

## 一定 傾斜面에서 摩擦을 考慮한 波浪計算 Calculation of Wave Height due to Shoaling, Refraction and Bottom Friction on a Sloping Beach

徐承男\* · 吳炳哲\*  
Seung Nam Seo\* and Byung Cheol Oh\*

**要 旨 :** 一定 傾斜面 위를 進行하는 波浪이 底面 摩擦에 依해 減衰되는 境遇 波浪 變形을 나타내는 式이 提示되었다. 積分式으로 表示된 波高 推算式은 數值 積分法과 近似式을 利用한 積分法으로 各各 計算되었다. 數值 積分에 依한 結果와 近似式을 利用한 方法의 結果를 여러 入射波에 對해 比較하였고 두 方法은 거의 同 一한 結果를 보이는 것으로 밝혀졌다. 入射角이 커짐에 따라 摩擦 減衰가 增加하며 水深에 대한 波高 變化가 圖示되었다. 直交入射의 境遇 本 波高 推算式으로부터 既存式(Bretschneider and Reid, 1954)을 誘導할 때 附與되어야 할 條件들이 明示되었다.

**Abstract** □ An equation is presented to calculate wave height due to shoaling, refraction and bottom friction. The equation in an integral form is evaluated by two different methods: A numerical method and an analytical method based on approximation. Both methods are used to calculate wave height and show very good agreement between their results. As shown in the figure of wave height variation vs. relative water depth, an increase of incident angle leads to a decrease in wave height. For the case of normal incident wave, the present equation can be reduced, under some assumptions, to the existing equation of Bretschneider and Reid (1954).

### 1. 緒 論

沿岸域의 地形은 매우 複雜할 뿐 아니라 그 形態도 多樣하여 波浪은 地形에 따른 變形도 심하고, 地域的인 差異도 顯著히 나타나게 된다. 이런 複雜한 地形에서 의 波浪 推定에 주로 數值모델이 使用되고 있다. 數值모델은 波浪變形의 要素들을 導出하여 이를 定量化한 式을 利用하여 만들어지므로 數值모델의 波浪再現程度는 定量化 方法에 依해 크게 左右된다. 數值모델의 精密度를 評價하기 爲하여 現場 觀測資料, 既存모델의 結果 또는 單純한 境遇에 存在하는 解析的인 結果와 比較하게 된다. 現場 觀測資料에 對한 檢證은 波浪變形 過程에 對한 理解의 幅을 넓혀주므로 바람직하나 資料 獲得에 많은 時間과 努力이 要求되며 觀測結果를 變形要素에 따라 각기 分離할 수 있는 高度의 技術的인 水準에 이르러야 올바른 分析이 나올 수 있다. 한편, 解析的인 方法은

結果를 導出해 내는데 매우 容易한 反面에 이 方法은 極히 制限된 境遇에만 解가 存在하는 制約이 있다.

波浪 推定時 境界條件으로 다음 두 가지 條件이 많이 使用된다. 첫째로 境界 外側의 水深을 等深線에 平行한 것으로 假定하여 Snell의 式으로 境界에서 的 波浪을 算定하고, 둘째 境遇는 左右 境界의 水深이 같다고 假定하여 週期條件을 附與한다. 一定 傾斜面 위를 進行하는 波浪은 Snell의 式으로 算定되며 摩擦에 依한 減衰를 考慮한 式을 誘導하여 數值모델의 檢證 또는 境界條件에 利用하고자 한다. 摩擦을 考慮한 Snell 式으로는 Putnam and Arthur (1949), Bretschneider and Reid(1954)가 直交入射時의 波高變形을, Nielsen(1983)은 斜角入射에 依한 波高變形을 다루었다. 그러나 Nielsen(1983)의 에너지 保存式 式(2)는 올바른 式이 아님을 밝히고 올바른 式에 依한 波高變形 關係式을 提示하고자 한다.

