

Corrugated Plate의 강성 및 최적 형상 결정에 관한 연구

A Study on the Determination of Stiffness and Optimum Shape for Corrugated Plate.

정 석 주* 정 강**

Suk Choo Chung, Kang Chung

ABSTRACT

In this study, the bending and twisting stiffnesses of corrugated plate were analyzed by applying equivalent idea, and the optimum shape of corrugated plate was determined in the stiffnesses.

1. 서 론

판요소는 많은 산업분야에서 구조물 구성요소의 하나로서 널리 이용되어 왔다. 특히, 주름판(corrugated plate)은 자동차, 조선, 항공 및 우주 등의 산업분야에서 그 중요성이 점차 증가하고 있다. 따라서, 구조물의 실제 설계문제에 있어서 주름판이 하나의 구조물 구성요소로서 적용될 경우, 주름판의 정적 및 동적 문제에 대한 정확한 해를 마련함으로써 구조물의 안전성에 기여하고, 나아가서는 안전성을 만족시킴과 아울러 최적형상을 결정함으로써 경제성에 기여할 수 있도록 하는 안전 및 최적설계를 이루어야 한다. 그러나, 이러한 주름판은 그 이용도에 비하여 강성 등과 같은 필수적이면서도 기초적인 데이터 마련에 대한 연구가 미진한 상태이다.

이에 따라서 판구조물의 강성계수의 해석을 보다

엄밀하게 하고자 노력하는 많은 연구자를 찾아 볼 수가 있다. 특히, 주름판 자체의 기하학적 특징을 고려해야 하는 주름판의 강성계수 해석에 대하여 많은 논문이 발표되어 왔다. Seydel¹⁾은 파형 주름판에 대하여 주름진 방향이 일정한 방향을 갖고 있으면서 주름수가 많고 주름의 길이가 판의 측면 길이에 비하여 매우 짧다면 직교이방성판으로 간주할 수 있다는 가정을 전제로 하고 압축실험을 통하여 등가의 강성계수를 산정하는 식을 제시하였고, Fung²⁾은 파형 주름판을 평판에 부착시킨 구성요소에 대하여 유한차분법을 이용하여서 직교이방성판의 방정식과 같은 형의 지배방정식을 유도함으로써 기하학적 해석방법을 제시함과 아울러 기존의 일반 판이론인 비틀림모멘트 $M_{xy} = M_{yx}$ 가 성립하지 않음을 지적하였으며, Kinloch^{3), 4)}는 사다리꼴형 주름판과 평판이 조립된 판넬에 대하여 합리적인 강성계수의 해석을 하고자 노력하였다. Perel⁵⁾은 사다리꼴형 주름판에 대하여 하나의 주름요소에 대한 간단한 기하학적인 관계만을 이용함으로써

*正會員 : 서울산업대학

**正會員 : Total 엔지니어링

비틀림모멘트 $M_{xy} = M_{yx}$ 조건의 강성계수식을 구하였고, 또, 이 주름판을 직교이방성판이 아닌 쉘의 집합체로 가정하여 불안정성문제로서 좌굴을 해석하였다. 그러나 이들 논문은 강성계수식을 엄밀한 해석방법이 아닌 근사적 해석방법으로 제시하고 있거나 주름판의 경우 비틀림모멘트는 $M_{xy} \neq M_{yx}$ 인에도 불구하고 $M_{xy} = M_{yx}$ 로서 취급하고 있음으로써 보다 합리적인 강성계수식을 제시하지 못하고 있다.

따라서 본 연구에서는 등가의 개념을 도입하여 주름판에 대한 합리적인 강성계수식을 이론적으로 유도하고, 주름수가 같고 중량이 같을 때의 주름판의 강성측면에 대한 최적형상을 결정하고자 한다. 이러한 본 연구에서의 강성계수식은 Perel의 강성계수해석결과⁵⁾와 비교 검토함으로써 그 타당성을 검증한다.

2. 주름판의 강성계수

본 연구의 해석모델인 주름판은 Fig.1의 사다리꼴형 주름판으로서 원점을 주름판의 대칭면에 위치시키고 주름의 진행방향을 x축, 주름의 진행방향과 수직인 방향을 y축, 이 두 방향과 수직인 축을 z축으로 한다.

