

# 三邊測量에 의한 水平位置 決定의 正確度 向上에 관한 研究

## A Study on the Improvement of Accuracy in Plane Positioning by Trilateration

朴 雲 龍\*      金 熙 圭\*\*  
Park woon-young   Kim hee-gyoo  
權 現\*\*\*  
Kwon hyon

### 要 旨

本 論文은 2次元網調整理論을 正립하여 單列三角網, 四邊三角網, 有心三角網과 複合測地網의 各 平面三邊網을 解析하였다.

이들 水平三邊網의 形態에 따른 誤差傳播式을 誘導하여 誤差特性을 分析하였고, 또한 複合測地網에서는 誤差解析 結果를 誤差橢圓으로 나타내었으며, Data Snooping 方法에 따른 過大誤差檢出을 試圖하였다.

### ABSTRACT

In this paper a two dimensional network adjustment theory is developed to analyze the plane trilateration network of single triangle network, of quadrilateral network, of polygon trilateration network and of combined network.

The characteristics of error were analysed by developing an error propagation equation for each form of plane trilateration network.

In case of combined network, the result of error analysis was represented by error ellipses and gross error detection was carried out by data snooping method.

## 1. 序 論

最近 各 研究機關이나 現場에서 E. D. M.의 活用이 크게 增大 및 普遍化되고 있으므로 이를 應用한 觀測技法과 調整技法의 開發은 重要한 의미를 지니게 되었고, 이제 精密距離觀測技術이 劃期的으로 發達되어 作業上의 能率과 함께 測量成果의 正確度 向上을 確保할 수 있게 되었으며, 단지 距離에만 基礎를 둔 三邊測量에 관한 關心度가 높아졌다.

本 研究에서는 位置解析을 迅速, 正確하게 實施하기 위해 單列三邊網, 四邊形三邊網과 有心

三邊網 등의 單位水平 2次元의 三邊網調整과 이들을 結合한 複合測地網을 構成하여 基準點의 位置를 觀測하였고, 觀測者의 不注意에서 發生되는 過大誤差를 檢出 및 除去하는 方法을 研究하므로써 2次元網 調整에 따른 誤差를 分析하고자 하였다.

## 2. 水平位置決定을 위한 測地網調整

### (1) 觀測方程式

基本觀測方程式은 다음과 같다.

$$L_{ij} + V_{Lij} = \{(X_j - X_i)^2 + (Y_j - Y_i)^2\}^{1/2} \quad (2-1)$$

이 非線形方程式을 Taylor 級數를 利用해서 線形化하면 다음과 같은 距離測量에 대한 最終線形觀測方程式은 다음과 같다.<sup>1)2)</sup>

\* 東亞大學校 工科大學 教授

\*\* 慶南專門大學 副教授

\*\*\* 延世大學校 産業技術研究所 客員研究員

$$DQ=K+V \quad (2-2)$$

여기서 D는 未知數의 係數行列이고, Q는 未知補正값 行列이며, K는 常數, 行列 V는 觀測한 길이의 殘差이다. 가장 적당한 補正값  $dXu, dYu$ 는 最小二乘법을 이용하여 計算되며 같은 輕重率일 때 方程式은

$$Q=(D^TD)^{-1}D^TK \quad (2-3)$$

이다.<sup>3)4)</sup>

### (2) 座標決定

三邊測量에 의한 座標計算은 既知點이 1점일 境遇에는 座標計算上 方位角을 別途로 觀測해야 함에 비하여 既知點이 2개 以上일 境遇는 座標로부터 方向角이 計算되기 때문에 座標計算은 便利하다.<sup>5)</sup>

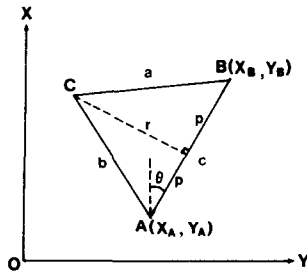


Fig. 1 Determination of coordinate by two control points

$$\begin{aligned} X_C &= X_A + p \cos \theta + r \sin \theta \\ &= X_B - q \cos \theta + r \sin \theta \end{aligned} \quad (2-4a)$$

$$\begin{aligned} Y_C &= Y_A + p \sin \theta - r \cos \theta \\ &= Y_B - q \sin \theta + r \cos \theta \end{aligned} \quad (2-4b)$$

이 식에서  $p, q, r, \theta$ 는 다음 關係로부터 計算된다.

$$\left. \begin{aligned} \cos \theta &= \frac{X_B - X_A}{C}, \quad \sin \theta = \frac{Y_B - Y_A}{C} \\ p &= \frac{1}{2} \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{c} \\ q &= \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2 - b^2 + c^2}{c} \\ r &= \sqrt{b^2 - p^2} = \sqrt{a^2 - q^2} \end{aligned} \right\} \quad (2-5)$$

