.

버즈(Butts, NCTM 1980)는 수학 문제의 유형을 기억 확인 문제, 계산 연습 문제, 응용 문제, 열린 문제, 문제 장면으로 분류하고 있으며 찰스와 레스터(R. I. Charles & F. K. Lester, Teaching Problem Solving - What, Why and How, 1982)는 드릴 문제, 단순 적용 문제, 복합 적용 문제, 과정 문제, 응용 문제, 퍼즐 문제로 분류하고 있으며 칸토우스키(M. G. Kantowski, 1981)는 언어적 문제, 비정형 문제, 실생활 또는 응용 문제로 분류하고 있다. 그리노(J. G. Greeno, 1978)는 문제 해결의 심리적 과정이란 전제하에 문제 유형을 구조 유도 문제, 변형 문제, 배열 문제로 나누기도 했으며 스크리븐(M. Scriven, 1980)은 제 1형의 문제(엄격한 법칙이나 개념 체계를 바탕으로 하는 문제), 제 2형의

문제(새로운 개념 체계에 관한 문제), 제 3형의 문제(생활 장면에서 통상적으로 접하는 문제)로도 분류하고 있다.

이와같이 문제 유형에 대한 분석은 학자에 따라, 관점에 따라 여러가지 유형으로 나눌 수가 있다. 그러나, 그 분류 유형이 좀 더 가치있고 효용성이 있기 위해서는 그 분류방법이 용이하여야 하고, 수학 교육의 목표 달성, 문제 해결 학습의 신장, 평가 방법의 개선, 교과서의 체질 개선에 도움을 줄 수 있어야 된다.

이 글에서 필자가 문제를 분류한 착안점은 이러한 수학 교육 전반에 걸쳐 도움을 줄 수 있는 것에 역점을 두었으며, 부수적인 효과로 수학(산수)참고서에 큰 변화가 있기를 기대하였다.

II. 問題 類型의 分類

이 글에서는 수학(산수)문제의 유형을 크게 여섯 가지로 나누고 다시 구체적인 몇 개의 유형으로 세분하였다.

초: 중학교 학생을 주 대상으로 보았으며 문제 유형에 대한 구체적인 예는 국민학교 고학년 학생을 중심으로 제시하였다.

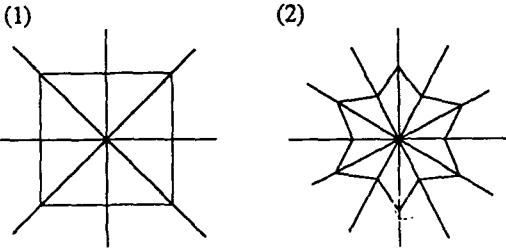
문제 유형의 분류와 그 예는 다음과 같다.

A. 기억 확인 및 계산 문제 (Drill exercise)

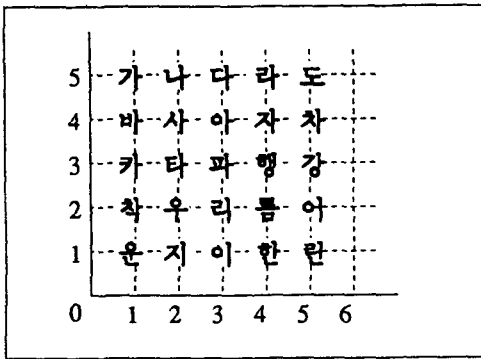
용어, 정의, 법칙, 공식에 대한 이해와 계산 연습에 대한 문제이다.

<A-1> 용어, 정의의 인지 상태

1. 다음 도형은 선대칭 도형이다.
대칭축을 있는대로 그리시오.



2.



1) 좌표 평면에서 다음 점의 좌표를 써라.
가 (1, 5) 나 (2, 5)

2) 다음의 순서쌍을 좌표로 하는 점을 찾아 암호를 풀어라.

