韓國海岸・海洋工學會誌
第2巻 第3號, pp. 119~127, 1990年 9月

波向스펙트럼 推定法의 比較 研究
A Comparative Study on the Methods Estimating Wave Directional Spectrum

吳炳哲*・沈載卨*
Byung Cheol Oh*, Jae Seol Shim*

要　旨：不規則 波浪의 波向스펙트럼 推定法에 대하여 考察하였다. 波向스펙트럼 推定理論의 根幹은 Longuet-Higgins *et al.*(1963)이 提示한 方法으로 現在 많이 利用되고 있으나 推定精度가 매우 낮은 것으로 나타났다. 그리고 波向스펙트럼을 [0, 2π]에서의 確率密度函数로 看做하고 Entropy 法則을 應用한 Kobune *et al.*(1986)의 最大 엔트로피법(MEM)은 Longuet-Higgins *et al.*의 방법(LHM)에 比해 波向의 分解能이 매우 좋은 것으로 나타났다. 특히 MEM은 波向스펙트럼이 Delta 函数인 境遇에는 그 波向스펙트럼을 正確하게 推定하며, 單峯形 스펙트럼의 境遇에도 Mitsuyasu의 方向分散係数(spreading coefficient)가 5 以上이면 精度가 매우 좋은 것으로 나타났다. 또한, 雙峯形 波向스펙트럼의 境遇에는 두 peak를 이루는 波向의 角度差가 클수록 分解能이 良好하며, peak의 尖鋭度(peakedness)가 큰 쪽이 平滑化(smoothing)되어 이 部分의 에너지 一部가 尖鋭度가 작은 peak쪽으로 移動하는 것을 알 수 있었다. 한편 LHM은 雙峯形의 境遇에도 單峯形으로 推定하는 傾向이 뚜렷하며, 計算時間이 빠른 點을 除外하면 MEM에 比해 分解能이 매우 뒤떨어지는 方法이라 할 수 있다.

Abstract□Wave directional spectrum estimation methods for irregular waves were considered in this study. Until now, the Longuet-Higgins Method (LHM) initiated by Longuet-Higgins *et al.* (1963) has been widely used, but resolutions of the estimation were found to be low.

Kobune's Maximum Entropy Method (MEM) for the estimation of wave directional spectrum, based on the entropy principle showed higher resolutions comparing with the LHM. If the wave directional spectrum is of Delta functions, the MEM is exact in its estimation. It was also found that for a unimodal spectrum, if the Mitsuyasu's spreading coefficient is above 5, the estimation resolutions were high. In bimodal spectrum, as the angle difference between the two peaks increased, the resolution improved. The energy seems to transfer to the smoother peak in the smoothing of peak's peakedness. LHM has a tendency to estimate bimodal spectrum as a unimodal spectrum; thus, except for its computational speed, the resolution of LHM falls far below that of MEM.

1. 序　論

波浪의 諸元은 沿岸構造物 設計, 沿岸浸蝕 防止対策 등 諸般 沿岸工學的 問題의 解決에 있어서 매우 重要한 要素이다. 過去에는 波浪의 特性을 有義波 概念에 의한 單純波로 나타내었으나, 그 後 観測技術, 分析技術의 發達과 더불어 波浪의 에너지를 周波數의 函数로 表現하는 周波数스펙트럼 概念이 使用되어 왔다. 그러나 海洋에서 發生되는 波浪은 매우 不規則한 自然現象으로 方向性에 대한 知識없이 波浪을 正確히 表現한다는 것은 사실상 不可能하다. 이에 따라 波浪에너지의 分布를 周波数와 波向의 函数로 나타내는 波向스펙트럼의 概念이 導入되어 現在 이에 대한 많은 研究가 進行되고 있다.

Longuet-Higgins *et al.*(1963)은 名 周波数帶에서의 波向스펙트럼을 波向에 대한 Fourier 級數로 展開하여 求하였으며, 이 方法은 波向스펙트럼 推定理論의 基本理念을 提示하고 있다. Panicker and Borgman

*韓國海洋研究所 海洋環境工學研究室(Ocean Environmental Engineering Laboratory, Korea Ocean Research and Development Institute, Ansan P.O. Box 29, 425-600, Korea)

(1974)은 Longuet-Higgins *et al.* 方法(LHM)을 擴張하여 實驗室의 水槽, 遠海에서 伝播되어 온 너울이 優勢한 海域의 波浪에 適用할 수 있는 方法(locked phase analysis)과 風波에 의해 支配되는 海域에 適用할 수 있는 方法(random phase analysis)을 紹介하였다.

Isobe *et al.*(1984)은 Capon(1969)의 maximum likelihood method(MLM)을 水面變動 以外의 波動量 즉 水面勾配, 水粒子 速度 등에도 適用할 수 있도록 拡張 하였으며, Kobune *et al.*(1986)은 波浪의 方向分布函数를 $[0, 2\pi]$에서 定義되는 確率密度函数로 看做하고 情報엔트로피의 概念을 導入하여 分解能이 優秀한 波向推定法을 紹介하였다(maximum entropy method : MEM).

本 研究에서는 LHM과 MEM의 方向分解能을 比較分析 하였다. 특히 MEM은 Delta 函數로 表現되는 方向分析函数에 대하여는 原 分布函数를 그대로 再現한다는 것이 밝혀졌다.