이와 같은 주름판의 강성해석은 단위 주름요소에 대하여 기하학적 관계와 등가의 개념을 적용시켜서 합응력과 변형률과의 관계식과 모멘트와 곡률과의 관계식을 유도하고, 그 결과에 대한 구성방정식을 완성하도록 한다.

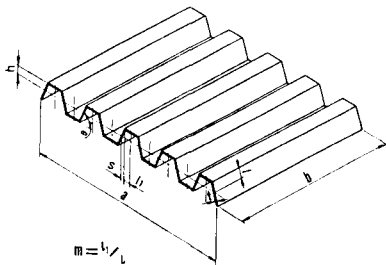


Fig.1 Geometry and Coordinate of the continuously folded plates

- 1) 굽힘모멘트와 곡률의 관계
x방향으로 순수굽힘모멘트가 작용할 경우, 굽힘모멘트와 곡률의 관계는 Fig.2에 나타낸 바와 같은 기하학적 적합조건에 의하여 구한다.

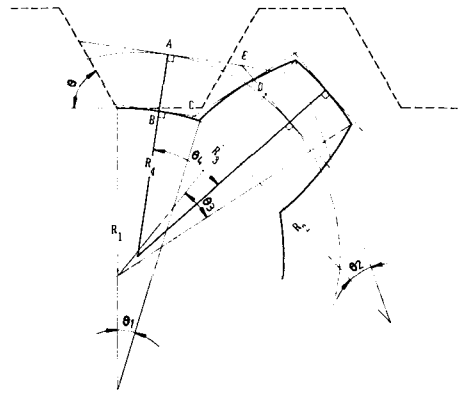


Fig.2 Geometric relationship of curvature change and moment

먼저, Fig.2에서의 5각형 ABCDE로 부터 다음의 관계식이 성립한다.

$$\theta_4 = \frac{1}{2}(\theta_1 + 2\theta_2 + \theta_3) \quad (1)$$

그러므로, 경사면과 수평면에서 발생하는 곡률반경 R_1, R_2, R_3 와 중앙면에서의 곡률반경 R_4 와의 관계는 중앙면의 길이는 변형후에도 변하지 않기 때문에 다음과 같이 나타낼 수가 있다.

$$R_4 = \frac{2(m + \cos\theta)}{\left(\frac{m}{R_1} + \frac{2}{R_2} + \frac{m}{R_3}\right)} \quad (2)$$

여기서, R_1 과 R_3 는 같으므로, (2)식은 다음과 같다.

$$R_4 = \frac{(m + \cos\theta)}{\left(\frac{m}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)} \quad (3)$$

따라서, x방향으로 순수굽힘모멘트가 작용할 경우의 수평판의 곡률 R_1 과 경사판의 곡률 R_2 에 대한 모멘트의 관계식을 (3)식에 대입하면, 중앙면에 대한 굽힘모멘트와 곡률의 관계는 다음과 같다.

$$M_x = EI_x \frac{1}{\rho_x}, \quad (\rho_x = R_1) \quad (4)$$

여기서,

$$I_x = \frac{t^3}{12(1-\nu)^2} \cdot \frac{(m + \cos\theta)}{(m+1)} \quad (5)$$

산형 주름판의 경우는 $m=0$ 이므로

$$I_x = \frac{t^3}{12(1-\nu^2)} \cos\theta \quad (6)$$

y방향으로 순수굽힘모멘트가 작용할 경우, 굽힘모멘트와 곡률의 관계는 Fig.3에 나타낸 바와 같은 단면의 2차 모멘트를 구함으로써 결정할 수 있다.