### 3. 測地網의 過大誤差檢出

觀測方程式에 의한 座標調整을 위해 線形方程式을 다음과 같이 假定한다.

$$l = AX + e : W \quad (3-1)$$

여기서  $l$ 은 觀測값 벡터( $m \times 1$ )

$A$ 는 係數行列( $m \times u$ )

$X$ 는 未知變數벡터( $u \times 1$ )

$e$ 는 觀測에서의 참오차벡터( $n \times 1$ )

$W$ 는 觀測값의 輕重率行列( $n \times n$ )

이며,  $X$ 와  $\sigma_0^2$ 의 最小分散不便推定값(Minimum Variance Unbiased Estimation)  $\bar{X}$ 와  $\tilde{\sigma}_0^2$ 은 다음과 같다.<sup>6)7)8)</sup>

$$X = (A^TWA)^{-1}A^TWl \quad (3-2)$$

$$\tilde{\sigma}_0^2 = \frac{1}{r}(AX - l)^TW(AX - l) \quad (3-3)$$

$$V = AX - l \quad (3-4)$$

여기서  $r (= n - u)$ 은 剩餘觀測數(Redundancy)로서 統計的自由度(Statistical Degree of Freedom)이다.

귀무가설(Null Hypothesis)  $H_0; 1 \sim N(A\bar{x}, \sigma_0^2W^{-1})$ 의 假定下에서,  $X$ 와  $V$ 의 分布는 다음과 같다.<sup>9)</sup>

$$X \sim N(x, \Sigma_{xx}) : \Sigma_{xx} = \sigma_0^2Q_{xx} = \sigma_0^2(A^TWA)^{-1} \quad (3-5)$$

$$V \sim N(Q, \Sigma_{vv}) : \Sigma_{vv} = \sigma_0^2Q_{vv} = \sigma_0^2(W^{-1} - AQ_{xx}A^T) \quad (3-6)$$

식(3-1)에서  $E(l) = A_x$ 라면, 最小二乘해  $\hat{x}$ 는 다음과 같다.

$$\hat{x} = (A^TWA)^{-1}A^TWl = \bar{X} + V_x \quad (3-7)$$

여기서  $V_x$ 는 偏의(Bias)로서 過大誤差의 影響으로 發生한다.  $X$ 의 精密度(Precision)는  $\hat{X}$ 와  $E(\hat{X})$ 의 근접도이며  $\hat{X}$  정확도(Accuracy)는  $\hat{X}$ 와  $X$ 의 近接度로서 다음 식으로 된다.

$$\text{正確度} = \text{精密度} + V_x V_x \quad (3-8)$$

(3-8)식의 2번째 項은 信賴度를 나타내므로, 正確度는 精密度와 信賴度의 影響 모두를 包含

한다.

Global testing 을 위한 檢定統計量 T는 다음과 같다.<sup>10)11)12)</sup>

$$T = \frac{V^T W V}{(n-u)\sigma_0^2} = \frac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} < F(1-\alpha : n-u, \infty) \quad (3-9)$$

여기서 V는 殘差벡터, W는 輕重率行列, (n-u)는 剩餘觀測數,  $\sigma_0^2$ 는 事前分散,  $\hat{\sigma}_0^2$ 는 事後分散이다.

T가 (3-9)식을 만족하면 귀무가설(과대오차가 없음)이 採擇되며 滿足하지 않으면 棄却된다. 過大誤차를 探知하기 위해 從來에 使用되었던 方法인 一般殘差의 크기를 一定한 許容限界값과 比較하는 方法에서는 最小제곱법의 Masking 效果에 의해 틀린 결과를 招來할 수 있다. 따라서 Baarda는 一般殘差 대신 觀測體系의 幾何條件이 包含된 標準化 殘差(Standard residual)를 使用하여 Data Snooping 段階로서 다음 (3-10)식과 같은 檢定統計量  $t_i$ 를 調査한다.

$$t_i = \frac{-V_i}{\alpha V_i} = \frac{-V_i}{\alpha_0(Q_{vv}W)_i} = \frac{-V_i}{\alpha_0 r_i} \quad (3-10)$$

여기서  $(Q_{vv})_i$ 는 殘差의 輕重率計數行列의 i 번째 對角線 要素이다.

$$Q_{vv} = I - A(A^T W A)^{-1} A^T W \quad (3-11)$$

여기서 I는 單位行列, A는 觀測方程式의 係數行列이다.

檢定統計量  $t_i$ 와 棄却값 K를 比較하여  $|t_i| > K$ 이면, 觀測량  $l_i$ 에 過大誤차가 包含되었다는 對立假說을 採擇한다.

有意水準에 따른 棄却값은 다음 <Table 1>과 같다.