2. 波向스펙트럼 推定의 基本理論

波浪의 波向스펙트럼은 다음 식으로 定義되는 波数・周波数 스펙트럼(wave number・frequency spectrum)으로부터 計算될 수 있다(Davis와 Regier, 1977).

$$S(\vec{k},\sigma)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\vec{\xi}}\int_{\tau}C(\vec{\xi},\tau)e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{\xi}-\sigma\tau)}\,d\tau\, d\vec{\xi} \qquad (1)$$

여기서 $\vec{k}$는 波数, σ는 角周波數, C는 共分散(covariance)이다. 즉

$$C(\vec{\xi},\tau)=E[\eta(\vec{x},t)\eta(\vec{x}+\vec{\xi},t+\tau)] \qquad (2)$$

이며 η는 水面變動이고 E[・]는 ensemble average를 意味한다. 따라서 波数・周波数 스펙트럼을 계산하기 위해서는 共分散函數의 計算이 先行되어야 한다. 共分散函数는 time과 space lag의 函数이므로 特定한 한 點에서의 時系列資料 만으로는 구할 수 없으며, 여러 地點에서 波動量을 観測하여야 共分散函数를 計算할 수 있다. 이러한 方法은 地震學者들이 地震波의 方向을 推定하기 위하여 使用하였으며(예를들면 Capon *et al.*, 1967), 観測計器의 合理的 配置에 관하여는 Haubrich(1968)의 研究가 있다. 그러나 海上은 陸上과는 달리 여러 點에서 波動量을 同時 觀測하는 일이 容易하지 않으며 経費도 많이 所要된다. 따라서 特定한 한 點에서 水面變動 外에 波浪의 方向에 關한 情報를 갖고 있는 여러 波動量(예를들면 水面勾配, 水面曲率, 水粒子速度, 加速度 등)을 同時 観測하여 波向스펙트럼을 推定하는 것이 바람직하다.

波向스펙트럼이 주어진 境遇, $\vec{x}=\vec{0}$에서의 水面變動은 다음의 擬似積分(pseudo-integral)으로 나타낼 수 있다.

$$\eta(t)=\int_{\sigma}\int_{\vec{k}}e^{-i(\sigma t-\varepsilon)}\sqrt{2S(\vec{k},\sigma)\,d\vec{k}\,d\sigma} \qquad (3)$$

여기서 ε은 random phase이다.

한편, 水面變動 이외의 波動量은 伝達函数(transfer function) H를 使用하여

$$\xi(t)=\int_{\sigma}\int_{\vec{k}}H(\vec{k},\sigma)e^{-i(\sigma t-\varepsilon)}\sqrt{2S(\vec{k},\sigma)\,d\vec{k}\,d\sigma} \qquad (4)$$

로 表示할 수 있으며,

$$H(\vec{k},\sigma)=H(f)\cos^{\alpha}\theta\,\sin^{\beta}\theta \qquad (5)$$

이다. 線形波 理論에 의한 H(f), α, β 등은 Table 1에 收錄되어 있다. 한 點에 觀測한 두 波動量을 名名 ξ_i, ξ_j라 놓고 ξ_i와 ξ_j의 cross 스펙트럼 $\Phi_{ij}(\sigma)$를 구하면

$$\Phi_{ij}(\sigma)=\int_{\vec{k}}H_i(\vec{k},\sigma)H_j^*(\vec{k},\sigma)S(\vec{k},\sigma)\,d\vec{k} \qquad (6)$$

로 된다. 여기서 *는 켤레複素数를 나타낸다. 식 (6)에 식 (5)를 代入하고, Jacobian을 利用하여 変数를 $(\vec{k}, \sigma)$에서 (f, θ)로 變換하고 整理하면 다음과 같다.

$$\frac{2\phi_{ij}(f)}{H_i(f)H_j^*(f)S(f)}=\int_0^{2\pi}G(\theta\,|\,f)(\cos\theta)^{\alpha_i+\alpha_j}(\sin\theta)^{\beta_i+\beta_j}\,d\theta \qquad (7)$$

여기서, $\phi_{ij}(f)$ = two-sided cross spectrum
H(f) = transfer function
S(f) = one-sided heave spectrum
G(θ | f) = directional spectrum
α, β = constants determined by wave properties