\*韓國海洋研究所 海洋環境工學研究室(Ocean Environmental Engineering Laboratory, Korea Ocean Research and Development Institute, Ansan P. O. Box 29, 425-600, Korea)

2. 波高算定式

線形波理論에 依한 波에너지 E는 波高 H의 제공에 比例하고 에너지 傳播 速度는 群速度  $C_g$  이므로 任意 斷面 S에서 에너지 減衰  $\epsilon_d$ 를 考慮한 에너지 保存式은 다음과 같다(徐等, 1989).

$$\frac{\partial}{\partial t} \int E ds = - \int E \vec{C}_g \cdot \hat{n} dl - \int \epsilon_d ds \quad (1)$$

여기서

$$E = \rho g H^2 / 8$$

$\epsilon_d$  = 單位面積當 에너지減衰率

$\hat{n}$  = 單位 外向法線 벡터

$ds$  = 微小面積

$dl$  = 微小線分

時間에 따른 에너지 增減이 없다면 式(1)은 다음 式으로 바뀐다.

$$\int E \vec{C}_g \cdot \hat{n} dl = - \int \epsilon_d ds \quad (2)$$

Fig. 1에 圖示된 것과 같이 두 隣接波向線과 이에 直角하는 波峯線 ①과 ②에 둘러싸인 微小面積에 對해 式(2)를 展開하자. 波向線上的 任意點에서 이 線에 對한 直角方向으로의 에너지 流出入이 없다고 假定하면

$$(EC_g l_o \cos \theta)_2 - (EC_g l_o \cos \theta)_1 = - \epsilon_d \Delta S \quad (3)$$

微小面積  $\Delta S$ 는 두 點線과 波向線으로 둘러싸인 面積으로 近似시킬 수 있으므로  $\Delta S \approx l_o \Delta x$ 되며  $\Delta x$ 가 작으면 이 近似에 依한 誤差는 無視할 수 있다. 따라서  $l_o$ 가 常數이므로 式(3)은 다음과 같은 微分 式으로 表示된다.

$$\frac{d}{dx} (EC_g \cos \theta) = - \epsilon_d \quad (4)$$

다른 觀點에서 微小面積  $\Delta S$ 를 求하기 爲하여 波峯線 ①의 距離를 求하면  $l_o \cos \theta_1$ 이 되고 波峯線間的 距離는  $\Delta x / \cos \theta_1$ 이므로 마찬가지로 式(4)가 얻어진다.

에너지 減衰率은 底面剪斷應力  $\tau_b$ 와 底面粒子速度  $u_b$ 을 곱한 時間平均으로 주어진다. 따라서 波峯線間的 微小距離  $dl$ 에 對해 表示된 Nielsen(1983)의 式(2)는 다음과 같이 表示되어야 한다.

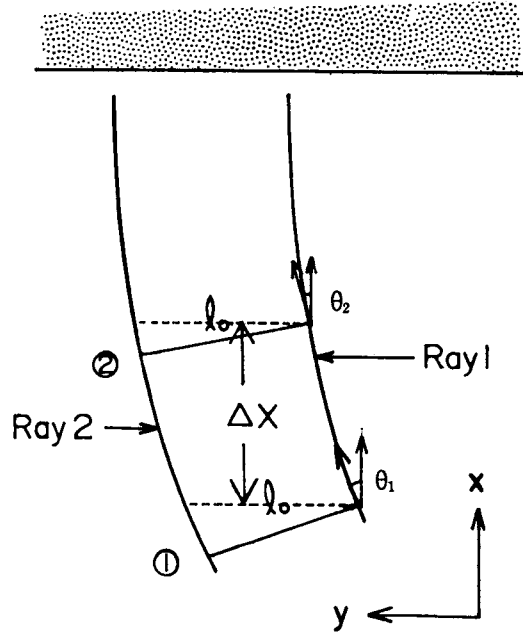


Fig. 1. Definition sketch of energy flux conservation.

$$\frac{d}{dl} (EC_g \cos \theta) = - \tau_b u_b \cos \theta \quad (5)$$

또한 式(5)는 Svendsen and Jonsson(1982)의 論文으로부터 쉽게 誘導될 수도 있다(p. 218의 式(6·4·19)).

波高의 關係式을 誘導하기 爲하여 式(4)에 線形波理論에 立脚한 波高 減衰率을 代入하여 整理하면 다음과 같다.