경사면에서의 좌표를 x', z' 로 취하면,

$$I_{z'z'} = \frac{t^3}{12}, \quad I_{x'x'} = \frac{t^3 l}{12}, \quad I_{x'z'} = 0 \quad (7)$$

그러므로, 경사축의 중립상태에 관한 2차 모멘트

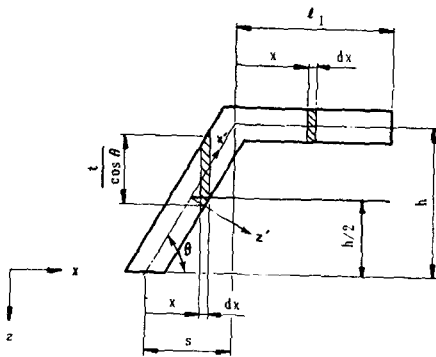


Fig.3 Geometry of representative width

I_y' 는 모아 원(Mohr's circle)을 이용하면 다음과 같다.

$$I_y' = \frac{t^3 \sin^2\theta + I_x \cos^2\theta + 3I_x t \sin\theta \cos\theta}{12} \quad (8)$$

또한, 수평면에서의 중립축에 관한 2차 모멘트 I_y 는 다음과 같으므로,

$$I_y' = \frac{I_x t^3}{12} + I_x t h^2 \quad (9)$$

전체부재에 대한 단위 길이당의 2차 모멘트 I_y 는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$I_y = (I_y' + I_y'') / (l \cos\theta + l_1) \\ = \frac{t^3(m + \cos^2\theta) + 4t h^2(1 + 3m)}{12(m + \cos\theta)} \quad (10)$$

결국, y방향 단위길이당의 굽힘모멘트와 곡률의 관계는 다음과 같다.

$$M_y = EI_y \frac{1}{\rho_y} \quad (11)$$

(11)식에서 $m=0$ 이면, 산형 주름판의 굽힘모멘트와 곡률의 관계가 된다.

2) 비틀림모멘트와 곡률의 관계

주름판의 비틀림모멘트는 일반 평판과는 달리 $M_{xy} \neq M_{yx}$ 이므로 M_{xy} 와 M_{yx} 를 고려해야 한다.

먼저, Fig.4와 같은 y방향 단면에 대한 비틀림모멘트 M_{yx} 와 곡률의 관계는 경사면에 대한 등가의 전단탄성계수를 고려하여 수평면과의 합으로써 결정된다.

$$\text{즉, } M_{yx} = 2G \frac{\cos\theta}{(m + \cos\theta)} \int (z')^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dz'$$

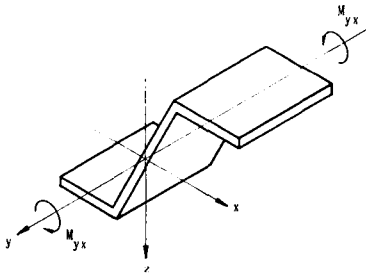


Fig.4 Geometry of twisting moment M_{yx}

$$\begin{aligned} & 2G \frac{m}{(m + \cos\theta)} \int z^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dz \\ &= \frac{Et^3}{12(1+\nu)} \frac{(m+1)}{(m + \cos\theta)} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (12)$$

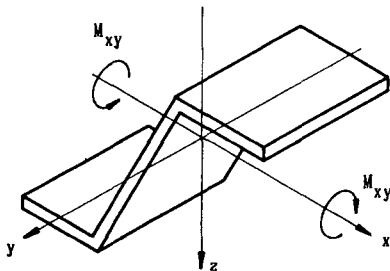
이식은 Perel⁵⁾의 결과와 일치한다.

한편, Fig.5의 (a)에서와 같이 비틀림모멘트가 적용할 경우, x방향 단면에 대한 비틀림모멘트 M_{xy} 와 곡률의 관계는 (b)에서와 같이 경사면에 작용하는 비틀림모멘트 M'_{xy} 와 (c)에서와 같이 비틀림모멘트

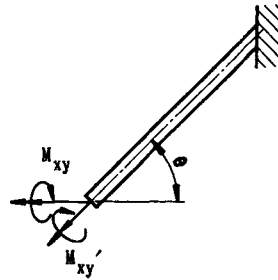
M_{xy} 에 의한 곡률($\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$)와 중앙면 등가를 생각

함으로써 결정이 된다.

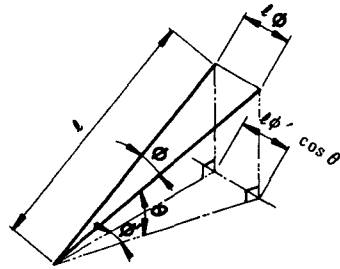
즉, $M_{xy} = M_{xy} \cos\theta$, $\phi = \phi' \cos\theta$ 이므로, 경사면에 대한 비틀림모멘트와 곡률의 관계는 다음과 같다.