또한 식 (7)은 α_i와 β_i가 陰이 아닌 整数이므로 Table

Table 1. Transfer functions from linear wave theory

Measured quantity	Symbol	$H(\vec{k}, \sigma)$	$H(f)$	α	β
Water surface elevation	η	1	1	0	0
Excess pressure	P	$\rho g \frac{\cosh kz}{\cosh kh}$	$\rho g \frac{\cosh kz}{\cosh kh}$	0	0
Vertical water surface velocity	η_t	$-i\sigma$	$-i\sigma$	0	0
Vertical water surface acceleration	η_{tt}	$-\sigma^2$	$-\sigma^2$	0	0
Surface slope(x)	η_x	$ik\ \cos\theta$	ik	1	0
Surface slope(y)	η_y	$ik\ \sin\theta$	ik	0	1
Surface curvature(x)	η_{xx}	$-k^2\ \cos^2\theta$	$-k^2$	2	0
Surface curvature(y)	η_{yy}	$-k^2\ \sin^2\theta$	$-k^2$	0	2
〃 (xy)	η_{xy}	$-k^2\ \cos\theta\ \sin\theta$	$-k^2$	1	1
Water particle velocity(x-direc.)	u	$\sigma\cos\theta\frac{\cosh kz}{\sinh kh}$	$\sigma\frac{\cosh kz}{\sinh kh}$	1	0
〃 (y-direc.)	v	$\sigma\sin\theta\frac{\cosh kz}{\sinh kh}$	$\sigma\frac{\cosh kz}{\sinh kh}$	0	1
〃 (z-direc.)	w	$-i\sigma\frac{\sinh kz}{\sinh kh}$	$-i\sigma\frac{\sinh kz}{\sinh kh}$	0	0
Water particle acceleration (x-direc.)	u_t	$-i\sigma^2\cos\theta\frac{\cosh kz}{\sinh kh}$	$-i\sigma^2\frac{\cosh kz}{\sinh kh}$	1	0
〃 (y-dire.)	v_t	$-i\sigma^2\sin\theta\frac{\cosh kz}{\sinh kh}$	$-i\sigma^2\frac{\mathrm{conh}\ kz}{\sinh kh}$	0	1
〃 (z-dire.)	w_t	$-\sigma^2\frac{\sinh kz}{\sinh kh}$	$-\sigma^2\frac{\sinh kz}{\sinh kh}$	0	0

f : frequency, $\sigma=2\pi f$: angular frequency, k : wave number, θ : wave direction, h : water depth, z : elevation from the bottom, ρ : fluid density, g : gravitational acceleration.

1에서 適當한 組合을 取하면 다음과 같은 形態로 쓸 수 있다.

$$\int_0^{2\pi} G(\theta\,|\,f)\,l_i(\theta)\,d\theta = m_i,\quad i=0,1,2,3,4 \qquad (8)$$

여기서, $l_0(\theta)=1$

$$l_1(\theta)=\cos\theta$$
$$l_2(\theta)=\sin\theta \qquad (9)$$
$$l_3(\theta)=\cos 2\theta$$
$$l_4(\theta)=\sin 2\theta$$

觀測 波動量이 水面變動(η), 水面勾配(η_x, η_y)인 境遇에 m_i는 다음 식으로 구하여 진다.

$$
\begin{aligned}
m_0 &= 1 \\
m_1 &= \frac{Q_{12}(f)}{kC_{11}(f)} \\
m_2 &= \frac{Q_{13}(f)}{kC_{11}(f)} \\
m_3 &= \frac{C_{22}(f)-C_{33}(f)}{k^2C_{11}(f)} \\
m_4 &= \frac{2C_{23}(f)}{k^2C_{11}(f)}
\end{aligned} \tag{10}
$$

여기서, k는 波数(wave number)로 分散關係式으로부터 구해지며, $C_{ij}(f)$와 $Q_{ij}(f)$는 $(\eta, \eta_x, \eta_y)=(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$로 表示할 境遇 각각 co-spectrum과 quad-spectrum을 나타낸다. 그리고 觀測 波動量이 壓力(P), 水平流速(U, V)인 境遇에는 식 (8)의 m_i가 다음 식으로 計算된다.

$$
\begin{aligned}
m_0 &= 1 \\
m_1 &= \frac{K_pC_{12}(f)}{K_uC_{11}(f)} \\
m_2 &= \frac{K_pC_{13}(f)}{K_uC_{11}(f)} \\
m_3 &= \frac{K_p^2[C_{22}(f)-C_{33}(f)]}{K_u^2C_{11}(f)} \\
m_4 &= \frac{2K_p^2C_{23}(f)}{K_u^2C_{11}(f)}
\end{aligned} \tag{11}
$$

여기서, $(P, U, V)=(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$이며, K_p, K_u는 각각 壓力과 流速의 應答係数로 다음 식으로 計算된다.

$$K_p=\frac{\cosh kd_p}{\cosh kh} \tag{12}$$

$$K_u=\frac{\cosh kd_u}{\sinh kh} \tag{13}$$

여기서, h=water depth

d_p=distance between pressure sensor and sea bed

d_u=distance between velocity sensor and sea bed

2.1 LHM의 推定式

Longuet-Higgins *et al.*(1963)은 波向스펙트럼을 Fourier series로 展開하여 처음 5개 項으로 나타내었다. 이 때 項의 切斷(truncation)에 의하여 推定스펙트럼은 原 스펙트럼을 window, $\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\sin\frac{5\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$, 와 convolution한 結果가 된다. 그러나 이 window는 陰의 領域을 갖고 있으므로 推定스펙트럼에도 陰의 領域(negative lobes)이 나타날 수 있다. 이를 除去하기 위하여 Longuet-Higgins *et al.*(1963)은 陽의 加重函数(weighted function) $\frac{4}{3\pi}\cos^4\frac{\theta}{2}$ 로 推定스펙트럼을 convolution하였다. 여러 harmonic에 대한 加重係数는 Panicker and Borgman(1974)에 의하여 計算되었다.

