

## 拋物形方程式을 이용한 波의 屈折·廻折模型 Parabolic Model for Wave Refraction-Diffraction

鄭信澤\*·蔡璋源\*·安守漢\*\*·鄭遠武\*

Shin Taek Jeong\*, Jang Won Chae\*, Soo Hahn Ahn\*\* and Weon Mu Joeng\*

**要 旨** : 해저면 경사가 비교적 완만한 해역에서의 수심과 흐름에 의한 파랑변형 현상을 정확하고 효율적으로 계산할 수 있도록 拋物形 有限差分 數值模型을 수립하였다. 모형의 기본식은 雙曲形 緩傾斜 波動方程式으로부터 Pade' 근사를 이용하여 유도한 拋物形方程式이며 수치계산은 Kirby(1986) 모형의 차분식을 수정한 다음 계산치의 정확도를 수치실험을 통하여 비교·분석하였다.

**Abstract** □ A parabolic model is presented for the effective calculation of refraction-diffraction of regular water while they are propagating on the water of slowly varying sea bed with currents. Parabolic wave equation has been used in the model, which is derived from a mild-slope equation using Pade' approximation. With the corrections of Kirby's (1986) model some numerical experiments were carried out to analyze the model accuracy.

### 1. 서 론

파가 해저면경사가 비교적 완만하고 潮流 및 연안류 등의 흐름이 있는 연안역을 전파해 갈 때 이들의 영향을 받아 波高 및 波向 등이 달라진다. 이는 설계파 추산, 퇴적물 이동 등의 해안공학적인 제반 문제해석에 매우 중요하며, 이 분야에 대해 과거 10여년 동안 많은 연구가 진행되어 왔다.

Berkhoff(1972)가 유도한 緩傾斜 波動方程式은 波의 反射를 무시하는 경우, 解를 효율적으로 구할 수 있는 포물방정식으로 근사시킬 수 있다 (Radder, 1979). 포물방정식은 파랑의 진행방향과 좌표축의 하나가 이루는 각이 작은 경우에 매우 유효하며, 이 각도가 증가하면 精度가 낮아진다. 이러한 문제점을 해결하기 위해서는 파향선과 파봉선으로 구성된 곡선 좌표계를 사용하는 방법(Isobe, 1986; Kirby, 1988; 이동수 등, 1989)과 Pade' 근사법(Kirby, 1986), 그리고 Pseudo spectral method(Dalrymple 등, 1989) 등이 제시되었다.

본 논문에서는 흐름과 수심의 영향을 고려한 타원

형 완경사 파동방정식(Kirby, 1984; 鄭, 1990)을 Pade' 근사법(부록 참조)을 이용해서 포물방정식으로 유도하였다. 그리고, Crank-Nicolson 법을 이용해서 수치계산을 효율적으로 수행할 수 있는 유한차분 모형을 수립한 다음 수치실험을 통하여 Kirby의 모형결과와 비교하고 수심과 흐름에 의한 파의 변형현상을 분석하였다.

### 2. 기본방정식

**2.1 파랑-흐름 상호작용 운동에 대한 기본방정식**  
파랑-흐름 상호작용 운동에 대한 기본방정식은 Fig. 1(그림의  $\theta_a$ 는 파의 진행방향과 x 축이 이루는 각임)과 같은 좌표계에서 속도포텐셜  $\Phi(x, y, t)$ 에 대한 雙曲形 偏微分方程式으로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{D^2 \Phi}{Dt^2} + (\nabla \cdot \mathbf{U}) \frac{D\Phi}{Dt} - \nabla \cdot (CC_s \nabla \Phi) + (\sigma^2 - k^2 CC_s) \Phi + (\sigma^2 - \omega^2) \Phi + W \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \quad (1)$$

\*韓國科學技術研究院 海洋研究所 沿岸工學室(Coastal Engineering Lab., Korea Ocean Research and Development Institute, Ansan P.O. Box 29, 425-600, Korea)

\*\*서울대학교 土木工學科(Department of Civil Eng., Seoul National University, Seoul 151-742, Korea)