(a) Twisting moment M_{xy}



(b) Relationship of M_{xy} and M'_{xy}



(c) Geometric relationship of twisting angle

Fig.5 Geometry of twisting moment M_{xy}

$$M_{xy} = \frac{Et^3}{12(1+\nu)} \frac{1}{\cos^2\theta} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \quad (13)$$

또한, 수평면에 대한 비틀림모멘트와 곡률의 관계는 다음과 같으므로

$$M_{xy} = \frac{Et^3}{12(1+\nu)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \quad (14)$$

전체부재에 대한 등가의 곡률($\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$)은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} &= \frac{\cos\theta}{(m + \cos\theta)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)' + \frac{m}{(m + \cos\theta)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \\ &= \frac{12(1+\nu)M_{xy}}{Et^3} \frac{(m + \cos^3\theta)}{(m + \cos\theta)} \end{aligned} \quad (15)$$

따라서, 사다리꼴형 주름판의 x방향 단면에 대한 비틀림모멘트 M_{xy} 와 곡률의 관계는 다음과 같다.

$$M_{xy} = \frac{Et^3}{12(1+\nu)} \frac{(m + \cos\theta)}{(m + \cos^3\theta)} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (16)$$

(12)식과 (16)식에서 $m=0$ 라면, 산형 주름판의 비틀림모멘트와 곡률의 관계가 된다.

3) 구성방정식

앞에서 유도한 응력과 모멘트의 관계식을 종합하여 Almroth⁶⁾의 표기방법에 의한 행렬식으로 표시하면 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ M_{yx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{44} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{55} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{77} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \\ k_{yx} \end{pmatrix} \quad (17)$$

여기서, C는 강성계수로서 사다리꼴형 주름판에 대하여 Table 1에 정리하였다.

$$k_x = -\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right), k_y = -\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right), k_{xy} = k_{yx} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (18)$$

Table 1 Coefficients of constitutive equation

| | |
|----------|--|
| C_{44} | $\frac{Et^3(m + \cos\theta)}{12(1-\nu^2)(1+m)}$ |
| C_{55} | $\frac{Et\{t^2(m + \cos^2\theta) + 4h^2(1+3m)\}}{12(1-\nu^2)(m + \cos\theta)}$ |
| C_{66} | $\frac{Et^3(m + \cos\theta)}{12(1+\nu)(m + \cos^3\theta)}$ |
| C_{77} | $\frac{Et^3(m + 1)}{12(1+\nu)(m + \cos\theta)}$ |

즉, 굽힘강성계수 D_x 와 D_y 는 C_{44} , C_{55} 이고, 비틀림 강성계수 D_{xy} 와 D_{yx} 는 C_{66} , C_{77} 과 같다.

3. 결과 및 고찰

주름판의 굽힘강성계수 D_x 와 D_y 는 순수굽힘모멘트 상태에서의 경사판과 수평판에 대한 곡률을 구하고 주름판의 중앙면에 대한 곡률과의 관계식 (4)와 굽힘모멘트 M_x 와 곡률과의 관계식 (11)을 유도함으로써 구하였다. 또한, 주름판의 경우는 비틀림모멘트 $M_{xy}=M_{yx}$ 가 성립하지 않기 때문에, 순수전단 상태에서의 경사판에 대한 등가의 전단탄성계수식 $G=E/\{2(1-\nu)\cos\theta\}$ 을 구하고, 이 전단탄성계수와 기하학적 관계를 도입하여 비틀림모멘트 $M_{xy}=M_{yx}$ 가 성립하지 않음을 검토 규명하였고, 비틀림모멘트 M_{yx} 와 곡률과의 관계식 (12)과 비틀림모멘트 M_{xy} 와 곡률과의 관계식 (16)을 구함으로써 주름판의 비틀림강성계수 D_{xy} , D_{yx} 를 구하였다. 본 강성계수와 기존의 Perel의 결과⁵⁾를 비교하면, Table 2에서 보는 바와 같이 비틀림강성계수 D_{xy} 는 서로 일치하고 있다. 그러나, Perel의 경우는 주름판의 비틀림강성계수는 $D_{xy} \neq D_{yx}$ 임에도 불구하고 $D_{xy}=D_{yx}$ 로 취급하고 있음으로써 이 해석은 불합리하다고 생각된다. 굽힘강성계수의 경우는 본 연구의 결과가 Perel의 결과보다 약간 큰 값을 나타내고 있다. 특히, 본 연구의 결과로는 $m(l_1/l)=0$ 이면, 산형 주름판의 강성계수를 구할 수 있고, $h=0=0$ 이면, 평판의 강성계수를 구할 수 있는데 반하여, Perel의 결과로는 산형 주름판의 강성계수와 평판의 강성계수를 구할 수 없다. 따라서 본 연구에서 유도한 강성계수식은 임의의 판구조물에도 적용할 수 있는 보다 합리적이고 일반화된 식이라고 할 수 있다.