LHM에 의한 波向스펙트럼 推定式은 다음과 같다.

$$\hat{G}(\theta\,|\,f)=\frac{1}{2\pi}\{1+2m_1\cos\theta+2m_2\sin\theta +2m_3\cos 2\theta+2m_4\sin 2\theta\} \tag{14}$$

$$\hat{G}(\theta\,|\,f)=\frac{1}{2\pi}\{1+\frac{4}{3}(m_1\cos\theta+m_2\sin\theta) +\frac{1}{3}(m_3\cos 2\theta+m_4\sin 2\theta)\} \tag{15}$$

여기서 m_i는 식 (10)과 식 (11)로부터 구해진다. 식 (14)는 negative lobe를 除去하지 않은 식이며, 식 (15)는 negative lobe를 除去한 식을 나타내고 있다.

2.2 MEM의 推定式

주어진 確率密度函数 $G(\theta\,|\,f)$에 대한 情報엔트로피는 다음 식으로 주어진다.(寒川 等, 1983 ; Kobune *et al.*, 1986).

$$E=\int_0^{2\pi}G(\theta\,|\,f)\ln\frac{1}{G(\theta\,|\,f)}\,d\theta \tag{16}$$

식 (8)의 制約條件을 滿足시키면서 同時에 식 (16)을 最大로 하는 $G(\theta\,|\,f)$를 Lagrangian multiplier와 變分法(variational method)의 Euler 公式을 使用하여 推定하면 다음 식을 얻는다(Wylie, 1975).

$$\hat{G}(\theta\,|\,f)=e^{-\lambda_0-\sum_{i=1}^{4}\lambda_i\iota_i(\theta)} \tag{17}$$

여기서, λ_i는 Lagrangian multiplier이며 다음 식으로 구한다.

$$\int_0^{2\pi}[m_i - l_i(\theta)]e^{-\sum_{j=1}^{4}\lambda_j l_j(\theta)}\,d\theta = 0 \qquad (18)$$

$$\lambda_0 = \ln\left[\int_0^{2\pi} e^{-\sum_{j=1}^{4}\lambda_j l_j(\theta)}\,d\theta\right] \qquad (19)$$

여기서, l_i, m_i는 식 (9)와 식 (10) 또는 식 (11)에서 구한다.

3. 方向 分解能의 比較檢討

波浪의 方向은 水面變動, 水面勾配 등과는 달리 直接的으로 觀測할 수 없고 여러 波動量의 觀測資料를 組合하여 間接的으로 얻어지기 때문에 本 硏究에서는 名 方法에 의한 方向分布函数 推定式이 假定한 方向分布函数를 얼마나 잘 再現시키는 가를 数値模擬実験을 通하여 檢討한다. 즉, 앞에서 論議한 方向스펙트럼 推定法의 方向分解能에 관한 檢討를 하기 위하여 임의의 波向스펙트럼을 設定하고 이에 대한 名 方法의 結果를 比較 檢討하기로 한다. 數値模擬実驗 順序는 다음과 같으며, 水面變動과 水面勾配를 対象 波動量으로 한다.

1) 模擬実験에 利用될 波向스펙트럼을 設定한다.

本 硏究에서는 方向分布函数로서 Delta 函数와 Mitsuysu의 函数를 使用하였다.

2) 주어진 波向스펙트럼으로부터 水面變動, 水面勾配間의 cross 스펙트럼을 구한다.

3) 구해진 cross 스펙트럼으로부터 LHM과 MEM에 의한 波向스펙트럼 推定値를 구한다.

4) 推定된 스펙트럼을 設定 스펙트럼과 比較한다.

3.1 數値解法

3.1.1 LHM

식 (10)으로부터 m_i가 구해지면 식 (14) 및 식 (15)로부터 波向스펙트럼이 推定된다.

3.1.2 MEM

식 (18)은 Lagrangian multiplier에 관한 非線刑 連立方程式이며, 이의 解는 Newton-Raphson법(Press *et al.*, 1986)을 使用하여 구할 수 있다. 식 (18)을 線刑化하면 다음 식을 얻는다.

$$\sum_{j=1}^{4} A_{ij}\,\delta\lambda_j = B_i, \quad i=1,2,3,4 \qquad (20)$$

$$A_{ij} = \int_0^{2\pi}[l_i(\theta) - m_i]\,l_j(\theta)\,e^{-\sum_{k=1}^{4}\lambda_k l_k(\theta)}\,d\theta \qquad (21)$$

여기서,

$$B_i = \int_0^{2\pi}[l_i(\theta) - m_i]\,e^{-\sum_{k=1}^{4}\lambda_k l_k(\theta)}\,d\theta \qquad (22)$$

$$\delta\lambda_j = \lambda_j^{new} - \lambda_j^{old} \qquad (23)$$

식 (20)은 残差 vector $\delta\vec{\lambda}$에 관한 連立 1次方程式으로서 初期値 $\vec{\lambda^0}$를 주고, $\|\delta\vec{\lambda}\|_1$이 充分히 작아질 때까지 反復計算을 하여 $\vec{\lambda}$의 近似解를 구한다. 여기서는 初期値를 $\vec{\lambda}=0$로 하고, $\|\delta\lambda\|_1 \leq 1.0\times10^{-2}$이면 計算을 끝내고 그 때의 $\vec{\lambda}$를 식 (19)의 近似解로 取하였다.