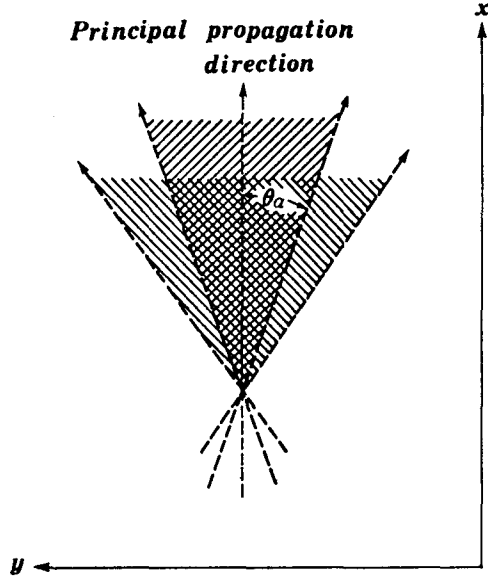


Fig. 1. Definition of aperture for parabolic approximations: //// allowed aperture for lower order approximation, \\\\\\\ allowed aperture for higher order approximation (Kirby, 1986).

여기서,

$$\frac{D}{Dt} = \left[ \frac{\partial}{\partial t} + \underline{U} \cdot \nabla \right]$$

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j}$$

$\underline{U}$  = 속도 벡터 (=  $u\mathbf{i} + v\mathbf{j}$ )

$\sigma$  = 상대 각주파수 ( $\sigma = \omega - \mathbf{k} \cdot \underline{U}$ )

$\omega$  = 절대 각주파수

$k$  = 波數

$C$  = 波速

$C_g$  = 波의 群速度

$W$  = 에너지 감쇠율

$(\sigma^2 - \omega^2)\Phi$  = 비선형 항 (weakly nonlinear term)

쌍곡형방정식 (1)은 시간  $t$ 가 포함되어 있는 복잡한 형태의 境界值 問題로 이 式을 이용한 수치모형을 開放海域(open sea)에 적용하는 경우, 계산시간이 많이 걸릴 뿐만 아니라 대용량의 컴퓨터가 필요하다. 이러한 문제점을 해결하기 위해 다음과 같은 定常狀態(steady state)의 파랑운동을 고려한다. 정상상태에서의 속도포텐셜은 다음과 같다.

$$\phi = \text{Re} \{ \hat{\phi} \exp(-i\omega t) \} \quad (2)$$

여기서,  $\hat{\phi}(x, y)$ 는 표면포텐셜이며, 式 (2)를 式 (1)에 대입하면 다음과 같은 결과를 얻는다(鄭, 1990).

$$\begin{aligned} & -i\omega \{ 2\underline{U} \cdot \nabla \hat{\phi} + \hat{\phi} (\nabla \cdot \underline{U}) \} + (\underline{U} \cdot \nabla) (\underline{U} \cdot \nabla \hat{\phi}) \\ & + (\nabla \cdot \underline{U}) (\underline{U} \cdot \nabla \hat{\phi}) \\ & - \nabla \cdot (CC_g \nabla \hat{\phi}) + \{ 2(\sigma^2 - \omega^2) - k^2 CC_g \} \hat{\phi} \\ & - i\omega W \hat{\phi} = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

위 式은  $\hat{\phi}$ 에 대한 橢圓形 偏微分方程式으로  $\underline{U} = (0, 0)$ ,  $W = 0$ 인 경우 Berkhoff(1972)의 緩傾斜方程式이 된다. 또, 수심이 일정하고  $\underline{U} = (0, 0)$ 인 경우에는 다음의 Helmholtz 방정식이 된다.

$$\nabla^2 \hat{\phi} + k^2 \hat{\phi} = 0 \quad (4)$$

### 2.2 포물형근사식

Helmholtz 방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있으며

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x} \right] + \gamma \hat{\phi} = 0 \quad (5)$$

포텐셜  $\hat{\phi}$ 는 입사파  $\hat{\phi}^+$ 와 반사파  $\hat{\phi}^-$ 의 합으로 나타낼 수가 있으므로, 式 (5)를 式 (6)과 (7)로 분리할 수 있다(Radder, 1979).

$$\frac{\partial \hat{\phi}^+}{\partial x} = i\gamma \hat{\phi}^+ \quad (6)$$

$$\frac{\partial \hat{\phi}^-}{\partial x} = -i\gamma \hat{\phi}^- \quad (7)$$

여기서,  $\gamma(x, y)$ 는 계수이다.