한편, 주름수가 같고 중량이 같을 때의 주름판의 강성계수를 주름판의 주름을 길게 뻗을 때의 길이 a 와 주름상태의 길이 a' 와의 비($k=a'/a$)가 1.1, 1.2, 1.3, 1.4인 경우, 주름수가 같고 중량이 같을 때의 $m=l_1/l$ 변화에 대하여, 두께(t)는 1, 프와송비(ν)는 0.3, 그리고 탄성계수(E)는 상수로 하고 비교 검토해보면, 굽힘강성계수 D_x 와 비틀림강성계수 D_{yx} 는 m 의

Table 2 Comparison of present results and Perel's results for rigidities

| | present results(1) | Perel's results(2) | (1)/(2) |
|----------|---|---------------------------------------|--|
| D_x | $\frac{Et^3(1+\cos\theta)}{24(1-\nu^2)}$ | $\frac{Et^3(1+\cos\theta)}{24}$ | $\frac{1}{(1-\nu^2)}$ |
| D_y | $\frac{Et\{t^2(1+\cos^2\theta)+16h^2\}}{12(1-\nu^2)(1+\cos\theta)}$ | $\frac{4Eth^2}{3(1+\cos\theta)}$ | $\frac{1}{(1-\nu^2)} + \frac{t^2(1+\cos^2\theta)}{16h^2(1-\nu^2)}$ |
| D_{xy} | $\frac{Et^3(1+\cos\theta)}{12(1+\nu)(1+\cos^3\theta)}$ | $\frac{Et^3}{6(1+\nu)(1+\cos\theta)}$ | $\frac{(1+\cos\theta)^2}{2(1+\cos^3\theta)}$ |
| D_{yx} | $\frac{Et^3}{6(1+\nu)(1+\cos\theta)}$ | $\frac{Et^3}{6(1+\nu)(1+\cos\theta)}$ | 1 |

변화에 관계없이 $k=1.1$ 인 경우에는 $D_x=0.08325E$, $D_{yx}=0.07051E$, $k=1.2$ 인 경우에는 $D_x=0.07631E$, $D_{yx}=0.07692E$, $k=1.3$ 인 경우에는 $D_x=0.07044E$, $D_{yx}=0.08333E$, $k=1.4$ 인 경우에는 $D_x=0.06541E$, $D_{yx}=0.08974E$ 로서 일정하였다.