3.2 方向分解能의 檢討

3.2.1 Delta 函数

임의의 周波數에대한 方向分布函数가 Delta 函数의 合으로 주어진다면 스펙트럼은

$$G(\theta|f) = \sum_{l=1}^{n}\alpha_l\,\delta(\theta - \theta_l) \qquad (24)$$

로 주어진다.

$$\text{여기서,}\quad \sum_{l=1}^{n}\alpha_l = 1, \quad \alpha_l \geq 0 \qquad (25)$$

이다.

식 (24)로부터 m_i를 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} m_1 &= \sum_{l=1}^{n}\alpha_l\,\cos\theta_l \\ m_2 &= \sum_{l=1}^{n}\alpha_l\,\sin\theta_l \\ m_3 &= \sum_{l=1}^{n}\alpha_l\,\cos2\theta_l \\ m_4 &= \sum_{l=1}^{n}\alpha_l\,\sin2\theta_l \end{aligned} \qquad (26)$$

따라서 식 (26)을 식 (14) 및 식 (15)에 代入하면 方向分布函数의 LHM 推定値를 얻을 수 있다. 한편 식 (26)을 식 (18)에 代入하면 Lagrangian multiplier에 관한 다음의 非線刑 連立方程式을 얻는다.

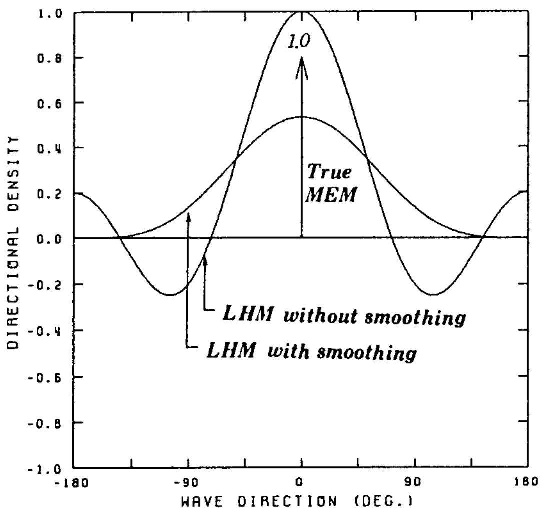

Fig. 1. Numerical simulation for a spreading of a Delta function.

$$\int_0^{2\pi}[\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cos\theta_i - \cos\theta]e^{-\sum_{j=1}^{4}\lambda_j l_j(\theta)}\, d\theta = 0$$

$$\int_0^{2\pi}[\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sin\theta_i - \sin\theta]e^{-\sum_{j=1}^{n}\lambda_j l_j(\theta)}\, d\theta = 0$$

$$\int_0^{2\pi}[\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cos2\theta_i - \cos2\theta]e^{-\sum_{j=1}^{4}\lambda_j l_j(\theta)}\, d\theta = 0 \tag{27}$$

$$\int_0^{2\pi}[\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sin2\theta_i - \sin2\theta]e^{-\sum_{j=1}^{4}\lambda_j l_j(\theta)}\, d\theta = 0$$

윗 식을 觀察하면 $e^{-\sum_{j=1}^{4}\lambda_j l_j(\theta)}$가 $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\delta(\theta-\theta_i)$에 比例하면 식 (27)이 成立함을 알 수 있다. 그러므로 波向스펙트럼의 MEM 推定値는 假定한 스펙트럼과 一致한다.

Fig. 1은 Delta 函数로 주어지는 波向스펙트럼에 대한 名 方法의 推定結果를 보여 주고 있으며, 화살표는 Delta 函数, 実線은 식 (14)와 식 (15)에 의한 推定値를 각각 나타낸다. 縱軸(ordinate)은 平滑化되지 않은 LHM(식 (14))의 最大값으로 무차원화한 것이다. 이 그림에서 보는 바와 같이 平滑化되지 않은 LHM 推定曲線은 negative lobe가 發生하고, 이를 平滑化한 推定値는 negative lobe가 除去되었음을 알 수 있으며, 平滑化된 스펙트럼의 peak는 그렇지 않은 것에 비하여 매우 낮음을 알 수 있다. Negative lobe는 無限個数 項의 Fourier series를 second hormonic에서 切斷하였기 때문에 나타나는 것으로 생각된다. Fourier 理論에서 주어진 週期函数를 三角 多項式으로 近似시킬 때 全제곱 誤差(total square error)가 最小로 되는 條件은 三角 多項式의 係数가 對應하는 Fourier coefficient와 一致하는 것이다. 따라서 平滑化되지 않은 스펙트럼이 주어진 스펙트럼을 second harmonic까지의 Fourier series로 展開할 때 全제곱 誤差가 最小로 되는 推定値이지만 実際的으로 스펙트럼은 negative의 領域을 包含할 수 없기 때문에 陽의 smoothing 函数를 導入하여 negative lobe를 除去하는 것이 合理的이라고 思料된다.

3.2.2 單峯形 波向스펙트럼

方向分布函数가 Mitsuyasu형으로 주어지는 境遇이다.

$$G(\theta\,|\,f)=M(s)\cos^{2s}\frac{\theta}{2} \tag{28}$$

$$M(s)=\frac{1}{\pi}2^{2s-1}\frac{\Gamma^2(s+1)}{\Gamma(2s+1)} \tag{29}$$

식 (28)은 s(spreading coefficient)가 커질수록 方向集中度가 強해짐을 나타내며, $s\to\infty$이면 Delta 函数에 接近한다. Fig. 2 (a)−(c)는 각각 s=1, 5, 100에 대한 計算例이다. 그림에서 縱軸은 true spectrum의 最大値로 무차원화하였다.