파랑이  $x$  방향(Fig.1 참조)으로만 진행한다고 가정하면 분산관계식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\sigma = \omega - ku \quad (8)$$

따라서, 式 (6)과 (8)을 式 (3)에 대입하면 다음 式을 얻는다.

$$\frac{\partial}{\partial x} \{ k^{1/2} (CC_g - u^2)^{1/2} \left[ 1 + \frac{M}{k^2 (CC_g - u^2)} \right]^{1/4} \hat{\phi} \}$$

$$= ik^{3/2} (CC_g - u^2)^{1/2} \left[ 1 + \frac{M}{k^2 (CC_g - u^2)} \right]^{3/4} \hat{\phi} \quad (9)$$

이 식을 Pade 근사를 이용하여 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \{ ik^{1/2} (CC_g - u^2)^{1/2} [1 + P_1 \frac{M}{k^2 (CC_g - u^2)}] \hat{\phi} \} \\ & = ik^{3/2} (CC_g - u^2)^{1/2} [1 + P_2 \frac{M}{k^2 (CC_g - u^2)}] \hat{\phi} \end{aligned} \quad (10)$$

여기서,

$$\begin{aligned} M\hat{\phi} = & \{ 2\omega ku + i\omega (\nabla \cdot \underline{U}) \} \hat{\phi} - (uv\hat{\phi}_y)_y \\ & - (uv\hat{\phi}_x)_y + \{ (CC_g - v^2) \hat{\phi}_y \}_y \\ & + 2i\omega \underline{U} \cdot \nabla \hat{\phi} \end{aligned}$$

$$P_1 = 1/4, \quad P_2 = 3/4$$

식 (10)을 입사파에 대한 식으로 전개하여 정리하면 다음과 같다 (Kirby, 1986; 鄭, 1990).

$$\begin{aligned} & (C_g + u)\hat{A}_x + v\hat{A}_y + i(\bar{k} - k)(C_g + u)\hat{A} + \frac{\sigma}{2} \\ & \{ \left[ \frac{C_g + u}{\sigma} \right]_x + \left[ \frac{v}{\sigma} \right]_y \} \hat{A} - \frac{i}{2} \{ (CC_g - v^2) \left[ \frac{\hat{A}}{\sigma} \right]_y \}_y \\ & + \frac{i}{2} \{ [uv \left[ \frac{\hat{A}}{\sigma} \right]_y]_x + [uv \left[ \frac{\hat{A}}{\sigma} \right]_x]_y \} \\ & + \frac{P_1}{k} \{ [(CC_g - v^2) \left[ \frac{\hat{A}}{\sigma} \right]_y]_{yx} + 2i[\sigma v \left[ \frac{\hat{A}}{\sigma} \right]_y]_x \} \\ & + P_1 \beta \{ 2i\omega u \left[ \frac{\hat{A}}{\sigma} \right]_x + 2i\sigma v \left[ \frac{\hat{A}}{\sigma} \right]_y - 2uv \left[ \frac{\hat{A}}{\sigma} \right]_{xy} \} \\ & + [(CC_g - v^2) \left[ \frac{\hat{A}}{\sigma} \right]_y]_y + \frac{i}{k} P_1 \{ (\omega v)_y \} \\ & + 3(\omega u)_x \left[ \frac{\hat{A}}{\sigma} \right]_x + \frac{i\sigma}{2} k^2 D |\hat{A}|^2 \hat{A} + \frac{W}{2} \hat{A} = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

여기서,

- $\hat{A}$ : 파의 진폭 (=H/2)
- H: 파고
- $\bar{k}$ : y 방향에 대한 평균파수
- ( )<sub>x</sub>:  $\frac{\partial}{\partial x}$

$$i: \sqrt{-1}$$

$$\beta = \frac{k_x}{k^2} + \frac{[k(CC_g - u^2)]_x}{2k^2(CC_g - u^2)} \quad (12)$$

$$D = \frac{\cosh(4kh) + 8 - 2 \tanh^2(kh)}{8 \sinh^4(kh)}$$

이다. 이 식은 식 (1)을 初期值 問題로 변환시킴으로써 계산을 효율적으로 수행할 수 있다. 계산시간에 대해서는 Booij(1981)의 비교 연구로부터 현저하게 줄어듦을 알 수 있다.