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\rho g H^2}{8} C_g \cos \theta \right) = - \frac{2}{3\pi} \rho f_w \frac{\sigma^2 H^3}{8 \sin^3 kh} \quad (6)$$

여기서

$f_w$  = 摩擦係數

$\rho$  = 海水密度

$\sigma$  = 角周波數

$g$  = 重力加速度

式(6)을 Bernoulli 微分方程式(Greenberg, 1978)의 形態로 바꾸기 爲하여 變數變換  $\xi = (H^2 C_g \cos \theta)^{1/2}$ 를 導入하면

$$\frac{d\xi}{dx} = \frac{f_w}{3\pi g} \frac{\sigma^3}{\sin^3 kh} \frac{1}{(C_g \cos \theta)^{3/2}} \quad (7)$$

一定傾斜의水深  $h(x) = -mx$ 와 深海波速  $C_0 = \sigma/k_0 = gT/2\pi$ 을 써서 式(7)을  $x_i$ 에서  $x_{i+1}$ 까지 積分하면

$$\xi_{i+1} = \xi_i + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{f_w}{3\pi} \frac{k_0 \sigma}{\sinh^3 kh} \frac{1}{(C_g \cos \theta)^{3/2}} dx \quad (8)$$

여기서  $x_i$ 는  $i$  번째의 格子點을 意味한다. 式(8)의 積分은 解析的으로 求할 수 없으므로 數值積分이나 被積分函數를 近似式으로 表示한 後 이를 積分하여 求한다. 數值積分 方法은 Bretschneider와 Reid (1954)에 依해, 近似式 法은 Nielsen(1982, 1983)에 依해 使用되었고 本 研究에서는 두 方法을 各各 適用하여 結果를 比較하기로 한다.

### 3. 數值積分法

一定傾斜,  $m$ , 의 水深을 갖는 單調로운 地形이라든 波數  $k$ 를  $x$ 에 對한 陽函數로 表示할 수 없으므로 式(8)의 積分을 數值法으로 求한다. 우선, 式(8)을 波高  $H$ 에 對한 式으로 나타내면

$$H_{i+1} = H_i \sqrt{\frac{(C_g \cos \theta)_i}{(C_g \cos \theta)_{i+1}}} \times \left[ 1 + H_i \sqrt{\frac{8\pi^2 f_w}{3g(C_g \cos \theta)_i}} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{dx}{g(C_g \cos \theta)^{3/2} \sinh^3 kh T^3} \right]^{-1} \quad (9)$$

여기서 添子는 格子點에서 計算된 값을 意味한다. 直交入射의 境遇, 屈折이 일어나지 않으므로  $\cos \theta$  項은 1의 값을 가지며 深海 群速度  $C_{g0} = gT/4\pi$ 를 式(9)에 代入하고 積分을  $x_i$ 에서 計算된 被積分函數 값에 格子距離  $\Delta x$ 를 곱한 값으로 近似시키면

$$H_{i+1} = H_i \sqrt{\frac{C_{gi}}{C_{gi+1}}} \left[ 1 + H_i \frac{32\pi^3 f_w C_{g0}}{3g^2 C_{gi}} \frac{\Delta x}{T^4 (\sinh^3 kh)_i} \right]^{-1} \quad (10)$$

群速度의  $C_w/C_{w-1}$ 를 1로 近似시키고 淺水係數  $K^2 = C_{g0}/C_w$ 와 底面剪斷應力을  $\tau = \rho f u^2$ 으로 表示하면 Bretschneider와 Reid(1954) 式이 얻어진다. 斜角

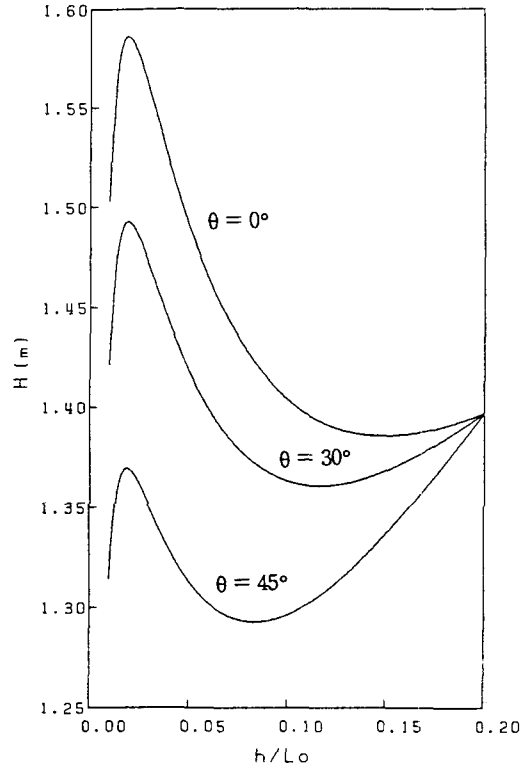


Fig. 2. Wave height variation due to shoaling, refraction and bottom friction for different incident angles.