Fig. 2에서 MEM에 의한 推定値는 s가 增加함에 따라서 精度가 좋아짐을 알 수 있다. 이는 에너지의 集中度가 클수록 精度가 좋아지며, s가 無限히 큰 境遇 즉, Delta 函数의 境遇에는 MEM 推定値는 true spectrum과 一致한다. 또한 $s\geq5$이면 MEM 推定値는 true spectrum과 거의 一致하며, s=1의 境遇에도 LHM보다 精度가 좋은 것으로 나타났다.

LHM은 peak의 位置는 true spectrum과 잘 一致하고 있으나, 全般的으로 MEM에 비하여 精度가 훨씬 떨어지며, 推定스펙트럼의 形狀은 상당히 平滑化되어 나타난다.

3.2.3 雙峯形 스펙트럼

方向分布函数가 中心이 서로 다른 두 거의 Mitsuyasu 형의 合成으로 주어지는 境遇이다. 즉

$$G(\theta\,|\,f)=\alpha_1 M(s_1)\cos^{2s_1}\frac{\theta-\theta_1}{2} + \alpha_2 M(s_2)\cos^{2s_2}\frac{\theta-\theta_2}{2} \tag{30}$$

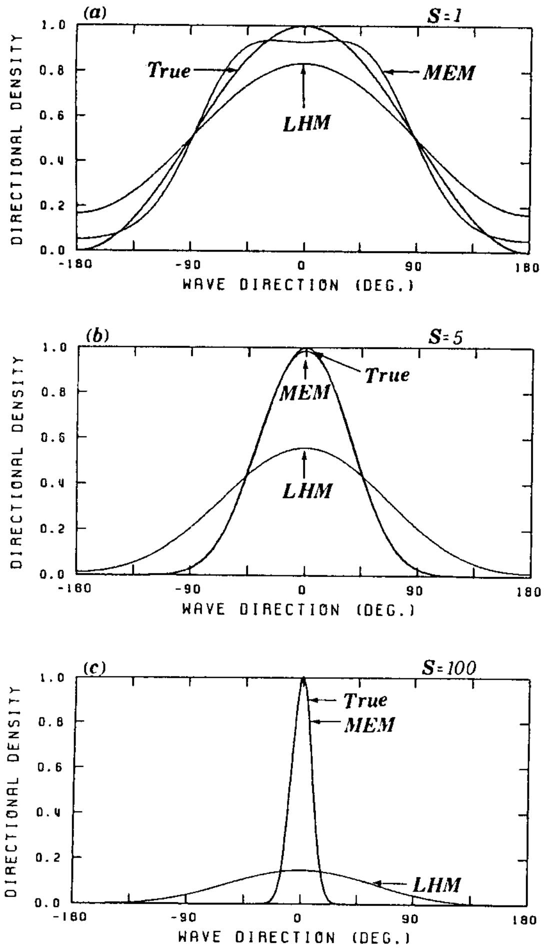

Fig. 2. Numerical simulations for unimodal spreadings. (a) s = 1, (b) s = 5, (c) s = 100.

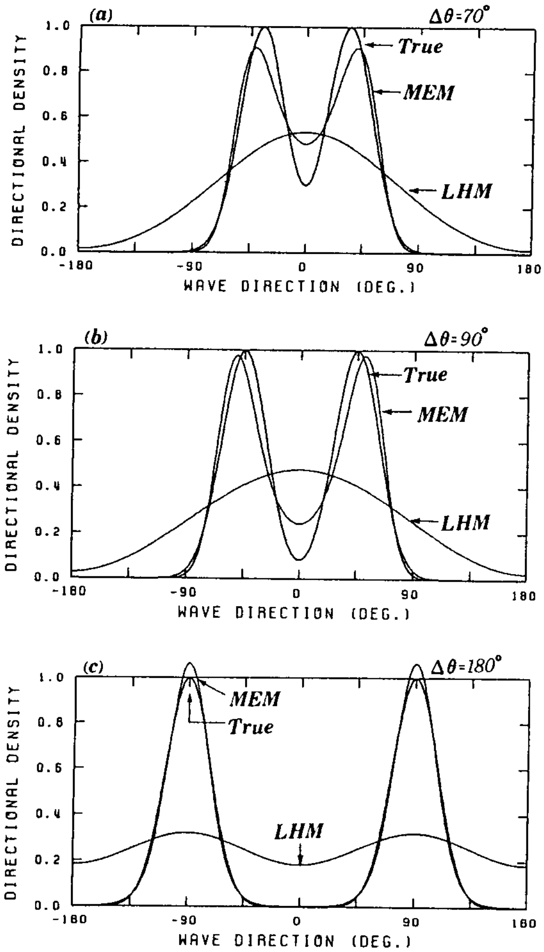

Fig. 3. Numerical simulations for bimodal spreadings with equal peaks ($\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5$, $s_1 = s_2 = 20$). (a) $\Delta\theta$ = 70°, (b) $\Delta\theta$ = 90°, (c) $\Delta\theta$ = 180°.