### 3. 수치계산

#### 3.1 기본방정식의 차분화

기본방정식의 數值解를 계산하기 위해 유한차분법을 이용하여 식 (11)에서 비선형항을 제외하고 차분화한 다음, 진폭  $\hat{A}$ 에 관하여 정리하면 다음과 같은 형태가 된다.

$$a\hat{A}'_{j+1} + b\hat{A}'_{j+1} + c\hat{A}'_{j+1} = d\hat{A}'_{j+1} + e\hat{A}'_j + f\hat{A}'_{j-1} \quad (13)$$

계수 a, b, c, d, e, f는 식이 복잡하고 분량이 많으므로 여기서는 생략하였으며 자세한 것은 鄭(1990)에 수록되어 있다. Kirby(1986)는 식 (11)에 대한 差分式 中에서 식 (12)의 두번째 항의 분모를  $2[k(CC_g - u^2)]^2$ 으로 하여 차분화함으로써 식 (11)의 6번째 항을 계산하는데 오류를 범하고 있다. 따라서, 본 모형에서는 이를 수정하여 그 결과를 수치계산을 통하여 비교·분석하였다.

#### 3.2 경계조건 및 계산방법

외해 경계면에서는 입사파조건을 제공하고, 양쪽 경계면에서는 파가 반사되지 않고 경계면 밖으로 통과하는 것으로 하였다.

차분식 (13)은 Tri-diagonal matrix 형태이므로 Thomas algorithm을 이용하면 쉽게 계산할 수 있으며 이 방법은 무조건 안정하다(unconditionally stable). 그러나 계산치의 정확도의 일관성(consistency)을 위해 실험결과 격자간격은 파장의 1/5 이하로 한다.

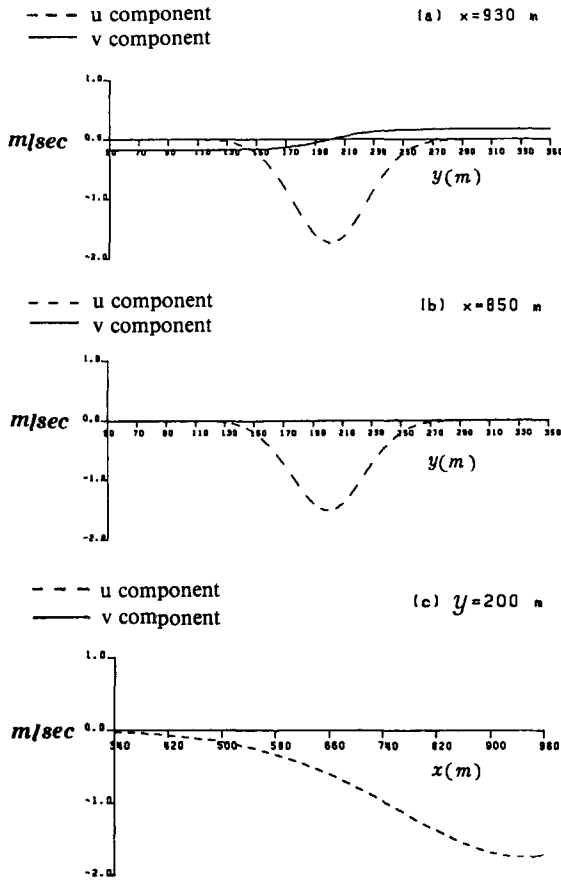


Fig. 2. Typical velocity profiles along (a)  $x=930$  m, (b)  $x=850$  m, and (c)  $y=200$  m.

#### 4. 수치계산결과

본 수치모형과 Kirby(1986)의 모형을 비교하고, 수심과 흐름의 복합적인 영향에 의한 파랑변형을 분석하기 위해 파가 離岸流가 있는 해안을 전파하는 경우에 대해 수치실험을 실시하였다.