Table 1. Abandonment Value of Willingness Standard

Willingness Standard( $\alpha_0$ )	Abandonment Value(K)
0.01%	3.72
0.10	3.29
0.27	3.00
1.00	2.58
5.00	1.96

#### 4. 觀 測

測地網의 構成은 釜山直轄市 北區 周禮洞 所在 慶南專門大學 建設館 屋上에  $p_0$ 點(未知點)을 잡고 周圍 500~1,200 m 내에 位置한 本大學 뒷산과 兄弟禮社院, 보훈병원신축쿠지 뒷산, 락키아파트 屋上 등을 비롯한 아파트 屋上, 沐浴湯, 國民學校 屋上 등을 既知點으로 만들기 위하여 觀測이 可能한 點들을 選定하여 測地網을 構成하고 測量을 實施하였다.

觀測裝偏中 距離觀測을 위하여는  $\pm(5 \text{ mm} + 5 \text{ ppm} \cdot D)$ 인 Sokkisha RED2 2L 과 RED2 2A 및 Nikon ND-250 의 세 E. D. M 을 使用하여 한 邊長마다 各各 3回 反復觀測한 후 許容誤差範圍 以內의 觀測값들만 취하여 Data 로 利用하였으며, 氣象의 影響을 最小로 하기 위하여 午前과 午後에만 觀測을 實施하였고 補正을 위해서 氣壓과 溫度를 觀測하였다.

#### 5. 調整結果의 比較分析

##### (1) 水平位置網

距離만을 利用하는 三邊測量의 三邊網에 單列, 四邊, 有心 및 複合三角網과 같은 三角網의 幾何學的 形態를 導入하여 水平位置決定과 그 特性을 把握하기 위해서 프로그램을 開發하여 單列, 四邊, 有心三邊網 및 複合測地網에 適用하였다.

##### (가) 單列 三邊網

<Fig. 2>와 같이 가로변에 대한 既知邊의 比를 1 : 1, 1 : 0.5, 1 : 0.25, 1 : 0.125 로 줄여가면서 各 境遇마다 誤差制限을 1/10,000, 1/5,000, 1/3,300 으로 했을 때 各點의 標準誤차를 計算해 본 結果 <Fig. 3>으로 나타낼 수 있었다.

주어진 誤差에 따라 I, II, III, IV의 境遇 모두 單位輕重率에 대한 標準誤차는 誤差制限이 1/10,000 에 比하여 1/5,000 일때는 2배, 1/3,300 일 때는 3배로 一定하게 增加되었고, 調整座標의 標準誤차도 測點의 擴張에 따라 一律적으로 增加해가는 것을 알 수 있어 測量의 定誤차가

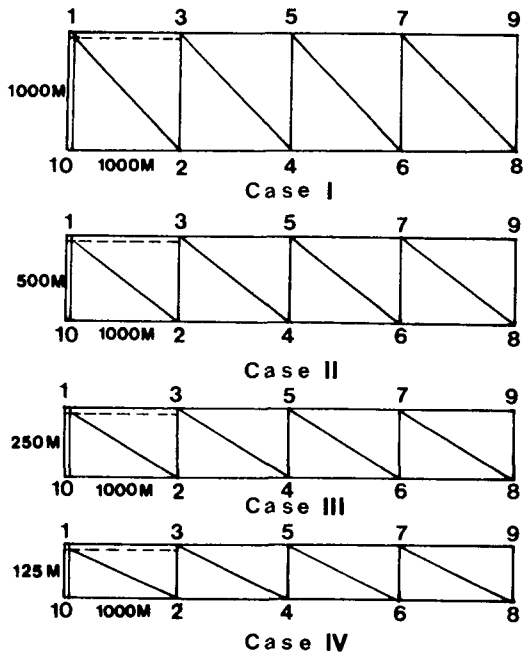


Fig. 2 Geometrical form of plane single chain networks

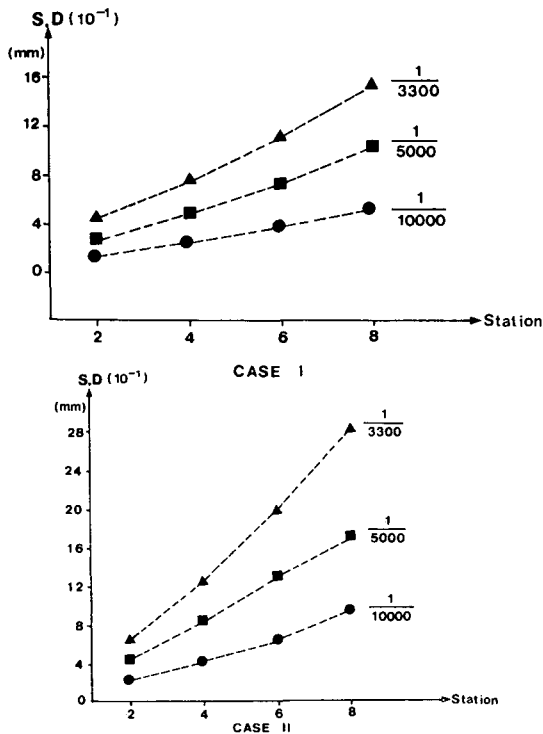


Fig. 3 Station points and standard deviations by single chain network in each case

幾何學的 形態에서는 항상 一定함을 알 수 있었다.