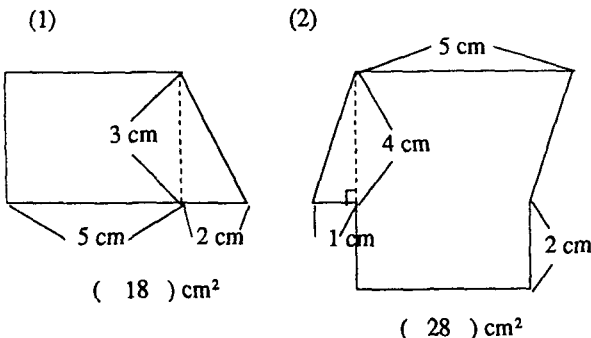
i) (1, 2), (4, 1), (5, 2), (5, 1), (3, 1)
⇒ [착한 어린이]

ii) (3, 4), (4, 2), (3, 5), (1, 1), (2, 2), (3, 2),
(2, 5), (4, 5)

⇒ [아름다운 우리 나라]

<A-2> 법칙, 공식의 인지 상태

1. 다음 도형의 넓이를 구하여라.

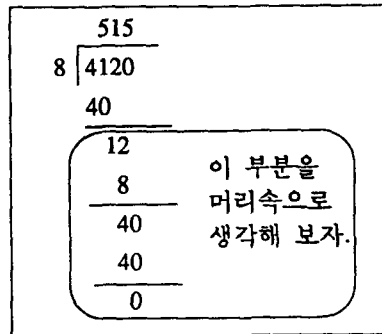


(18) cm²

(28) cm²

2. 세로 형식의 나눗셈에서 제수가 한 자리 수

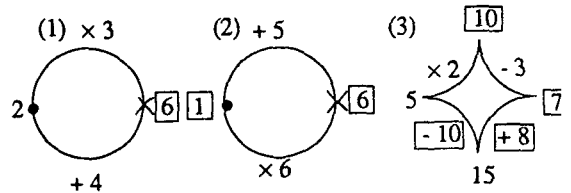
일 때 계산 절차를 머리 속으로 생각하여 답만 써 보아라.



(1) $4 \overline{) 232}$ (2) $8 \overline{) 7448}$ (3) $3 \overline{) 3363}$

<A-3> 계산 연습

1. □ 안에 알맞은 수를 쓰시오.



2. 보기를 보고 숫자 사이에 알맞게 +, - 를 넣어 등식이 되도록 만들어라.

<보기>

$1234567 = 497 \Rightarrow 123 + 456 + 7 = 497$

1) $6352477 = 534$

→ $635 - 24 - 77 = 534$
 $635 - (24 + 77)$

2) $3591053 = 257$

→ $359 - 105 + 3 = 257$

3) $12345678 = 1907$

→ $1234 - 5 + 678 = 1907$

B. 수학적 표현 문제 (Simple expression problem)

말을 수학적 표현인 식으로 간결히 나타낼 수 있는 문제를 말한다.

<B-1> 가감승제와 관련된 수학적 표현

1. 다음 말을 등식으로 나타내어라.

1) 28을 7로 나눈 몫을 2로 나누면 2이다.

$(28 \div 7) \div 2 = 2$

2) 7과 6의 합에 3을 더한 후 2를 곱한 수는 32이다.

$$\{(7+6)+3\} \times 2 = 32$$

<B-2> 부등식, 방정식과 관련된 수학적 표현

1. 다음 말을 식으로 나타내어라.

1) 42와 3의 차는 60을 6으로 나눈 몫보다 크다.

$$\text{다. } 42 - 3 > 60 \div 6$$

2) 어떤 수와 7의 차는 8과 3의 곱과 같다.

$$x - 7 = 8 \times 3$$

<B-3> 일상 생활에 관한 문장제를 읽고 알맞은 식 세우기.

1. 파란 구슬 5개, 노란 구슬 7개, 하얀 구슬 9개와 빨간 구슬, 녹색 구슬이 있다.