##### 4.1 계산조건

계산영역은  $x$  방향으로 1,000 m,  $y$  방향으로 400 m이며, 水深은

$$h(x, y) = 24 - x/50 \quad (14)$$

으로 표시되며  $y$  방향으로의 변화가 없다. 흐름의 형태는 Fig. 2와 같으며 다음 식으로 표현된다.

$$u = -0.0721(1,000 - x) F\left[\frac{1,000 - x}{250}\right]$$

$$F\left[\frac{y-200}{25}\right] \quad (15)$$

$$v = -1.8 \left\{ 2 - \left[\frac{1,000 - x}{250}\right]^2 \right\} F\left[\frac{1,000 - x}{250}\right]$$

$$\int_0^{(y-200)/25} F(\alpha) d\alpha \quad (16)$$

여기서

$$F(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{\alpha^2}{2}\right] \quad (17)$$

입사파의 파고( $H_0$ )=2m로 하였으며 주기는 5, 8초의 2종류로 하였다. 격자간격은  $\Delta x=10$ m,  $\Delta y=5$ m이다.

#### 4.2 계산결과

수치모형의 계산결과를 Fig. 3과 4에 도시하였다. 그림 중의 (a), (b), (c)는  $x$  및  $y$  방향의 주요 단면에 따른 파고변화를 파고비로 나타낸 것으로 Kirby(1986) 모형과 본 모형의 수치계산 결과를 동시에 보여주고 있다.

파는 흐름의 중앙으로 집중되어 파고가 커진다. 주기 5초의 경우(Fig. 3)에 입사파고의 5배 그리고 양 옆은 오히려 파고가 감소하여 0.3배 정도에 달한다. 두 모형은 단면 (a)와 (c)에서 약간의 차이를 보인다. 그러나, 단면 (b)와 주기가 8초인 Fig. 4에서는 두 결과가 거의 일치한다. 한편, 유속이 크고 진행파의 주기가 작을 경우에는 두 모형의 계산치의 차이가 상당할 것으로 사료되는데 이는  $\beta$  값이  $CC_g$ 와  $U^2$ 의 값에 따라 달라지고 차분식 (13)의 2차항에 영향을 주기 때문이다. 이러한 경우에는 본 모형이 Kirby의 모형보다 높은 정도를 나타내고 유속이 작고 주기가 큰 경우에는 두 모형의 계산치는 일치한다.

#### 5. 결론 및 토의

완경사 해역에서의 수심 및 흐름에 의한 규칙파의 변형현상을 포물형방정식을 이용하여 효율적으로 계산할 수 있는 수치모형을 수립하였다. 이 모형은 파의 진행방향이  $x$  축과 비교적 큰 각( $60^\circ$  정도)을 이루더라도 정확도가 높은 계산치를 얻을 수 있도록