入射의 境遇, 波向은 Snell 式  $(\sin \theta)_{i+1} = (k \sin \theta)_i / k_{i+1}$ 로부터 計算되고 式(9)의 被積分 函數를  $F$ 로 놓고 trapezoidal 積分法을 쓰면 積分은  $\Delta x(F_i + F_{i+1})/2$ 로 된다. 式(9)의 오른쪽 式에서  $H$ 를 除外한 모든 값을 任意 格子點에서 求할 수 있으나,  $H_{i+1}$ 은  $H_i$ 에 依해 段階的으로 計算된다. 따라서, 式(9)는 段階的 計算法을 使用하는 波浪모델의 境界條件 計算에 매우 有用한 式임을 알 수 있다.

Fig. 2는 앞에서 言及한 trapezoidal 積分法으로 式(9)를 計算한 結果를 나타낸 것이다. 이 때 使用된 底面傾斜  $m = 1/300$ 이고,  $h/L_0 = 0.2$  일때 波高  $H = 1.397$  m로 주어졌다. 뒤에 提示된 Table 3에서 알 수 있듯이, 直交入射의 結果는 既存 結果와 거의 一致하며, 射角入射의 結果는 初期 入射角이 커짐에 따라 摩擦減衰가 뚜렷히 나타남을 알 수 있다. Nielsen(1983)도 入射角이 커짐에 따라 摩擦減衰가 增加하는 結果를 얻었으나, 올바른 에너지 保存式이 使用되지 않았으므로 定量的인 값은 本 研究의

結果와 다르다. Fig. 2로부터 摩擦減衰 効果는 入射角에 敏感하다는 것을 알 수 있으며, 이는 두 個의 주어진 水深사이의 波浪進行經路가 入射角에 따라 다르기 때문이다.

### 4. 近似式法

第2節 式(8)의 被積分函數를 解析的으로 積分可能한 函數로 近似시킨 後 積分하는 方法이 Nielsen(1982, 1983)에 依해 提示되었다. 本 研究에서도 Nielsen이 提示한 方法을 使用하여 式(8)의 漸近近似式을 誘導하였다. 式(8)에  $k_0 h = -k_0 m x$ 를 代入하여 整理하고 添子를 바꾸어 表示하면

$$\xi_2 = \xi_1 - \frac{f_w k_0}{3\pi m \sqrt{C_0}} I \quad (11)$$

$$I = \int_{k_0 h_1}^{k_0 h_2} \frac{C_0^{1.5} (\cos \theta)^{1.5}}{C_g^{1.5} \sinh^3 kh} d(k_0 h) \quad (12)$$

를 얻는다.  $k_0 h \ll 1$ 인 境遇에는 被積分函數를  $k_0 h$ 에 對한 級數로 展開하여 式(12)의 近似積分을 求하여도 이로 인한 誤差는 無視할 수 있을 程度로 작다. 그러나 式(12)의 被積分函數는  $kh$ 의 函數로 表現되어 있으므로 먼저  $kh$ 를  $k_0 h$ 로 나타내어야 하며, 이는 分散關係式으로부터 可能하다. Hunt (1979)는 分散關係式을 Padé form으로 展開하였으나 分數式으로 表示되어 解析的인 積分이 어렵기 때문에 本 研究의 目的에 適合하지 않다. 한편 Nielsen(1982)과 Wu and Thornton(1986)은  $kh$ 를  $k_0 h$ 의 級數로 展開하는 式을 誘導하였으며 各各 다음과 같다.

$$kh = \sqrt{k_0 h} \left\{ 1 + \frac{1}{6} k_0 h + \frac{11}{360} (k_0 h)^2 + \frac{17}{5040} (k_0 h)^3 + \dots \right\} \quad (13)$$

$$kh \cong \sqrt{k_0 h} \left\{ 1 + \frac{1}{6} k_0 h + \frac{1}{30} (k_0 h)^2 \right\} \quad (14)$$