1) 파란 구슬의 개수와 노란 구슬의 개수, 하얀 구슬의 개수의 합을 3으로 나누면, 녹색 구슬의 개수와 같다고 한다. 녹색 구슬은 몇 개인가?

$$\text{(식)} (5+7+9) \div 3$$

$$21 \div 3 = 7 \quad \text{(답)} 7 \text{ 개}$$

2) 빨간 구슬은, 파란 구슬의 개수의 2배와 노란 구슬의 개수의 합과 그 개수가 같다고 한다.

빨간 구슬은 몇 개인가?

$$\text{(식)} (5 \times 2) + 7$$

$$10 + 7 = 17 \quad \text{(답)} 17 \text{ 개}$$

2. 혜영이는 학용품을 사러갔다.

처음 가게에서 150원짜리 공책 3권을 사고, 두 번째 가게에서 색도화지 250원어치를 샀더니 50원 남았다.

혜영이가 처음 얼마를 가지고 있었는가?

$$\text{(식)} x - \underbrace{(150 \times 3)}_{\text{공책}} - \underbrace{250}_{\text{색도화지}} = 50_{\text{남은돈}}$$

$$x = 750 \quad \text{(답)} 750 \text{ 원}$$

C. 수학적 해석 문제 (Simple interpretation problem)

식을 보고 말로 나타내거나 문장제를 만들어 보는 문제이다.

<C-1> 가감승제와 관련된 수학적 해석

1. 다음 식을 말로 나타내어라.

$$1) 5 \times (7+3) = 50$$

5에 7과 3의 합을 곱하면 50과 같다.

5를 7과 3의 합으로 곱하면 50이다.

$$2) \{(2 \times 3) \times 6\} - 5 = 31$$

2의 3배에 6을 곱한 수에서 5를 빼면 31이 된다.

2와 3의 곱에 6을 곱한 후 5를 뺀 수는 31이다.

<C-2> 부등식, 방정식에 관련된 수학적 해석

1. 다음 식을 말로 나타내어라.

$$1) (18 \times 2) - (16 + x) = 28$$

→ 18의 2배에서 16을 어떤 수로 나눈 몫을 뺀 차는 28이다.

→ 18의 2배와 16을 어떤 수로 나눈 수와의 차는 28이다.

$$2) (20 + 4 + x) + 5 > 30$$

→ 20을 4로 나누고 어떤 수를 더한 후 여기에 또 5를 더한 수는 30보다 작다.

→ 20을 4로 나눈 몫보다 x만큼 더 큰 수에 5를 더하면 30보다 크다.

<C-3> 식을 보고 문장제 만들어 보기 (Making up problems)

1. 다음 식을 보고 이와같은 식이 나오는 문제를 만들어 보아라.

$$1) 70 \times 0.9 = x$$

→ 70의 9할은 얼마인가?

→ 정운이네 반 학생은 모두 70명이다. 그 중에서 90%가 이번 봄소풍에 갔다. 봄소풍에 간 학생은 몇 명인가?

2) 다음과 같은 식이 있다.

$$60 \times 0.55 = x$$

식을 보고 x가 다음과 같은 수라고 생각하고 문제를 만들어라.

한 학급의 여학생의 수

빨간 낙엽의 수

우리나라 우표의 수

→ 소영이네 반 학생은 60명이다.

여학생의 수가 55%라면 소영이네 반 여학생은 몇 명인가?

→ 혜영이는 예쁜 낙엽을 60장 주웠다. 이 중에서 5할 5푼이 빨간 낙엽이다. 빨간 낙엽은 몇 개인가?

→ 은철이는 세계 각국의 우표를 모으고 있다. 지금까지 60장을 모았는데 그 중에 55/100가 우리나라 우표이다. 우리나라 우표는 몇 장인

가?

D. 단계성 문제 (process problem)

순서적인 사고 과정이 증시된 문제로서 단계적인 사고를 하는 데 도움이 되는 문제이다.