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1 \tag{31}$$

(1) 同一한 peak

Fig. 3(a)−(c)는 $\alpha_1=\alpha_2=0.5$, $s_1= s_2 =20$일 때, $\Delta\theta=70°$, 90°, 180°의 境遇에 대한 true spectrum과 MEM, LHM 推定値를 보여준다. 橋本 等(1985)은 $\Delta\theta=70°$인 境遇에 대하여 解가 收斂하지 않으나, 本 硏究에서는 收斂하는 해를 구할 수 있었다.

MEM은 모든 境遇에 대하여 스펙트럼의 peak를 찾아내고 있으며, $\Delta\theta$가 增加할수록 true spectrum에 잘 一致하고 있다. 특히 $\Delta\theta$가 작은 境遇에는 peak의 位置는 잘 一致하고 있지만, 스펙트럼의 peak와 trough가 若干 平滑化되는 傾向을 보인다. 그러나 全般的으로 MEM 推定値는 實用的으로 充分한 精度를 갖는다고 思料된다.

LHM은 $\Delta\theta$가 작은 境遇 두 개의 peak를 平滑化하여 하나의 peak로 보여주고 있으며, $\Delta\theta=180°$의 境遇에서만 微細하게 peak의 位置를 알아내고 있다. 그러나 어느 境遇에도 MEM에 대해 精度가 顯著히 떨어짐을 알 수 있다. 한편, LHM은 이 그림으로부터 $\Delta\theta=70°$, 90°의 境遇에는 first harmonic이, $\Delta\theta=180°$ 境遇에는 second harmonic이 支配的임을 알 수 있다.

(2) 서로 다른 peak

Fig. 4(a)−(c)는 $\frac{\alpha_1 M(s_1)}{\alpha_2 M(s_2)}=0.5$, $s_1=100$, $s_2=10$

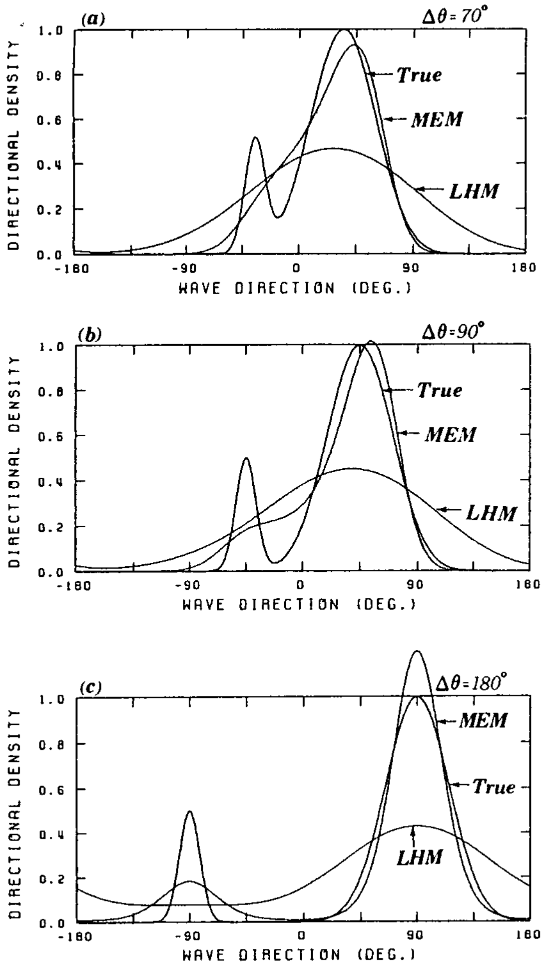

Fig. 4. Numerical simulations for bimodal spreadings with unequal peaks $((\alpha_1 MCS_1)/(\alpha_2 MCS_2) = 0.5$, $s_1 = 100$, $s_2 = 10)$. (a) $\Delta\theta = 70°$, (b) $\Delta\theta = 90°$, (c) $\Delta\theta = 180°$.

에 대한 true spectrum, LHM, MEM 推定値를 보여준다. 너울(swell)과 風波(wind seas)가 共存하는 波動場이 이 境遇에 該當된다고 생각할 수 있다.

MEM은 앞의 境遇와 마찬가지로 Δθ가 增加할수록 精度가 좋아지고 있으며 first peak의 位置는 Δθ=180°의 境遇를 除外하면 true spectrum의 그것과 若干 差異가 있음을 알 수 있다. 한편, second peak는 Δθ=70°의 境遇에는 나타나지 않고, Δθ가 90°보다 큰 境遇에서는 나타나고 있으나 상당히 平滑化되어 있으며, Δθ가 커질수록 second peak의 에너지의 一部가 first peak 쪽으로 옮겨지는 現像이 뚜렷하다. 本 硏究에서 여러 가지 境遇에 대한 計算結果, 尖銳度(peakedness)가 큰 peak는 平滑化되고 작은 peak는 더 尖銳化되는 傾向을 알 수 있었다.

한편, LHM은 first peak의 位置를 잘 再現하나, 모든 境遇에서 second peak를 찾아 내지 못하며, MEM보다 精度도 매우 떨어지고 있다.

4. 結　論

本 硏究에서 두 개의 波向스펙트럼 推定法의 分解能에 관하여 比較檢討하였고 그 結果 다음과 같은 結論을 導出하였다.

1) Delta 函数로 주어지는 方向分布函数에 대하여 MEM은 原 函数를 그대로 再現하며, LHM은 상당히 平滑化된 狀態로 推定한다.