I, II, III, IV 境遇의 誤差傳播式을 살펴보면 常數의 變化가 一定함을 알 수 있어서 다음과 같이 하나의 식으로 表示할 수 있다.

$$y(a) = 0.012K_1x^2 + 0.053K_2x + 0.049K_3$$

여기서  $x$ ; 標準誤差의 變化量(mm)

$y$ ; 測線距離(Km)

$k_1, k_2, k_3$ ; 既知邊과 測線의 比較에 따른 係數이다.

이때 가로변 測線에 대한 세로변 既知線의 比較이 1/2 씩 減少됨에 따라서  $k_1$ 은  $2K_1 + 0.002$  씩 增加되며,  $k_2$ 는 2배씩 增加하고,  $k_3$ 는 1.6배 增加됨을 보였다.

(나) 四邊 三邊網

(Fig. 4)에서와 같이 四邊網에서도 單列網과 똑같은 方法으로 計算하여 (Fig. 5)로 나타내었다.

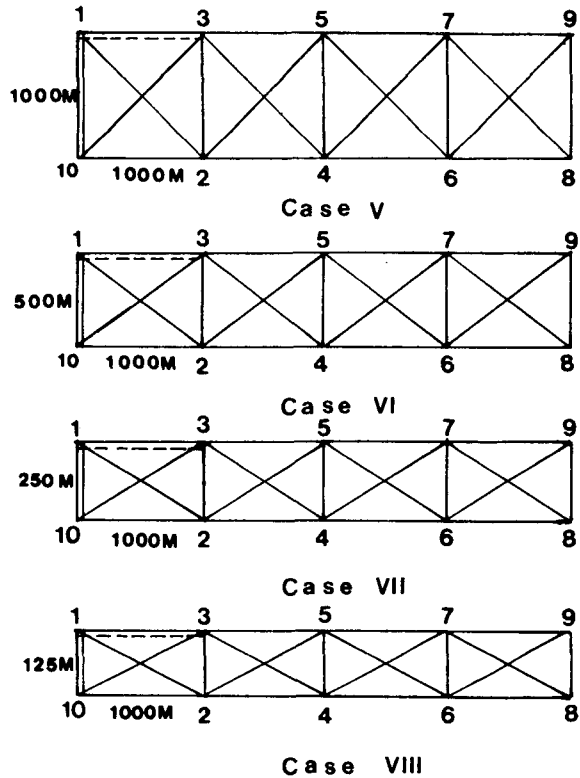


Fig. 4 Geometrical form of plane quadrilateral networks

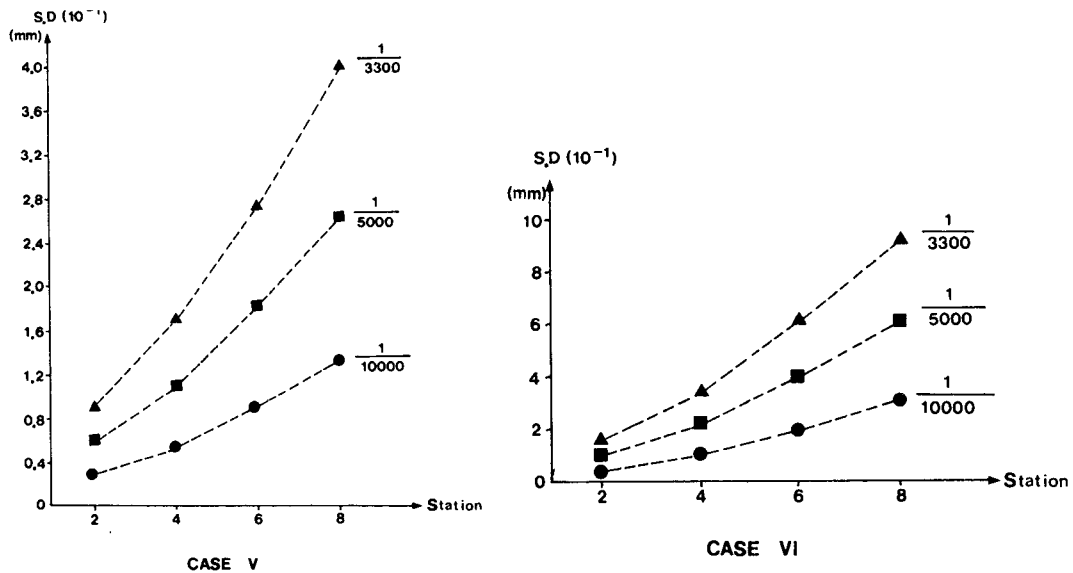


Fig. 5 Station points and standard deviations by quadrilateral network in each case