그러나 k 가 커짐에 따라서 굽힘강성계수 D_x 의 값은 감소하였고, 반면에 비틀림강성계수 D_{yx} 의 값은 증가하였다. 이것은 중량이 증가함에 따라서 D_x 의 값은 감소하였고, 주름의 높이가 커짐에 따라서 D_{yx} 의 값은 증가한 것이라고 생각된다. 그리고, 비틀림강성계수 D_{xy} 는 산형 주름판($m=0$)이 $k=1.1$ 인 경우 $0.07756 E$, $k=1.2$ 인 경우 $0.09231 E$, $k=1.3$ 인 경우 $0.10833 E$, $k=1.4$ 인 경우 $0.12564E$ 로 가장 큰 값을 나타내었고 k 가 커짐에 따라서 D_{xy} 는 증가하였다. 또 m 이 커짐에 따라서 D_{xy} 는 감소하였다. 이 경우도 마찬가지로 k 가 커짐에 따라 주름의 높이가 커져서 D_{xy} 의 값은 증가하였고, m 이 커짐에 따라 주름판의 높이가 작아져서 D_{xy} 의 값은 감소한 것이라고 생각된다. 특히, 주름판은 다른 강성계수보다도 굽힘강성계수 D_x 를 향상시킬 목적으로 평판을 주름잡아준 판이라고 할 수가 있다. 이러한 굽힘강성 계수 D_x 는 굽힘강성계수 D_x 와 비틀림강성계수 D_{xy} , D_{yx} 보다도 25~180배이상 크다. 따라서 주름판의 굽힘강성계수 D_x 의 값이 최대인 경우가 주름판의 최적인 상태라고 할 수가 있다. 이러한 굽힘강성계수 D_x 에 대해서도 $k=1.1\sim 1.4$ 인 경우에 대하여 m 을 0에서 부터 2까지 변화시켜서 주름수가 같고 중량이 같을 때의 해석

결과를 살펴 보면, Fig. 6~Fig. 9에 나타낸 바와 같이 $k=1.1$ 인 경우에는 $m=0.29$, $k=1.2$ 인 경우에는 $m=0.26$, $k=1.3$ 인 경우에는 $m=0.24$, $k=1.4$ 인 경우에는 $m=0.22$ 에서 최대굽힘강성계수 D_x 의 값을 나타내었다. 또한, 사다리꼴형 주름판은 $k=1.1$ 인 경우에는 $m=0.83$, $k=1.2$ 인 경우에는 $m=0.72$, $k=1.3$ 인 경우에는 $m=0.63$, $k=1.4$ 인 경우에는 $m=0.56$ 에서 산형 주름판의 굽힘강성계수와 같은 값을 나타내었다.

다시 말해서, 사다리꼴형 주름판은 $k=1.1$ 인 경우에는 $m=0.83$, $k=1.2$ 인 경우에는 $m=0.72$, $k=1.3$ 인 경우에는 $m=0.63$, $k=1.4$ 인 경우에는 $m=0.56$ 이하이면, 산형 주름판보다 큰 굽힘강성계수 D_x 의

