Fuzzy 환경하에서의 相互作用的 多目的 意思決定
—Interactive Multiobjective Decision Making under Fuzzy Environment—

李 相 玩*
金 在 連**

Abstract

A new interactive multiobjective decision making technidque, which is called the fuzzy sequential proxy optimization technique, has been proposed. This technidque is the revised version the sequential proxy optimiuzation technique that the decision-maker's marginal rates of substitution is interpreted as type of L−R fuzzy numbers. It used to the square of normalized scalar peoduct as the doptimalilry condition. However, this technique ignores the imprecise nature of a decision-maker's judgement of marginal rates of substitution. Also, it have a shortcoming that can be only applied over three objective functions. In this paper, considering the imprecise nature of a decision-maker's judgement, we presents an interactive fuzzy decision-making method on the basis of the decision-maker's MRS presented through the use of five types of membership functions including non-linear functions. FORTRAN programs that run in conversational mode are developed to implement man-machine interative procedure.

1. 序 論

지난 수년동안 많은 多目的 意思決定技法들이 제시되었다. 그중 우수한 기법으로 알려진 多屬性效用函數法(multiattribute utility function method)과 相反的 代用價值法(surrogate worth trade-off method)은 각각 전체적인 效用模型과 부분적인 效用模型을 사용한다. 전체적인 效用函數를 사용하는 경우에 하나의 選好函數가 구축되면 그것의 최대를 최적해로 간주하므로서 매우 제한적이고 부분적인 效用函數를 사용하는 경우는 選好函數가 수학적으로 단순하고 간편하며 제한적 가정은 피했지만 연속적 근사를 통하여 최적에 도달하기 때문에 근사과정에서 시간이 상당히 소요된다. Oppenheimer[1978]는 각 기법의 장단점을 합당한 수준에서 혼합한 기법인 代用接近法(proxy approach)을 제시했다.

이 기법에 기초를 두고 Sakawa[1984]는 fuzzy 逐次 代用 最適化技法(fuzzy sequential proxy optimization technique)으로 불리는 상호작용적인 다목적 의사결정기법을 제시하였다. 그는 의사결정자의 MRS(marginal rates of substitution)를 평가함에 있어 본질적인 애매성이 있다고 생각하여 이를 L−R형태의 fuzzy數로 해석을 하였다.

효용함수를 최대로하는 Pareto최적해를 얻기 위하여 ε−제약문제를 해결하고 의사결정자의 MRS가 라그랑지 승수(Lagrange multiplier)와 같아지는 最適性條件의 基準測度로 정규화된 스칼라적(normalized scalar product)을 fuzzy數로 變換시킨 基準値를 제시하였다. 그러나 이 기준치는 目的函數가 3개이상일때만 사용가능하다는 制限을 가지고 있다. 本 硏究에서는 이러한 제한을 해결하기 위하여 意思決定者의 MRS를 평가할 때 意思決定者에게 다섯종류의 構成函數(membership function)를 제시하여 그중 意思決定者가 만족하는 構成函數를 선택하여 사용한다. 선택된 構成函數를 기초로 입력값을 결정하고 라그랑지 승수와 MRS가 같아질때까지 계산을 반복하여 意思決定者의 주관을 반영하는 最適解에 도달한다.

*동아대학교 산업공학과 부교수
**한양대학교 산업공학과 교수

접수일 : 1990. 11. 5.

2. 수정된 퍼지 축차 대용최적화기법

多目的 最適化問制(MOP)는 다음과 같이 數學的으로 정식화 된다.

$$\underset{x}{\mathrm{Min}}=(f_1(x),\ f_2(x),\ \cdots\cdots\cdots,\ f_n(x)) \tag{1}$$

subject to

$$x \in X=\{X \mid x \in R^N,\ g_j(c) \le 0,\ j=1,\ \cdots,\ m\} \tag{2}$$

여기서 x : N차원 의사결정변수 벡터

$f_1,\ \cdots,\ f_n$: 개의 다른 목적의 함수

$g_1,\ \cdots,\ g_m$: 부등제약식

MOP의 근본은 非 劣等解(non-inferior solution)로 알려진 pareto최적개념이다. 定性的으로 MOP의 pareto 최적해는 하나의 목적함수값의 개선은 단지 다른 목적함수값의 손실에 의해서만 얻어질 수 있는 것이다. 일반적으로 pareto최적해는 無限點으로 구성되어 있고 의사결정자는 pareto최적해중에서 그가 선호하는 해를 선택해야만 한다.

Definition 1. 만약 최소한 하나의 i에 대하여 $f_i(x) \le f_i(x^*)$가 성립되는 $x \in X$가 존재하지 않는다면 $x^* \in X$는 MOP에 대하여 pareto최적해라 한다.