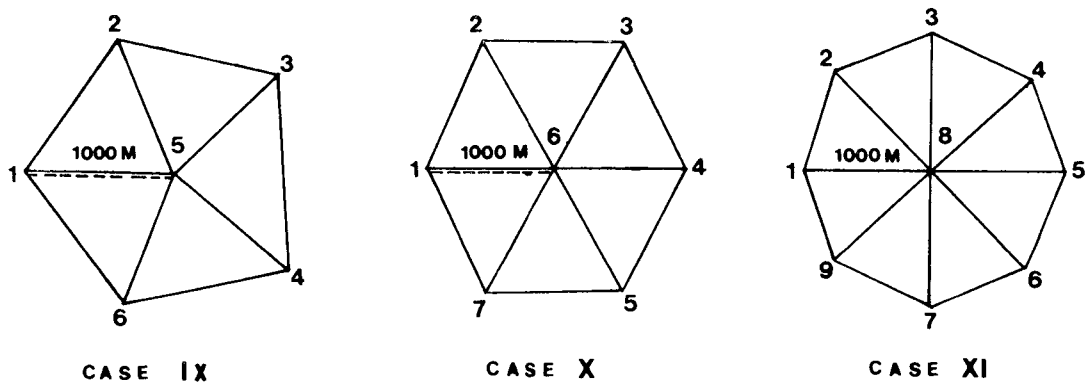


Fig. 6 Geometrical form of plane polygon networks

單位輕重率에 대한 標準誤差 및 調整座標의 標準誤差 역시 單列網과 같이 一定하게 增加되어 나타났고, 四邊網 역시 測點別 誤差傳播特性을 알아보기 위하여 回歸分析한 結果 V, VI, VII, VIII의 境遇도 常數의 變化가 一定하기 때문에 다음과 같이 하나의 식으로 나타낼 수 있었다.

$$y(b) = 0.005k_1x^2 + 0.015k_2x + 0.013k_3$$

여기서 測線과 基線의 비가 1:1, 1:0.5, 1

:0.25, 1:0.125로 1/2씩 減少됨에 따라서  $k_1$ 은 2배씩 增加되고,  $k_2$ 는  $2k_2 + 0.007$ 씩 增加되며,  $k_3$ 는  $-0.007$ 씩 變化됨을 보였다.

(다) 有心 三邊網

有心網은 <Fig. 6>와 같이 放射形의 內則邊을 1,000 m로 하여 5角形(X), 6角形(X), 8角形(XI)으로 標準誤差의 變化를 살펴보았다.