<D-1> 장면의 단계별 독해 문제 (Reading & Story problems)

1. 순희, 철수, 상진이는 모두 우표를 가지고 있다. 순희는 28 장, 상진이는 57 장을 가지고 있다.

(1) 세 사람이 가지고 있는 우표는 모두 몇 장인지 알아보아라.

- 1) 이 문제를 풀 수 있는가?
- 2) 그 이유를 말하여라.

(2) 순희와 상진이 중 누가 몇 장 더 많이 가졌는지 알아보아라.

- 1) 이 문제를 풀 수 있는가?
- 2) 풀 수 있다면 식을 세워 풀어 보아라.

식 _____
_____가 _____보다 _____장 더 가졌다.

(3) 철수가 15 장 가졌다면 세 사람이 가진 우표는 모두 몇 장인가?

식 _____
모두 _____장이다.

<D-2> 그림 그려 푸는 문제 (Drawing pictures to solve problem)

1. 영철이는 물건을 사러 갔다. 처음 가게에서 가진 돈의 1/4을 사용하였고, 둘째 번 가게에서 남은 돈의 1/2을 사용하였고, 셋째 번 가게에서도 남은 돈의 1/2을 사용하였다. 아직도 주머니에 200 원이 남아 있다. 처음 가졌던 돈은 얼마가 되었는가?

2. 순희, 경숙, 정아, 현순, 나미는 탁구 시합을 하기로 하였다. 모두가 한 번씩 서로 시합을 한다면 몇 번 경기를 하여야 하는가?

<D-3> 두 단계 이상의 식을 포함하는 문제 (Problems with more than one step)

1. 기운이는 매일 새벽 아버지와 함께 약수터에 다녀온다. 집에서 약수터까지의 거리는 2 km 이다. 2년 동안 하루도 빠짐 없이 다녔다고 하면,

그 동안 약수터에 다니느라고 걸은 거리는 몇 km 인지 알아보아라.

(1) 약수터에 한 번 다녀오는 거리는 몇 km 인가?

식 _____ 답 _____ km

(2) 2년은 며칠인가? (1년은 365 일이다.)

식 _____ 답 _____ 일

(3) 2년 동안 약수터에 다니느라고 걸은 거리는 모두 몇 km 인가?

식 _____ 답 _____ km

E. 응용 문제 (Applied problem)

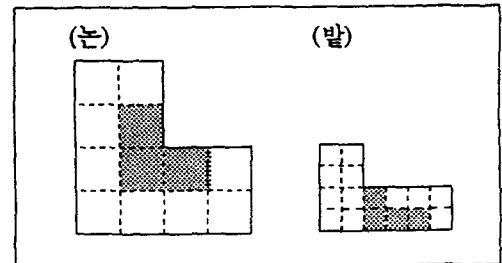
수학적 지식과 사고력을 활용한 문제이다.

<E-1> 이야기 문제 (Story problem)

1. 옛날 한 농부가 다음과 같은 유언을 남기고 숨을 거두었습니다.

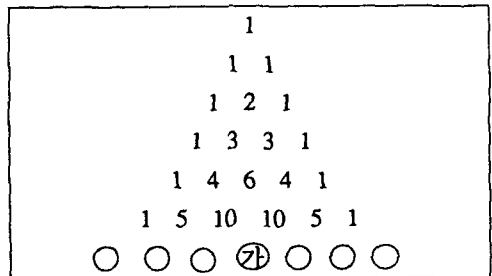
"내가 죽은 후 너희 4 형제는 논과 밭을 지금 있는 모양과 같은 형태로 나누되 똑같은 크기로 나누어 가져라."

논과 밭의 모양은 다음과 같다. 어떻게 나누면 되겠는가?



<E-2> 패턴, 규칙 찾기 문제

1. 다음과 같이 수가 정삼각형 모양으로 배열되어 있다. 이와같은 수의 성질을 이용하여 위에서부터 7 번째 줄의 (가)에 알맞은 수는 무엇인가?