Table 1은 式(13)과 式(14)에 依한 波數計算의 結果를 보여준다. 近似計算은 second order項까지만 計算하였다. "Newton"은 Newton의 反復法으로 求한 解이며 最大絶對誤差는  $10^{-6}$ 이다. Table 1에서 보는 바와 같이 式(13)과 式(14)는  $k_0 h$ 가 작은 境遇 相對誤差는 0.05% 이내이므로, 實用的인 計算에는

Table 1. Comparisons of wave number calculations

$k_0 h$	kh				
	Newton	Wu	err (%)	Nielsen	err (%)
0.005	0.07077	0.07077	0.00	0.07077	0.00
0.01	0.10017	0.10017	0.00	0.10017	0.00
0.02	0.14189	0.14189	0.00	0.14189	0.00
0.05	0.22549	0.22549	0.00	0.22549	0.00
0.1	0.32160	0.32160	0.00	0.32159	0.00
0.2	0.46268	0.46272	0.01	0.46267	0.00
0.5	0.77170	0.77192	0.03	0.77143	0.03
0.8	1.03242	1.03277	0.03	1.03118	0.12
1.0	1.19968	1.20000	0.03	1.19722	0.20
1.2	1.36680	1.36712	0.02	1.36273	0.30

어는 것이나 充分하다고 생각된다.

그러나 本 研究에서는 보다 精度가 높은 Wu and Thornton(1986)의 式을 使用하여 式(12)의 漸近近似解를 誘導하였다. 式(14)로부터 다음式을 얻는다.

$$\tanh kh = \sqrt{k_0 h} \left\{ 1 - \frac{1}{6} k_0 h + O(k_0 h)^3 \right\} \quad (15)$$

$$\sinh kh = \sqrt{k_0 h} \left\{ 1 + \frac{1}{3} k_0 h + \frac{1}{8} (k_0 h)^2 + O(k_0 h)^3 \right\} \quad (16)$$

$$C_g / C_0 = \sqrt{k_0 h} \left\{ 1 - \frac{1}{2} k_0 h + \frac{1}{10} (k_0 h)^2 + O(k_0 h)^3 \right\} \quad (17)$$

여기서  $C_0$ 는 深海波의 波速이다. 한편  $(\cos \theta)^{1.5}$ 를 計算하기 爲하여 三角等式

$$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta \quad (18)$$

를 利用한다. 여기서 入射波에 對한 값을 添字  $i$ 로 表示하면,  $\sin \theta$ 는 Snell의 屈折法則으로부터

$$\sin \theta = \frac{k_i}{k} \sin \theta_i = \frac{C}{C_i} \sin \theta_i \quad (19)$$

이므로

$$\cos^2 \theta = 1 - \left( \frac{C}{C_i} \right)^2 \sin^2 \theta_i \quad (20)$$

이다. 또한  $C/C_i = \tanh(kh)$ , 이므로 式(15)로부터

$$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta_i \frac{k_0 h (1 - \frac{1}{6} k_0 h)^2}{k_0 h_i (1 - \frac{1}{6} k_0 h_i)^2} \quad (21)$$

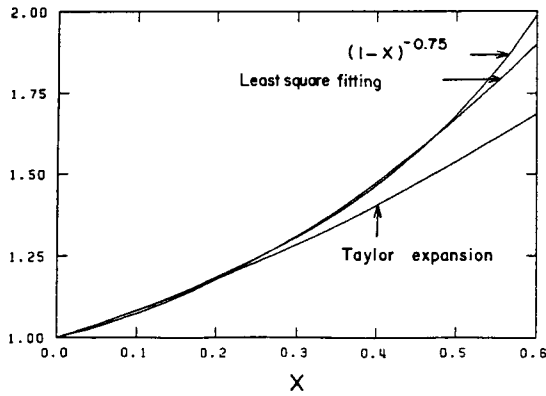


Fig. 3. The least square fit and Taylor expansion for  $(1-x)^{-0.75}$ .