<Fig. 7>에서와 같이 標準誤差의 變化가  $n$ 角

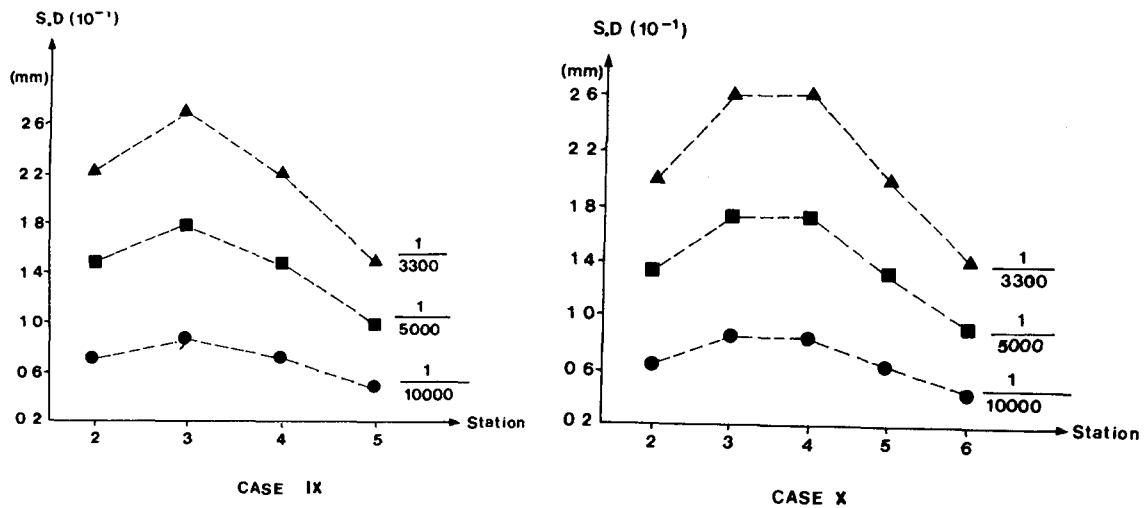


Fig. 7 station points and standard deviations by polygon network in each case

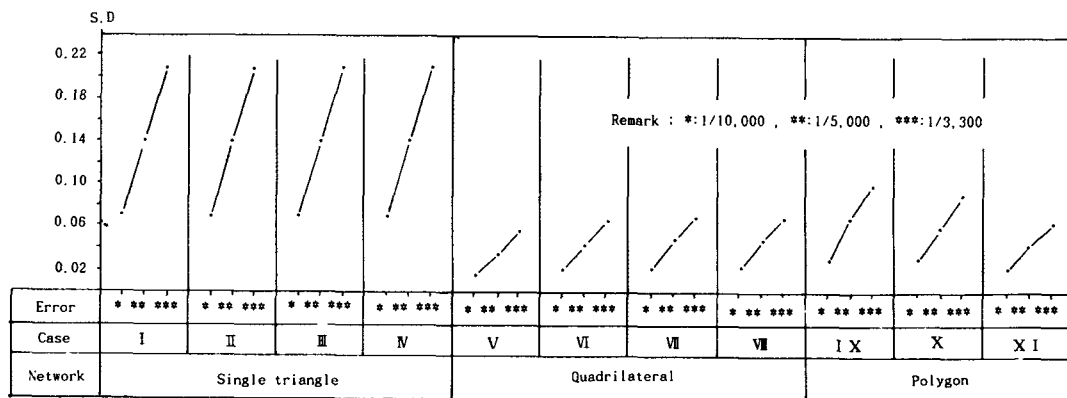


Fig. 8 Standard deviations in each networks(P=1)

形으로 달라져도 아래와 같이 하나의 誤差傳播式으로 나타낼 수 있었다.

$$y(c) = -0.010x^2 + 0.043x + 0.04$$

三邊測量에 의한 單列, 四邊, 有心三邊網의 水平位置 誤差와 網調整過程에서 計算되는 單位 輕重率을 <Fig. 11>에서 살펴보면 四邊三邊網이 正確度가 가장 優秀하게 나타났고, 單列三邊網이 正確度가 떨어짐을 알 수 있었다.

## (2) 複合測地網

앞서 分析한 單列, 四邊, 有心網 등은 測地網

構成에서 基本的인 構成形態로서 測量對象地域의 形態 및 測量條件에 따라 適合한 形態가 利用되고 있으며 大團位 地域이나 剩餘觀測을 增加시켜 正確度를 向上시키고자 할 境遇에는 複合測地網이 利用되고 있다.

複合測地網은 測地網의 構成形態나 剩餘觀測의 數를 앞서 分析한 單列, 四邊, 有心網과 같이 規則的으로 定義하기가 매우 어려우므로 本 研究에서는 <Fig. 9>와 같이 本 大學 附近에 13 點의 測點을 設置하였고 觀測距離는 40 變을 觀測하여 얻은 複合測地網을 調整하여 標準誤差

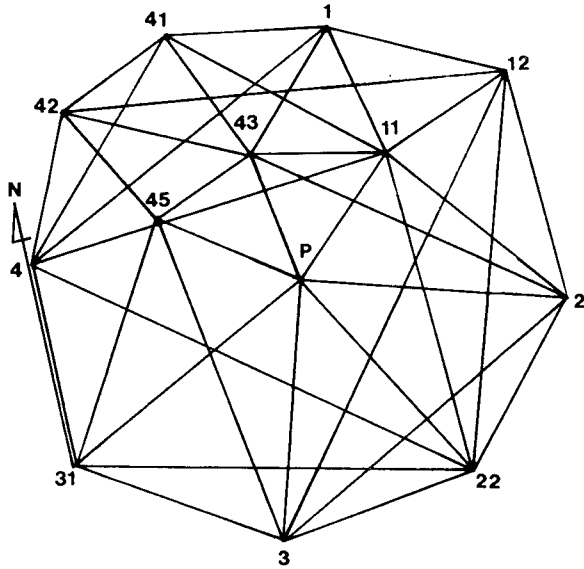


Fig. 9 Geometrical form of plane combination networks

楕圓을 구하므로써 水平位置의 座標값 算出에 따른 信賴領域을 提示하였다.

本 研究에서 開發한 프로그램에 의해 調整된 座標의 標準誤差값을 計算하였고, 여기서 나온 Q Matrix 값으로 誤差楕圓 要素  $t$  와  $S_u, S_v$  를

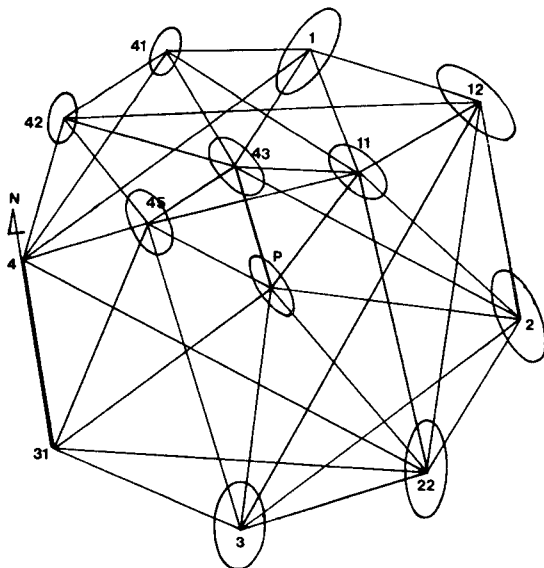


Fig. 10 The error ellipse of each point

計算할 수 있었으며, 이 結果를 <Fig.10>에 나타내었다.