2. 아래는 10 월의 달력이다.

이 달력을 보고 () 안에 알맞은 수를 넣어라.

- (1) 1, 8, (), 15, ()
- (2) 2, 20, (), 26
- (3) 1, 2, 9, 10, (), (), 25, 26
- (4) 6, 12, (), 24, 30

$$\begin{array}{lll}
 9 + 2 = 11 & 6 + 5 = 11 & 10 + 1 = 11 \\
 7 + 5 = 12 & 10 + 2 = 12 & 7 + 5 = 12 \\
 10 + 3 = 13 & 9 + 4 = 13 & 9 + 4 = 13
 \end{array}$$

(4), (5), (6), (7) 은 생략

일	월	화	수	목	금	토
	1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27
28	29	30				

(5) 위 달력을 보고 (보기)와 같이 규칙을 알아 보아라.

(보기)

↓ →

규칙 : (+ 8)

(1)

→ →

↓

규칙 : ()

(2)

↓ → →

↓

규칙 : ()

(3)

↓

↓ → →

↓

←

규칙 : ()

<E - 3> 오픈 문제 (Open - search problem)

1. 큰 공책은 1 권에 300 원, 작은 공책은 1 권에 200 원 한다고 한다. 혜영이는 두 종류의 공책을 모두 샀다.

두 공책을 산 값으로 3300 원을 주었다. 작은 공책은 몇 권을 샀는가? (해결방법: 5 가지)

2. 순이와 인호는 1부터 10까지의 숫자 카드를 각각 5 장씩 나누어 가지고 1 장씩 내어 합하여 보았더니, 9, 10, 11, 12, 13 이 되었다.

어떤 방법으로 짝 지으면 이렇게 될 수 있을까?

<해결 방법>

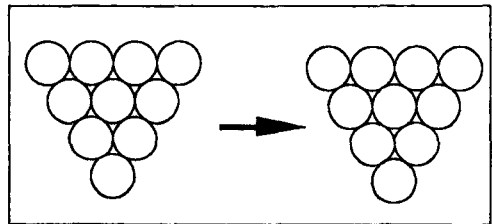
- (1) $8 + 1 = 9$ (2) $8 + 1 = 9$ (3) $6 + 3 = 9$
- $6 + 4 = 10$ $7 + 3 = 10$ $8 + 2 = 10$

F. 오락 문제 (Amusement problem)

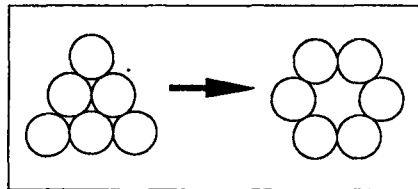
레크레이션적인 요소가 있는 것으로 수학적인 소양으로 풀 수 있는 문제를 말한다.

<F - 1> 게임 문제 (Game problem)

- 1. 동전을 가지고 재미있는 놀이를 하여보자.
- (1) 동전 10 개로 아래 왼쪽과 같은 모양을 만든 후, 3 개의 동전만 움직여서 오른쪽과 같은 모양을 만들어라.



- (2) 동전 6 개로 아래 왼쪽과 같은 모양을 만든 후, 2 개의 동전만 움직여서 오른쪽과 같은 모양을 만들어라.



2. 1 부터 10까지의 숫자 카드를 오른쪽 그림과 같이 각 변의 합이 19 가 되도록 여러가지 방법으로 배열하여라.

5	8	6
10		4
1		2
3	9	7

<F - 2> 퍼즐 문제 (Puzzle problem)

1. 다음 주어진 자연수를 한 번씩만 사용하여 등식이 성립하도록 하여라.