2) 單峯形 方向分布函数에 대하여 方向分散度가 커질수록 MEM은 分解能이 좋으며, LHM은 方向分散度가 작을수록 分解能이 좋다. 그러나 어느 境遇에서도 MEM이 LHM보다 方向分解能이 優秀하고, 두 方法 모두 peak 波向은 原 波向과 一致한다.

3) 同一한 peak를 갖는 雙峯形의 方向分布函数에 대하여 MEM은 두 peak의 距離(Δθ)가 클수록 좋은 分解能을 보이며, Δθ가 작을수록 peak 部分이 若干 平滑化되고 peak 位置는 原來의 位置와 若干의 差異를 보인다. 그러나 LHM은 Δθ가 작은 境遇 雙峯形을 單峯形으로 推定하는 傾向이 뚜렷하다.

4) 서로 다른 peak를 갖는 雙峯形의 方向分布函数에 대하여 Δθ가 작은 境遇 LHM, MEM 모두 單峯形으로 推定하고 있으나 精度面에서 MEM이 훨씬 優秀하다. Δθ가 큰 境遇 MEM은 雙峯形으로 推定하나, peakedness가 큰 쪽이 상당히 平滑化하는 傾向을 보인다.

綜合的으로 MEM은 LHM보다 方向分解能이 훨씬 優秀하며, 單峯形의 境遇에는 方向集中度가 클수록, 雙峯形의 境遇에는 peak의 距離(Δθ)가 클수록 精度가 좋아짐을 알 수 있다. 한편 LHM은 雙峯形의 境遇에도 單峯形으로 推定하는 傾向이 뚜렷하며, 計算時間이 빠른 點을 除外하면 MEM에 비해 매우 뒤떨어진 方法이라 할 수 있다.

謝　辭

本 硏究는 科學技術處 特定硏究事業인 "沿岸防災施設의 設計基準算出 硏究"의 一環으로 遂行되었다.

参考文獻

橋本典明, 小舟浩治, 1985. 最大エントロピー原理(MEP)を用いた方向スペクトルの推定, 港灣技術研究所報告 第24巻, 第3號 : 123-145.

寒川典昭, 荒木正夫, 1983. 水文事象の頻度分析へのMEPの導入について, 土木學會論文報告集, 第335號 : 89-95.

Capon, J., 1969. High resolution frequency wave number spectrum analysis, *Proc. IEEE,* Vol. 57, No. 8: 1408-1696.

Capon, J., Greenfield, R.J. and Kolker, R.J., 1967. Multi-dimensional maximum-likelihood processing of a large aperture seismic array, *Proc. IEEE,* Vol. 55, No. 2: 192-211.

Davis, R.E. and Regier, L.A., 1977. Method for estimation of directional wave spectra from multi-element arrays, *J. Mar. Res.,* Vol. 35, No. 3: 453-447.

Goda, Y., 1985. Random seas and design of maritime structures, Univ. of Tokyo press.

Haubrich, R.A., 1968. Array design, *Bull. Seismolog. Soc. of Amer.,* Vol. 58, No. 3: 977-991.

Isobe, M., Kondo, K. and Horikawa, K., 1984. Extention of MLM for estimating directional wave spectra, Proc. Symp. on Description and Modelling of Directional Seas, Tech. Univ. of Denmark, Lyngby, Paper No. 6, Danish Hydraulic Inst. and Danish Maritime Inst.

Kobune, K. and Hashimoto, N., 1986. Estimation of directional spectra from the maximum entropy principle, Proc. 5th Int. Offshore Mech. and Arctic Eng. Symp., ASME, Vol. 1: 80-85.

Lacoss, R.T., 1971. Data adaptive spectral analysis method, Geophysics, Vol. 36, No. 4: 661-675.

Longuet-Higgins, M.S., Cartwright, D.E. and Smith, N.D., 1963. Observation of the directional spectrum of sea waves using the motions of a floating buoy, Ocean Wave Spectra, Prentice-Hall Inc., N.J., 111-136.

McDonough, R.N., 1974. Maximum-entropy spatial processing of array data, *Geophysics,* Vol. 39, No. 6: 843-851.

Mitsuyasu, H., Tasai, F., Suhara, T., Mizuno, S., Ohkusu, M., Honda, T. and Rikiishi, K., 1975. Observations of the directional spectrum of ocean waves using a cloverleaf buoy, *J. Phys. Oceangr.,* Vol. 5, No. 4: 750-760.

Panicker, N.N. and Borgman, L.E., 1974. Enhancement of directional wave spectrum estimates, *Proc. 14th Coastal Eng. Conf.,* ASCE: 258-279.

Press, W.H., Flannery, B.P., Teukolsky, S.A. and Vetterling, W.T., 1986. Numerical recipes, Cambridge Univ. Press.

Radoski, H.R., Fougere, P.P. and Zawalick, E.J., 1975. A comparison of power spectral estimates and applications of the maximum entropy method, *J. Geophys. Res.,* Vol. 80, No. 4: 619-625.

Ulrych, T.J., 1972. Maximum entropy power spectrum of truncated sinusoids, *J. Geophys. Res.,* Vol. 77, No. 8: 1396-1400.

Wylie, C.R., 1975. Advanced engineering mathematics, McGraw-Hill.