調整結果 單位輕重率에 의한 標準誤差는 0.00117 m로 良好한 값을 얻을 수 있었으며 각각의 점에 대한 計算座標값의 標準誤差가  $\sigma_x=0.00127\sim0.00255$  m,  $\sigma_y=0.00116\sim0.00369$  m로 나타나  $x$ 座標와  $y$ 座標의 標準誤差가 거의 비슷한 크기로 나타났다. 또한 固定點에서 멀어질수록 觀測點의 誤差楕圓 크기가 增加되는 傾向을 나타내고 있으며, 그중 誤差楕圓의 短軸보다는 長軸方向의 크기가 더 큰 폭으로 增加되는 것을 알 수 있었다.

### (3) 過大誤差 檢出

測地網 構成의 基本模型에서 <Fig.11>와 같이 31, 41, 11, 22, 3, P번점을 選定하여 過大誤差檢出 模型을 構成하였으며, 三邊測量에서의 過大誤差檢出을 위해 開發한 프로그램을 사용하여 檢出 및 分析을 하였다.

過大誤差 檢出을 위해서는 우선 有意水準( $\alpha$ )과 檢定域( $\beta_0$ )의 選定이 매우 중요한데 Baarda (1968)는  $\alpha=0.001$ ,  $\beta_0=0.8$ 인 境遇에 棄却값으로 3.29를 使用하였다.

本 研究에서는 過大誤差의 크기에 따른 檢出

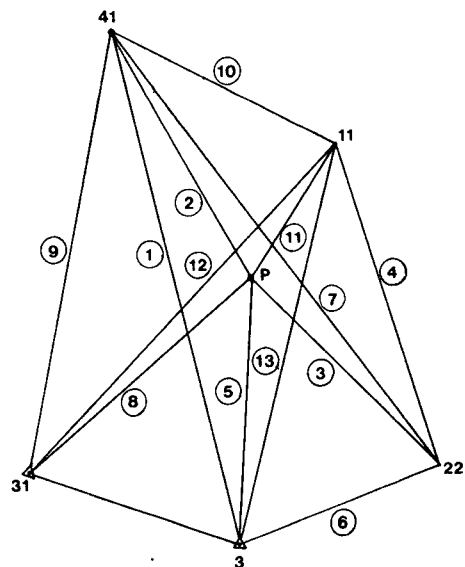


Fig. 11 Model of gross error detection

能力을 把握하기 위해 Forstner<sup>11)</sup>가 提示한 過大誤差 概念을 利用하였다.

Forstner 는 작은 크기의 過大誤差를  $5\sigma \sim 20\sigma$  정도로 考慮하였으므로 本 研究에서는 偶然誤差 (Accidental error) 크기중 99.7%의 確率을 갖는 誤差인  $3\sigma$ 와 過大誤差로 定義되는 誤差範圍에서  $5\sigma$ ,  $10\sigma$ ,  $20\sigma$ 를 選定하였으며, 棄却값도 Baarda가 提案한 3.29를 비롯하여  $3.72(\alpha=0.0001, \beta_0=0.8)$ ,  $3.00(\alpha=0.0027, \beta_0=0.8)$ ,  $2.58(\alpha=0.01, \beta_0=0.80)$ ,  $1.96(\alpha=0.05, \beta_0=0.8)$ 과 Forstner가 提案한 4.123 등 多樣한 棄却값을 選擇하였고, 한 測線에 過大誤差를  $3\sigma$ ,  $5\sigma$ ,  $10\sigma$ ,  $20\sigma$ 로 주었을 境遇 6가지 棄却값에 대한 過大誤差檢出 狀態를 나타내어 보았다.

棄却값이 가장 큰 4.123인 境遇  $10\sigma$ 의 過大誤差를 주었을 境遇에 비로소 過大誤差가 檢出되었으며,  $3\sigma$ ,  $5\sigma$ 의 過大誤差는 檢出되지 않았다. 이와같은 現狀은 3.72, 3.29의 棄却값을 使用한 境遇도 마찬가지였다. 그러나 棄却값이 3.0, 2.58, 1.96인 境遇는  $5\sigma$  이상의 過大誤差를 檢出할 수 있었다. 여기서  $3\sigma$ 는 過大誤差 定義上 가장 작은 값으로써 最小제곱법에 의한 調整過程에서 Masking 效果에 의해 誤差가 다른 觀測값에 傳播되어 나가므로 過大誤差로 檢出되기에는 매우 어려운 特性을 갖고 있다.