이다. 따라서

$$\cos^{-1.5}\theta = 1 + \delta k_o h + \mu (k_o h)^2 \quad (22)$$

로 表示할 수 있으며

$$\delta = \frac{0.57 \sin^2 \theta_i}{k_o h_i (1 - \frac{1}{3} k_o h_i)} \quad (23)$$

$$\mu = \frac{1.55 \sin^4 \theta_i}{(k_o h_i)^2} - \frac{1}{3} \delta \quad (24)$$

로 된다. 式(22)의 計算에는

$$(1-x)^{-0.75} \approx 1 + 0.57x + 1.55x^2 \quad (25)$$

이 利用되었다. 式(25)는 最小自乘法으로 誘導된 式이며 Taylor 展開는

$$(1-x)^{-0.75} = 1 + \frac{3}{4}x + \frac{21}{32}x^2 + \dots \quad (26)$$

이나, Fig. 3에서 보는 바와 같이  $0 \leq x \leq 0.5$ 의 區間에서는 式(25)가 式(26)보다 原式에 더 近似

함을 알 수 있다. 式(16), 式(17), 式(22)를 式(12)에 代入하여 積分하면 다음式을 얻는다.

$$I = \frac{4}{5} (h_o h_1)^{-1.25} \left[ 1 - \left( \frac{h_1}{h_2} \right)^{1.25} \right] + (1-4\delta) (k_o h_1)^{-0.25} \left[ \left( \frac{h_1}{h_2} \right)^{0.25} - 1 \right] + \left( \frac{4}{3}\mu - \frac{\delta}{3} - \frac{67}{360} \right) (k_o h)^{0.75} \left[ \left( \frac{h_1}{h_2} \right)^{-0.75} - 1 \right] \quad (27)$$

한편 式(11)을 波高에 對한 式으로 나타내면

$$H_2 = H_1 \sqrt{\frac{C_{s1} \cos \theta_1}{C_{s2} \cos \theta_2}} \left( 1 - \frac{f_w k_o}{3\pi m} H_1 \sqrt{\frac{C_{s1} \cos \theta_1}{C_o}} \right)^{-1} \quad (28)$$

로 된다. 따라서 入射條件이 決定되면 Snell 法則으로부터  $\theta_2$ 가 求해지고, 式(27)로부터 I가 求해지므로 式(28)에 依하여 波高를 計算할 수 있다.

Table 2는 式(8)과 式(28)에 依한 解를 보여준다. "Numer"는 式(8)을 數值解法으로 求한 것이며, "Appr"은 式(28)에 依한 解를 나타낸다. 이 Table에서 보는 바와 같이 式(28)에 依한 解는 式(8)에 依한 解와 거의 一致함을 알 수 있으며, 入射角이 커질수록 誤差가 커지는 것을 알 수 있다. 이는 式(25) 및 Fig. 3에서 알 수 있듯이 入射角이 커지면 式(25)의 近似計算에 큰 誤差가 생기기 때문이다. 그러나 實際 計算에서 이러한 誤差의 크기는 無視할 수 있는 程度이므로 式(27)과 式(28)로부터 波浪變形 모델의 境界條件을 求하여도 큰 問題가 없을 것으로 思料된다.

Table 3은 Nielsen(1983)의 近似式과 本 研究

Table 2. Comparisons of numerical and approximate results

h/Lo	$\theta_i = 0.0$		$\theta_i = 30.0$		$\theta_i = 45.0$		$\theta_i = 60.0$	
	Numer	Appr	Numer	Appr	Numer	Appr	Numer	Appr
0.20	1.3970	1.3970	1.3970	1.3970	1.3970	1.3970	1.3970	1.3970
0.15	1.3857	1.3858	1.3681	1.3680	1.3360	1.3355	1.2583	1.2581
0.10	1.4038	1.4039	1.3630	1.3630	1.2964	1.2959	1.1633	1.1634
0.05	1.4917	1.4918	1.4186	1.4190	1.3133	1.3135	1.1361	1.3174
0.01	1.5029	1.5038	1.4211	1.4240	1.3141	1.3180	1.1498	1.1550
rms error	0.0001		0.0007		0.0009		0.0014	

**Table 3.** Comparisons of Nielsen's and present results

h/Lo	$\theta_i=0.0$		$\theta_i=30.0$		$\theta_i=45.0$		$\theta_i=60.0$	
	Nielsen	Present	Nielsen	Present	Nielsen	Present	Nielsen	Present
0.20	1.3970	1.3970	1.3970	1.3970	1.3970	1.3970	1.3970	1.3970
0.15	1.3857	1.3858	1.3681	1.3680	1.3360	1.3355	1.2583	1.3581
0.10	1.4038	1.4039	1.3630	1.3630	1.2964	1.2959	1.1633	1.1634
0.05	1.4917	1.4918	1.4186	1.4190	1.3133	1.3135	1.1361	1.1374
0.01	1.5029	1.5038	1.4211	1.4240	1.3141	1.3180	1.1498	1.1550