- (1) 1 부터 4 까지
 $\square \times \square = \square \square$
- (2) 1 부터 5 까지

$$\square\square \times \square = \square\square$$

(3) 1부터 6까지

$$\square\square \times \square = \square\square\square$$

(4) 1부터 8까지

$$\square\square\square \times \square = \square\square\square\square$$

<해결 방법>

(1) $3 \times 4 = 12$ (2) $13 \times 4 = 52$

(3) $54 \times 3 = 162$ (4) $582 \times 3 = 1746$

2. 다음 빈 칸에 알맞은 수를 넣어 가로로 더하나, 세로로 더하나 합이 같도록 만들어라.

4	14	15	
7			
	10	8	
16	2	3	13

4	14	15	1
7	9	6	12
7	9	10	8
16	2	3	13

III. 要約 및 結論

지금까지 수학(산수)문제의 유형을 기억 확인 및 계산 문제, 수학적 표현 문제, 수학적 해석 문제, 단계성 문제, 응용 문제, 오락 문제로 크게 6가지로 나누고 다시 세부적인 분류로 그 예를 알아 보았다.

산수(수학)에서 여러 가지 문제를 해결하는 기본적인 목적은 수학의 지식을 실생활에 밀접히 접근시키고, 수학적인 활동을 크게하여 좀 더 수학을 재미있게 논리적으로 생각할 수 있는 습관을 빨리 터득시키는 데 있는 것이다.

산수(수학) 교과서는 산수(수학) 교육의 목적을 달성하는 데 중요한 역할을 담당하고 있으나 교과서를 가지고 수업을 할 때 수학 교육에서 기대하는 목적을 달성하기 힘든 이유 중 가장 큰 하나는 여러가지 문제를 해결하는 데 따른 문제 유형 제시의 단순성이다.

문제 해결력을 배양하고 창의적인 수업을 전개하려고 해도 잘 안되는 이유는 문제다운 문제, 즉 수학적 활동을 크게 만들 수 있는 참신한 문제가 부족한 것이다.

평가 활동이 어려운 것도 수학 내용에 대한 행동 영역의 설정과 해석이며 문제 유형 제시의 단순성에 기인한다.

이렇게 생각해 볼 때, 창의성 있는 문제, 다양한 문제, 사고력을 이끌어내는 문제의 개발, 연구는 산수(수학) 교육 전반에 크나 큰 영향을 미칠 것이다. 항상 창의성을 가지고 문항을 개발하는데 정성을 다하는 분위기가 산수(수학) 교육의 발전에 크게 공헌 하리라고 생각한다.

參考文獻

1. 강 옥기의 6인, "수학과 문제 해결력 신장을 위한 수업 방법 개선 연구," 정민사, 1985.
2. 구 광조의 5인, "수학과 교육," 갑을출판사, 1988.
3. 박 한식의 1인, "수학과 교수법," 교학연구사, 1982.
4. 김진락, "수학과 학습지도 자료의 특성 및 그 활용 방안," 초등 수학 연구회, 1984.
5. 류희찬, "국민학교 산수와 평가 원리와 설계," 정민사, 1984.
6. 和田 日出夫, "問題解決, 思考의 構造(日本語)," 東洋館出版社.
7. 日本數學教育會編, "算數, 數學教育과 理論의 關係(日本語)," 聖文社, 1980.
8. Alam H. Shoenfeld, "Mathematical Problem Solving," Academic Press Inc., 1985.
9. Stephen Krulik, "Problem Solving in School Mathematics," NCTM, 1980.
10. Bernstein 외 4인, "Holt Math 1000," Holt Publishers, 1986.
11. T. H. F. Brissenden, "Mathematics Teaching," Harper & Row Publishers, 1980.
12. Arno A. Bellact, "Curriculum and Evaluation," Berkeley, 1977.
13. Edward A. Silver, "Teaching and Learning Mathematical Problem Solving," Lawrence Erlbaum Publisher, 1985.
14. Hans Freudenthal, "Mathematics as an Educational Task," P. Reidel Publishing Company, 1973.
15. Herbert P. Ginsberg, "The Development of Mathematical Thinking," Academic Press, Inc., 1983.