多目的 意思決定問題(MDMP)는 다음을 해결하는 것이다.

$$\underset{x}{\max}\ U(f_1(x),\ f_2(x),\ \cdots,\ f_n(x)) \tag{3}$$

subject to

$$x \in X^P \tag{4}$$

여기서 X^P : MOP의 pareto최적해들의 집합

$U(*)$: 의사결정자의 전체 선호함수

意思決定者의 본질적인 模糊性을 고려한 MOP의 pareto 최적해를 얻는 하나의 방법은 ε_{-1}制約問題를 해결하는 것이다.

$$P_1(\varepsilon_{-1})$$

$$\min f_1(x) \tag{5}$$

subject to

$$x \in X \cap X_1(\varepsilon_{-1}) \tag{6}$$

where

$$\varepsilon_{-1}=(\varepsilon_2,\ \varepsilon_3,\ \cdots,\ \varepsilon_n) \tag{7}$$

$$X_1(\varepsilon_{-1})=\{x \mid f_i(x) \le \varepsilon_{-i},\ i=2,\ \cdots,\ n\} \tag{8}$$

$$\varepsilon_{-1} \in E_1=\{\varepsilon_{-1} \mid X_1(\varepsilon_{-1})=0\} \tag{9}$$

만약 $P_1(\varepsilon_{-1})$문제에 대하여 쿤타크 조건(Kuhn-Tucker condition)이 만족되면 i번째 활동(active)제약과 관계되는 라그랑지 승수 $\lambda_{1i}(\varepsilon_{-1})$은 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\lambda_{1i}=-\{\partial f_1(\varepsilon_{-1})\}/\{\partial f_i(\varepsilon_{-1})\},\ i=2,\ \cdots,\ n \tag{10}$$

Definition 2. $f=(f_1,\ \cdots,\ f_i,\ \cdots,\ f_n)$의 어떤 점에서 意思決定者가 f_1의 추가적인 값을 희생함으로서 얻을 수 있는 f_1의 量을 MRS라고 한다. 수학적 MRS는 無差別曲線(indifference curve)의 陰 기울기이다.

$$\begin{aligned} m_{1i}(f) &= [\partial U(f)/\partial f_i]/[\partial U(f)/\partial f_1] \\ &= -df_1/df_i\ {}_{du=0,\ df r=0,\ r\neq 1,\ i} \end{aligned} \tag{11}$$

MRS를 평가함에 있어 意思決定者의 판단은 본질적으로 模糊하고 실제 意思決定者가 느끼는 選好를 效用函數로 정확히 정식화하기는 불가능하므로 意思決定分析者는 의사결정자에게 다음의 다섯가지 構成函數(membership function)를 제시하여 意思決定者의 주관을 가장 잘 나타낼 수 있는 構成函數를 선택한다.

○선형(linear)구성함수

$$\mu f_i(x) = (f_i(x) - f_{i0})/(f_{i1} - f_{i0}) \tag{12}$$

의사결정자는 f_i^{max}와 f_i^{nin}내에서 $f_i^?$와 f_{i1}을 명시한다. 여기서 f_{in}는 구성함수 $\mu f_i(x)$의 確信程度가 a인 $f_i(x)$값을 나타낸다.

○지수(exponential)구성함수

$$\mu f_i(x) = a_i(1 - \exp(-b_i(f_i(x) - f_{i0})/(f_{i1} - f_{i0})) \tag{13}$$

여기서 $a_i > 1$, $b_i > 0$ 혹은 $a_i < 0$, $b_i < 0$. 의사결정자는 f_i^{max}와 f_i^{min}내에서 f_i^o, $f_{i0.5}$, f_{i1}을 명시한다.

○쌍곡선(hyperbolic)구성함수

$$\mu f_i(x) = 1/2\tanh((f_i(x) - b_i)a_i) + (1/2), \quad a_i < 0 \tag{14}$$

의사결정자는 f_i^{max}와 f_i^{min}내에서 $f_{i0.25}$, $f_{i0.5}$를 명시한다.

○역쌍곡선(hyperbolic inverse)구성함수

$$\mu f_i(x) = a_i\tanh^{-1}((f_i(x) - b_i)a_i) + (1/2), \quad a_i < 0 \tag{15}$$

의사결정자는 f_i^{max}와 f_i^{min}내에서 f_{i0}, $f_{i0.25}$, $f_{i0.5}$를 명시한다.

○부분선형(piecewise linear)구성함수

$$\mu f_i(x) = t_{ir}f_i(x) + s_{ir} \text{ for } g_{ir-1} \leq f(x) \leq g_{ir} \tag{16}$$

여기서 t_{ir}은 기울기이고 s_{ir}은 시점 g_{ir-1}과 종점 g_{ir}의 곡선을 두점으로 나누는 역할을 한다. 의사결정자는 f_i^{max}와 f_i^{min}내에서 몇 개의 f_{in}값을 명시한다.