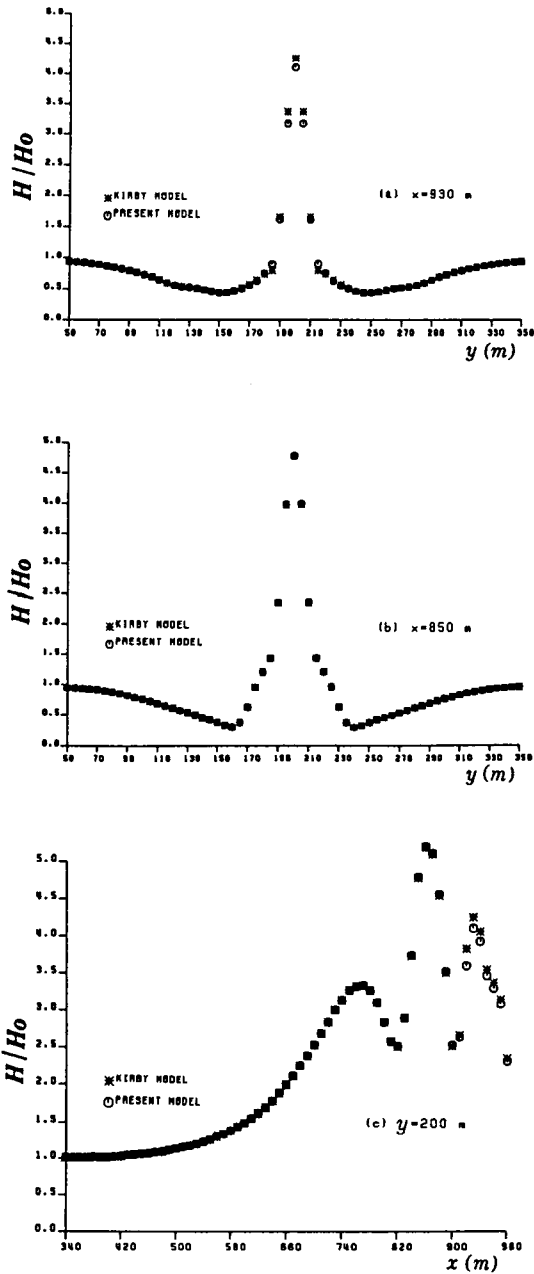


Fig. 3. Height relative to incident wave for waves interacting with rip current (Wave period=5 sec).

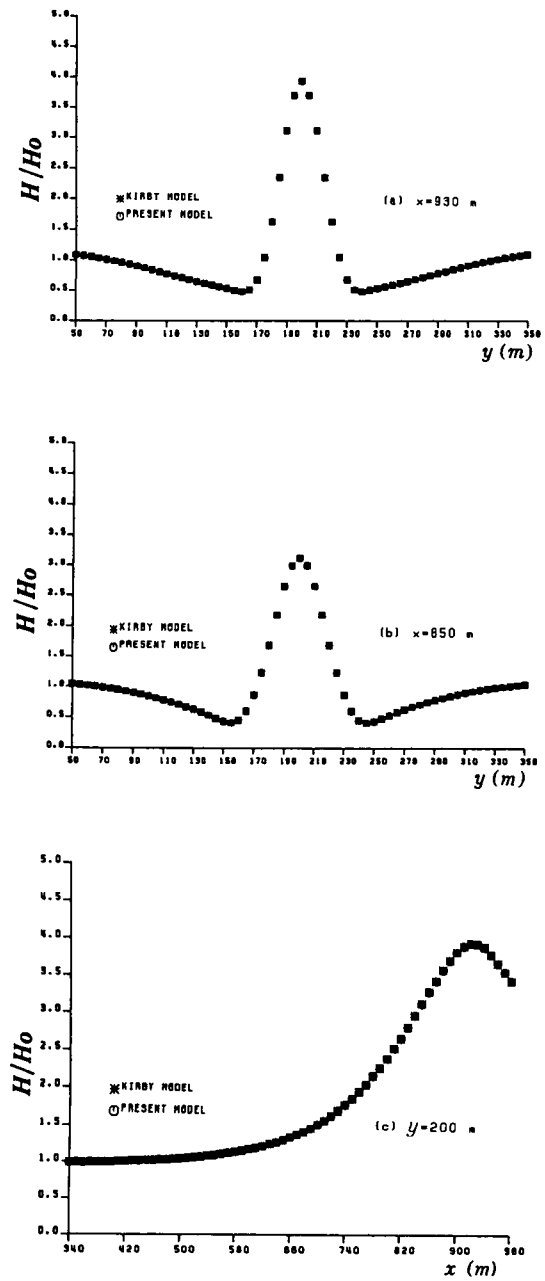


Fig. 4. Height relative to incident wave for waves interacting with rip current (Wave period=8 sec).

Pade/ 근사법을 이용하였으며, Kirby(1986) 모형의 차분식을 수정하여 모형의 정확도를 향상시켰다. 유속이 큰 해역을 파가 진행할 때는 흐름에 의해 쇄파가 되고, 또 추가적인 에너지 Source가 파의 주기를 변화시킬 수 있다. 이러한 경우 본 모형을

사용할 수 없으며, 파가 좌표축 및 흐름의 주방향과 큰 각을 이루며 진행할 때는 계산치의 정도가 약간 낮아진다. 따라서 이에 대한 개선과 함께 반사효과도 포함되어야 할 것이다.