에서 導出된 近似式에 依한 波高變化의 入射角에 따른 變化를 나타낸다. 앞서 言及한 바와 같이 Nielsen 식은 잘못된 式이며, 이에 依한 波高減衰는 本 研究에서 提示된 式에 依한 것보다 顯著하게 나타남을 알 수 있다. Table 3에서 直交入射의 境遇 두 方法에 依한 값이 差異가 생기는 理由는 式(12)의 積分計算에서 被積分函數의 近似展開에 利用된 式(13)과 式(14)의 差異에 基因한다.

### 5. 結 論

波浪 變形에 對한 數值모델의 檢證 또는 數值모델의 境界條件 計算을 目的으로 一定傾斜面 위를 進行하는 波浪이 底面 摩擦에 依해 減衰될 때 波浪의 變化를 나타내는데 式이 提示되었다. 波高를 計算하기 爲해 Nielsen(1983)이 使用한 에너지 保存式이 不適合함을 指摘하였고 올바른 에너지 保存式이 再誘導되었다. 이로부터 波高의 式을 나타내기 爲해 Bernoulli 微分方程式의 形態로 에너지 保存式을 變換시켰다. 이 微分方程式을 積分한 積分式을 包含한 波高 計算式이 誘導되었고 積分式을 計算하기 爲해 數值積分法과 近似式을 利用한 方法이 各各 使用되었다.

數值積分法은 trapezoidal 積分法을 使用하였으며 直交入射의 境遇 既存式으로 이끌어내기 爲해 本 波高計算式에 附與되어야 할 條件들이 明示되었다. 近似式을 利用한 方法은 Nielsen(1983)이 提示한 方法을 使用하여 被積分函數를 解析의으로 積分 가능한 形態로 바꾸는 方法이 使用되었다.

數值積分의 方法과 近似式의 方法을 여러 가지의 入射角에 對해 計算하여 그 結果를 比較하였고, 두 方法의 結果들이 거의 一致하는 것으로 나타났다. 摩擦減衰는 入射角에 對해 敏感하게 變하며 入射

角이 커지면 減衰도 增加하는 것으로 나타났다.

本 數值積分法은 計算이 比較的 簡單하고, 適用의 幅도 넓기 때문에 數值모델의 境界條件 計算 및 數值모델의 檢證에 有用하게 使用될 수 있다.

### 謝 辭

本 研究는 科學技術處 特定研究事業의 一環으로 이루어졌다.

### 參考文獻

徐承男, 吳炳哲, 姜始桓, 1989. 屈折에 依한 淺海波 算定法, 韓國海岸·海洋工學會誌, 第1卷 第1號: 15-21.

Bretschneider, C.L. and Reid, R.O., 1954. Modification of wave height due to bottom friction, percolation, and refraction, U.S. Army Corps Eng., Beach Erosion Board Tech. Memo., No. 45.

Greenberg, M.D., 1978. Foundations of applied mathematics, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J.

Hunt, J.N., 1979. Direct solution of wave dispersion equation, *J. Waterway, Port, Coastal and Ocean Div.*, ASCE, Vol. 105, No. WW4: 457-459.

Nielsen, P., 1982. Explicit formulae for practical wave calculations, *Coastal Eng.*, Vol. 6: 389-398.

Nielsen, P., 1983. Analytical determination of nearshore wave height variation due to refraction shoaling and friction, *Coastal Eng.*, Vol. 7: 233-251.

Putnam, J.A. and Arthur, R.S., 1949. Diffraction of water waves by breakwaters, *Trans. Am. Geophys. Union*, Vol. 29, No. 4: 481-490.

Svendsen, I.A. and Jonsson, I.G., 1982. Hydrodynamics of coastal regions, Tech. Univ. of Denmark.

Wu, C.S. and Thornton, E.B., 1986. Wave numbers of linear progressive waves, *J. Waterway, Port, Coastal and Ocean Eng.*, ASCE, Vol. 112, No. 4: 536-540.