선택된 구성함수를 기초로 의사결정자가 원하는 확신정도에 따라 fuzzy값을 계산한다. 의사결정자의 MRS가 상반율(trade-off rate)과 같아지는 것이 최적점이라는 것은 잘 알려진 사실이다. 즉,

$$m_{1i} = \lambda_{1i}, \quad i = 2, \cdots, n \tag{17}$$

최적성조건은 식(17)이 만족될때까지 각 단계에서 계산되는 탐색방향에 따라 반복을 계속한다. 이상의 설명을 기초로 하여 이제 수정된 fuzzy 축차 대용 최적화기법의 알고리즘을 구축한다.

단계 1) 目的函數를 정식화 한다.

단계 2) 意思決定者의 MRS를 평가하기 위하여 제시된 다섯가지 構成函數중 의사결정자의 주관을 가장 잘나타내는 구성함수를 선택한다.

단계 3) 의사결정자의 MRS를 계산한다.

단계 4) 라그랑지 승수 λ_{1i}를 계산한다.

단계 5) ε_{-1}문제를 해결하고 pareto최적해 $x^*(\varepsilon_{-1})$을 구한다.

단계 6) 탐색방향 $S^1 = \lambda_{1i} - M_{1i}$을 구하고 증분량$=a^1$, $a^{1+1} = 2a^1$을 입력한다.

단계 7) 재 탐색점 $\varepsilon_{-1} + a * \varepsilon^1_{-1}$을 계산한다.

단계 8) $|\lambda_{1i} - M_{1i}| < 10^{-2}$이면 끝내고 그렇지않으면 단계 4로 한다.

3. 수치예

min $f_1(x) = 15x_1^2 - 2159x_1 + 2x_2^2 - 1092x_2 + 16x_3^2 - 2574x_3 + 247660$

min $f_2(x) = 1747x_1 - 8x_1^2 + 1243x_2 - 4x_2^2 + 1456x_3 - 4x_3^2 - 42048$

subject to

$10 \leq x_1 \leq 40$

$10 \leq x_2 \leq 40$

$10 \leq x_3 \leq 40$

$100 \leq x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1700$

의사결정자는 선형구성함수를 선택하고 확신정도 0.8으로 $f_1(X)$함수값의 10000감소에 $f_2(X)$ 함수값이 8000 증가하길 원한다고 가정한다.

INPUT NUMBER OF OBJECTION :
=2

INDIVIDUAL MINIMUM AND MAXIMUM

	MIN	MAX
F(1)	125456.0614	192710.0000
F(2)	812.0000	55132.5505

INPUT INITIAL VALUES OF EPSILION(EP(I), I=2)
=22000
SELECT YOUR MEMBERSHIP FUNCTION FORM ?
1. LINEAR MEMBERSHIP FUNCTION.
2. EXPONENTIAL MEMBERSHIP FUNCTION.
3. HYPERBOLIC MEMBERSHIP FUNCTION.
4. HYPERBOLIC INVERSE MEMBERSHIP FUNCTION.
5. PIECEWISE LINEAR MEMBERSHIP FUNCTION.
=1
WHICH METHOD DO YOU USE TO SIMULATE MRS ?
1. DIRECTION BY DEFINITION.
2. MRS SUBDROUTINE THROUGH A SERIES OF ORDINAL COMPARISION.
3. IN A FUZZY FORM.
=3
PARETO OPTIMAL SOLUTION FOR INITIAL M-EPSILONS
(KUHN-TUCKER CONDITIONS SATISFIED)
1. F(1)=160468.6737
2. F(2)=22000.0000
EP(2)=22000.0000
LAGRANGE MULTIPLIER=1.393186
INPUT DECREMENT DF(1)
=10000
INPUT X^0, $X^{0.5}$, X^1
=6000 7000 8000
INPUT DESIRABLE MEMBERSHIP FUNCTION VALUE ?
=0.8
CALCULATE DECREMENT VALUE
=7600
YOUR MRS ARE :
M(1, 2)=1.315789
DERECTION VECTOR
S(2)=0.077397
INPUT VALUE OF M(I) SUCH THAT M(I)-F(I)>0 (I=1, 2)
=18000 40000