本 研究에서는 過大誤差에 대한 標準化殘差값중 棄却값을 超過하는 가장 큰 값을 除去한 후 다시 觀測方程式을 構成하고, 調整을 遂行한 結果 過大誤差가 전혀 없음을 알 수 있었다.

또한 比較的 작은 過大誤差인  $5\sigma$  값에 대해 檢出을 할 때는 지금까지 利用되어온  $3.29(\alpha=0.001, \beta_0=0.8)$ 보다 有意水準( $\alpha$ ) 領域을 조금 크게 하는것이 效果的임을 알 수 있었다.

따라서 過大誤差 檢出에 있어 事前分散값을 觀測模型에 適合하도록 選定해야 하며, 有意水準( $\alpha$ )과 檢定域( $\beta_0$ ) 역시 신중히 選擇되어야 함을 알 수 있었다.

本 研究에서의 結果를 分析해 볼 때 過大誤差 檢出에 있어서 널리 利用되어온 Baarda의 棄却값 3.29보다 多小 작은 크기의 過大誤差를 檢出하기 위해서는 有意水準을 Baarda의 값보다

조금 크게 택하게 되면  $5\sigma$ 의 過大誤差도 檢出 可能함을 알 수 있었다.

## 6. 結 論

本 研究를 통하여 水平位置決定에 따른 正確度 向上을 위하여 測量網에 의한 誤差傳播特性을 分析하였고, 觀測過程에서 發生되는 過大誤差의 檢出을 위해 統計分析을 實施한 結果 다음과 같은 結論을 얻었다.

- (1) 三邊測量에서 Data Snooping 方法에 의한 過大誤差 檢出 프로그램을 開發하였으며, 지금까지 利用되어온 Baarda의 棄却값인  $3.29(\alpha=0.001, \beta_0=0.8)$ 는  $5\sigma$  정도의 작은 過大誤差 檢出에 있어 正確성이 떨어져므로 有意水準을 Baarda의 값보다 조금 크게 選擇하면  $5\sigma$ 의 過大誤差도 檢出할 수 있음을 알게 되었다.
- (2) 三邊測量으로 水平位置를 決定하는 프로그램을 만들어 單列, 四邊, 有心三網에 適用한 結果, 四邊網이 가장 正確도가 優秀함을 알 수 있었으며, 測線의 距離에 따른 誤差傳播式을 誘導하였다.

## 參 考 文 獻

1. James. W. Walker, "Adjustment of Trilateration in the Dimensions", For presentation to the International symposium, in Geometrical Geodesy University of Oxford United Kingdom, 2-8, September, (1973)
2. P. R. Wolf, S. D. Johnson, "Trilateration with short range EDM Equipment and Comparison with Triangulation", Proceeding of A. S. C. M., Fall convension, pp.62-76, (1973)
3. J. Clendinning, Principles and use of Surveying Instruments, Van Nostrand Reinhold Company, pp. 46-82, (1979)
4. Schofield, Engineering Surveying, Newnes-Burrerworths, pp.124-146, (1979)
5. P. Richardus, Project surveying, North-Holland Pub. Co., pp.28-44, (1977)
6. E. M. Mikhail and G. Gracie, "Analysis and Adjustment of Survey Measurements", Van



- Nostrand Reinhold Company, pp. 1-12, pp. 59-105, (1981)
7. B. S. Everitt, and Dunn, "Advanced Methods of Data Exploration and Modelling", Heinemann Educational Books, pp. 143-151, (1983)
  8. R. J. Beckman and R. D. Cook, "Outliers in Statistical Data. Technometrics, Vol. 25, No. 2, pp. 119-163, (1983)
  9. S. F. El-Hiakim and H. Ziemann, "A step-by-step strategy for Gross error Detection", P. E. & R. S., vol. 50, NO. 6, pp. 713-718, (1984)
  10. P. Hottier, "Thorie de Baarda : Detection des Fautes et Fiabilite des Estimations et ses Applications en photogrammetric", S. F. P. T., Bul. No. 84, pp. 5-20, (1981-4)
  11. W. Forstner, "The Reliability of Block Triangulation", P. E. & R. S., vol. 51, No. 6, pp. 1137-1149, (1985)
  12. J. J. Kok, "On Data Snooping and Multiple Outlier Testing", NOAA Technical Report, NOS NGS 30, pp. 1-61, (1984)
  13. L. Gruending, Interaction of Criteria of Accuracy and Realibility an its Implication for the Design of Engineering Survey Control Networks., XVIII Congress, pp. 249-267, (1986)
  14. H. B. Papo. and D. Stelzer, Relative Error Analysis of Geldetic Networks, ASCE, pp. 133-139, (1986)
  15. 藤井陽一郎, 誤差橢圓と信頼橢圓, 日本測量協會 pp. 15-21, (1983)
  16. P. R. Wolf, Adjustment computations, (2/e), P. B. L. Publishing Co, pp. 117-142, pp. 207-222, (1980)