부록 : Pade' 근사

Pade' 근사는 급수 전개를 하는 과정에서 精度를 높일 수 있는 가장 간단한 방법의 하나로 다항식의 비를 이용한다. 예를 들면 파수벡터  $k (=k_x, k_y)$ 에 관한 다음 식 (A.1)을 고려해 보기로 한다.

$$\frac{k_x}{k} = [1 - (\frac{k_y}{k})^2]^{1/2} \tag{A.1}$$

式 (A.1)을 낮은 차원 이항정리와 Pade' 근사 (Baker, 1975)를 이용하여 각각 전개하면 다음과 같이 표현된다.

$$\frac{k_x}{k} = 1 - \frac{1}{2} (\frac{k_y}{k})^2 \tag{A.2}$$

$$\frac{k_x}{k} = \frac{[1 - \frac{3}{4} (\frac{k_y}{k})^2]}{[1 - \frac{1}{4} (\frac{k_y}{k})^2]} \tag{A.3}$$

式 (A.2)와 式 (A.3)을 비교하여 보면 Fig. A.1에서 볼 수 있는 바와 같이 Pade' 근사를 이용한 式 (A.3)이 精度가 더 향상된다는 것을 알 수 있다.

辭 謝

본 연구는 과기처 특정연구사업의 일부분으로 이루어진 것이며, 여러모로 도와주신 연안공학실원 여러분께 감사드립니다.

참고문헌

이동수, 이종섭, 장선덕, 1989. 波向線 座標系에 의한 海岸構造物 周邊에서의 波浪變形模型, 한국해안·해양공학회지, 1(1): 22-30.  
 鄭信澤, 1990. 흐름이 存在하는 緩傾斜海域에서의 波浪變形, 博士學位論文. 서울大學校.  
 Baker, G.A., 1975. *Essentials of Pade' approximants*, Academic press.

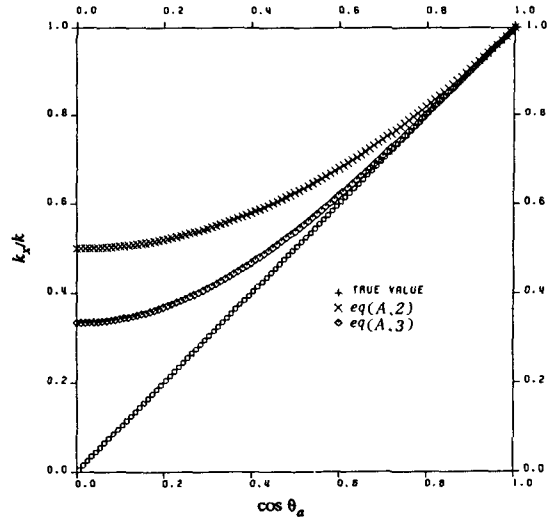


Fig. A.1. Variation of approximate  $(k_x/k)$  with true  $(k_x/k) = \cos \theta_a$ .

Berkhoff, J.C.W., 1972. Computation of combined refraction-diffraction, *Proceedings of 13th Conference of Coastal Engineering*, ASCE: 471-490.  
 Booij, N., 1981. Gravity waves on water with non-uniform depth and current, Report No. 81-1, Delft University of Technology, 130 p.  
 Dalrymple, R.A., Suh, K.D., Kirby, J.T. and Chae, J.W., 1989. Models for very wide-angle water waves and wave diffraction, Part 2. Irregular bathymetry. *J. of Fluid Mechanics*, 201: 299-322.  
 Isobe, M., 1986. A parabolic refraction-diffraction equation in the ray-front coordinate system, *Proceedings of 20th Conference of Coastal Engineering ASCE*: 306-317.  
 Kirby, J.T., 1984. A note on linear surface wave-current interaction over slowly varying topography, *J. of Geophys. Res.*, 89(C1): 745-747.  
 Kirby, J.T., 1986. Higher-order approximations in the parabolic method for water waves, *J. of Geophys. Res.*, 91(C1): 933-952.  
 Kirby, J.T., 1988. Parabolic wave computations in non-orthogonal coordinate systems, *J. of Waterway, Port, Coastal and Ocean Eng., ASCE*, 114(C1): 673-685.  
 Radder, A.C., 1979. On the parabolic equation method for water-wave propagation, *J. of Fluid Mechanics*, 95: 159-176.