PARETO OPTIMAL SOLUTION(ALFA=1000)
(KUHN-TUCKER CONDITIONS SATISFIED)
1. F(1)=160360.8845
2. F(2)=22077.3970
EP(2)=22077.3970
LAGRANGE MULTIPLIER=1.392147
DIRECTION VECTOR
S(2)=0.076358
PARETO OPTIMAL SOLUTION(ALFA=2000)
(KUHN-TUCKER CONDITIONS SATISFIED)
1. F(1)=160256.0640
2. F(2)=22152.7160
EP(2)=22152.7160
LAGRANGE MULTIPLIER=1.391134
DIRECTION VECTOR
S(2)=0.075345
PARETO OPTIMAL SOLUTION(ALFA=4000)
(KUHN-TUCKER CONDITIONS SATISFIED)
1. F(1)=160049.3978
2. F(2)=22301.3800
EP(2)=22301.3800
LAGRANGE MULTIPLIER=1.389133
DIRECTION VECTOR
S(2)=0.073344
PARETO OPTIMAL SOLUTION(ALFA=8000)
(KUHN-TUCKER CONDITIONS SATISFIED)
1. F(1)=159653.5522
2. F(2)=22586.7520
EP(2)=22586.7520
LAGRANGE MULTIPLIER=1.385277
DIRECTION VECTOR
S(2)=0.069488
PARETO OPTIMAL SOLUTION(ALFA=16000)
(KUHN-TUCKER CONDITIONS SATISFIED)
1. F(1)=158928.0336
2. F(2)=23111.8080
EP(2)=23111.8080
LAGRANGE MULTIPLIER=1.378139
DIRECTION VECTOR
S(2)=0.062350
PARETO OPTIMAL SOLUTION(ALFA=32000)
(KUHN-TUCKER CONDITIONS SATISFIED)
1. F(1)=157715.9292
2. F(2)=23995.2000
EP(2)=23995.2000
LAGRANGE MULTIPLIER=1.365986

DIRECTION VECTOR
S(2)=0.050207
PARETO OPTIMAL SOLUTION(ALFA=64000)
(KUHN-TUCKER CONDITIONS SATISFIED)
1. F(1)=156062.3847
2. F(2)=25213.2480
EP(2)=25213.2480
LAGRANGE MULTIPLIER=1.348972
DIRECTION VECTOR
S(2)=0.033103
PARETO OPTIMAL SOLUTION(ALFA=128000)
(KUHN-TUCKER CONDITIONS SATISFIED)
1. F(1)=154674.8724
2. F(2)=26247.4240
EP(2)=26247.4240
LAGRANCE MULTIPLIER=1.334256
DIRECTION VECTOR
S(2)=0.018467
PARETO OPTIMAL SOLUTION(ALFA=256000)
(KUHN-TUCKER CONDITIONS SATISFIED)
1. F(1)=154035.9029
2. F(2)=26727.5520
EP(2)=26727.5520
LAGRANGE MULTIPLIER=1.327341
DIRECTION VECTOR
S(2)=0.011552
X(1)=10.0000
X(2)=10.0000
X(3)=29.9963

4. 結 論

本 硏究에서는 相互作用的인 다목적 의사결정문제에서 의사결정자 판단의 模糊性을 다루기 위하여 fuzzy축차대용 최적화기법을 수정하였다. 본 연구에서는 修正 開發된 알고리즘은 의사결정자의 MRS를 평가하는 과정에서 다섯종류의 構成函數를 제시하여 의사결정자의 주관을 가장 잘 나타내는 구성함수를 선택하게 함으로서 의사결정자의 본질적인 모호성을 보다 객관적으로 해석하고 MRS와 라그랑지 乘數가 같아질때까지 방향벡터로 探索을 계속해 나감으로서 最適解에 도달하는 과정이 쉽고 간단하다는 장점을 가지고 있다.

向後 이 기법은 다목적을 가지는 현실의 제반시스템에 적용하여 최적 의사결정을 행하는 폭넓은 응용이 요구된다.

參 考 文 獻

1. 김성희, 「의사결정론」, 영지문화사, 1988.
2. Kaufmann, A., *Theory of Fuzzy Subsets*, Academic Press, New York, 1975.
3. Bellman, R. and Zad'ʰ, L. A., "Decision Making in a Fuzzy Environment," *Management Science, 17*, 1970, pp. 141-164.
4. Dubois, D., and H. Prade, *Fuzzy Sets and Systems*, Academic Press, New Yoek, 1979.

5. Oppenheimer, Kenneth R., "A Proxy Approach to Multiattribute Decision Making," *Management Sci, 24* (1978), pp. 675-689.
6. Sakawa, M., "Interactive Multiobjective Decision Making by the Fuzzy Sequential Proxy Optimization Technique," *Times/Studies in the Management Sci, 20*(1984), pp. 241-260.
7. Zimmerman, H. J., "Using Fuzzy Sets in Operational Research," *European Journal of Operational Research, 13(3)*(1983), pp. 201-216.
8. Zimmerman, H. J., "Fuzzy Programming and Linear Programming with Several Objective Functions," *Fuzzy Sets and Systems, 1(1),* (1978), pp. 45-55.