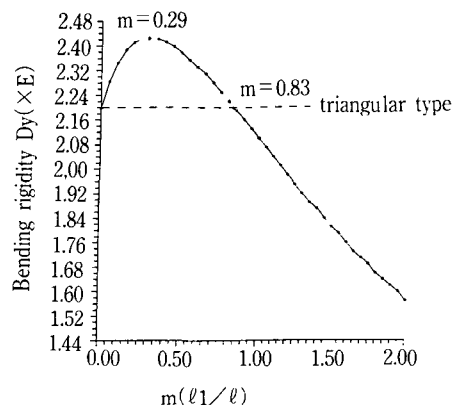


Fig. 6 Bending rigidity D_y vs. m ; $k=1.1$

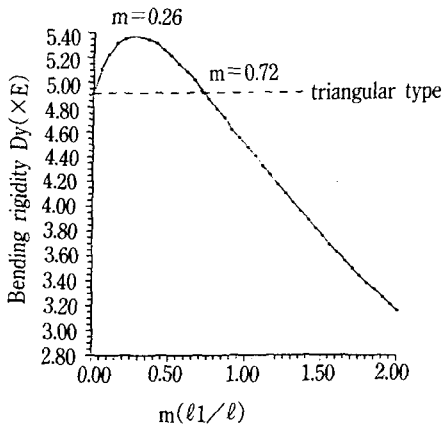


Fig. 7 Bending rigidity D_y vs. m ; $k=1.2$

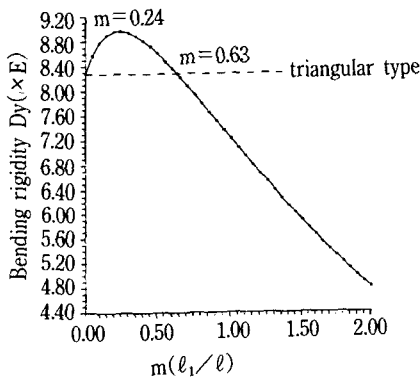


Fig.8 Bending rigidity D_y vs. m ; $k=1.3$

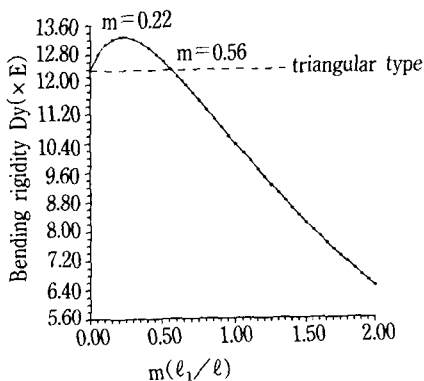


Fig.9 Bending rigidity D_y vs. m ; $k=1.4$

값을 갖고, 그 이상이면 산형 주름판보다 작은 굽힘강성계수 D_y 의 값을 갖는다.

4. 결 론

본 연구에서는 등가의 개념을 도입하여 주름판에 대한 합리적인 강성계수식을 이론적으로 유도하고, 주름수가 같고 중량이 같을 때의 주름판의 강성측면에 대한 최적형상을 결정하고자 해석한 결과, 다음과 같이 결론을 얻었다.

1. 순수굽힘모멘트 상태에서의 경사판과 수평판에 대한 곡률과 주름판의 중앙면에 대한 곡률을 구하고 그 관계와 등가의 개념을 도입하여, 주름판의 굽힘모멘트 M_x 와 곡률과의 관계식(4)과 굽힘모멘트 M_y 와 곡률과의 관계식(11)을 구하여 주름판의 굽힘강성계수인 D_x , D_y 를 구하였다.
2. 순수전단상태의 경사판에 대한 등가의 전단탄성계수인 $G' = E / \{2(1+\nu) \cos \theta\}$ 을 구하고 이 전단탄성계수와 기하학적 관계를 적용시켜 주름판의 비틀림모멘트 $M_{xy} = M_{yx}$ 가 성립되지 않음을 규명하였다. 그리고, 비틀림모멘트 M_{xy} 와 곡률과의 관계식(12)과 비틀림모멘트 M_{yx} 와 곡률과의 관계식(16)을 구하여 주름판의 비틀림강성계수인 D_{xy} , D_{yx} 를 구하였다.
3. 산형 주름판과 주름수가 같고 중량이 같은 사다리꼴형 주름판에서 최대강성계수의 값을 갖는 주름판의 형상($k=1.1$ 인 경우에는 $m=0.29$, $k=1.2$ 인 경우에는 $m=0.26$, $k=1.3$ 인 경우에는 $m=0.24$, $k=1.4$ 인 경우에는 $m=0.22$)을 구하였다. 또한 산형 주름판보다 큰 강성계수의 값을 갖는 사다리꼴형 주름판의 형상범위($k=1.1$ 인 경우에는 $m=0 \sim 0.83$, $k=1.2$ 인 경우에는 $m=0 \sim 0.72$, $k=1.3$ 인 경우에는 $m=0 \sim 0.63$, $k=1.4$ 인 경우에는 $m=0 \sim 0.56$)와 작은 강성계수의 값을 갖는 사다리꼴형 주름판의 형상범위를 구하였다.

참 고 문 헌

1. V. E. Seydel, 1931, "Schubknickversuche mit Wellblechtafeln", DVL-Jahrbuch, pp.233-245.
2. Y. C. Fung, 1962, "On Corrugation-Stiffened Panels", Calif. Inst. Tech. GALCIT SM 62-85.
3. H. Kinloch, 1967. "An Experimental and Theoretical Investigation of Orthotropic Plate Structure", Thin Walled Structure Symposim at Swansea, pp.213-235.
4. H. Kinloch, 1967. "analysis and Design of Anisotropic Plate Structures with Particular Reference to Decking System", Thin Walled Structure, pp.271-299.
5. D. Perel, 1976, "The General Instability of Infinitely Long Trapezoidally Corrugated Plates Under Shear", Requirment Thesis for the Degree of Ph.D., Syracuse Univ.
6. B. O. Almroth and D. O. Brush, 1975, "Buckling of Bars, Plates, and Shells", McGraw-Hill.