작업완료시간의 2차벌과금함수를 최소화하는 알고리즘에 관한 연구
—Optimal Scheduling Algorithm for Minimizing the Quadratic Penalty Function of Completion Times—

노 인 규*
이 정 환**

Abstract

This paper deals with a single machine scheduling problem with a quadratic penalty function of completion times. The objective is to find a optimal sequence which minimizes the total penalty. A new type of node elimination procedure and precedence relation is developed that determines the ordering between adjacent jobs and is incorporated into a branch and bound algorithm. In addition, modified penalty function is considered and numerical examples are provided to test the effectiveness of the optimum algorithm.

1. 서 론

생산관리는 크게 두 가지 측면 즉 생산계획과 생산통제로 분류되는데 그 중 생산계획은 수량에 대한 계획과 기간에 대한 계획의 두 가지로 볼 수 있다[2]. 작업일정계획(scheduling)이란 기간계획에 속하는 것으로 작업의 진행순서를 결정하는 것이나 일반적으로 작업순서를 결정하는 것은 엄밀히 작업순서결정(sequencing)이라 한다. 이는 작업장에 미리 대기하고 있는 작업들의 처리시간이 최소가 되게 순서를 결정하는 문제라고 할 수 있다. 그러므로 이에 영향을 주는 요인들을 변수로 하고 미리 주어진 요인들의 제약을 만족하는 목적함수의 최적결과를 얻는 것이 필요하다[3, 9].

본 연구에서는 단일기계에서 각 작업이 그 완료시간에 대한 2차 함수식의 벌과금(penalty cost)을 부과하는 n개의 작업을 가지고 있는 일정계획 문제를 다룬다. 이 때의 목적식은 총벌과금을 최소로하는 작업순서를 구하는 것이다. 비록 단일기계문제이지만 이의 응용범위는 벌과금 함수를 다양하게 정의하고, 그리고 순수납기지연(tardiness)의 최소화등 여러가지 일정계획 수행도평가(performance evaluation)와 더불어 연구하면 매우 폭넓다고 하겠다[6, 8].

단일기계에서 작업완료시간의 2차 벌과금함수에 관한 기존 연구로는, 1978년에 Townsend[12]가 이 문제를 해결하기 위하여 일정계획나무(scheduling tree)를 이용한 분지한계법(branch and bound)을 개발했다. 1980년에 Bagga와 Kalra[1]는 Townsend가 개발한 열거식(enumeration) 분지한계법에 대하여 좀 더 평균계산량(complexity)을 감소시킬 수 있는 더욱 더 향상된 분지한계법의 분지(branching) 방법을 개발하였다. 여기서는 효율적으로 노드를 제거할 수 있는 이론과 예제를 제시하였다.

1984년에 Gupta와 Sen[5]은 앞에서 연구한 방법들의 계산적인 노력을 줄일 수 있도록 작업완료시간의 2차 벌과금함수에 관하여 적절한 조건식을 사전에 제시하여 사전의 선행관계식(priori precedence relationship)을 규정하였다. 이 선행관계식에 의해서 일정계획나무를 구성하여 분지한계법을 적용하였다.

또한, 1988년에 Szwarc등[11]은 Gupta와 Sen과는 또 다른 선행관계식을 개발하여 이들의 관계를 행렬(matrix)로 나타내었다. 이 행렬을 이용하여 개발한 알고리즘은 복잡한 열거식 분지한계법에 비하여 그다지 뒤

*한양대 산공과 교수
**동의대 산공과 교수
접수일 : 1990. 10. 30

떨어지지 않으면서 계산량을 대폭 줄일 수 있었다. 그러고 벌과금함수식을 일반화하여 1차식을 포함한 2차식의 벌과금함수식에 관한 연구로서는 Townsend[12]와 Gupta와 Sen[5] 등이 있다. 이 문제에 관한 해법도 앞에서 기술한 방법과 동일하게 일정계획나무를 이용한 분지한계법을 사용하였는데 분지(branching)에서 그 방법을 약간 달리할 뿐 그 외의 인접한 두작업의 상호교환에서 발생하는 비용계산등과 같은 것은 동일하다.

따라서 본 연구에서는 단일기계에서 작업완료시간의 2차 벌과금 함수식에 관한 모델을 설정하였다. 이 모델에 관한 최적해법으로서 분지한계법을 사용하였으며, 효율적인 노드제거방법과 선행관계를 동시에 고려한 알고리즘을 제시하였다. 하한값(low bound)계산이나 탐색(searching) 방법은 Townsend에서와 동일하다. 그 뿐만 아니라 본 연구에서는 2차의 벌과금함수가 1차의 벌과금함수도 고려한 일반화된 현실성있는 실질적인 비용함수식을 채택하여 최적해를 구할 수 있는 해법도 제시하였다. 이 해법들이 기존의 해법에 비하여 계산량을 훨씬 더 감소시킬 수 있음을 수치예제를 통해서 알 수 있다.

앞으로 제2장에서는 모델전개를 위한 전제조건과 부호정의 그리고 모델전개를 하며, 제3장에서는 문제의 해법으로 분지한계법의 구체적인 내용과 예제를 기술하였다. 제4장에서는 일반화된 2차 벌과금함수식을 정의하며 그에 대한 해법도 제시하였다. 마지막으로 제5장에서는 결론을 유도하였다.

2. 문제의 정의

2.1 전제조건과 부호정의

단일기계의 일정계획문제에서 2차 벌과금함수식을 설정하기 위한 전제조건은 다음과 같다[2].

1) n개의 독립된 작업은 시간 '0'에서 이용 가능하다.
2) 작업의 준비시간(setup time)은 작업순서에 독립적이며, 가공시간(processing time)에 포함된다.
3) 작업내용(즉 작업수, 시간, 경로 등)은 미리 알려져 있다.
4) 기계는 연속적으로 이용가능하며 작업물이 기다리는 동안에는 결코 휴지(idle)는 없다.
5) 작업물이 일단 가공되기 시작하면 중간에 중단없이 끝까지 작업이 완료된다(nonpreemtion).

부호에 대한 정의는 다음과 같다.

J_i : 작업 $i(i=1, 2, \cdots\cdots, n)$
t_i : 작업 i의 가공시간
w_i : 작업 i의 가중비용치
C_i : 작업 i의 완료시간
$p(i, j)$: 작업 i가 j에 선행할 때의 벌과금
p_{ij} : 작업 i와 j가 상호교환될 때의 최대벌과금의 감소치
S : 일정계획된 작업의 집합
$f(\sigma)$: 작업순서 σ의 2차벌과금 함수식값

2.2 2차 벌과금함수식의 설정

단일기계의 일정계획문제에 있어서 작업완료시간의 2차 벌과금함수식은 다음과 같이 설정된다[11, 12].

$$f(\sigma)=\sum_{i=1}^{n} w_i C_i^2 \qquad (1)$$

단, $C_i=\sum_{j=1}^{i} t_j$

작업 i와 j는 작업순서 σ에서 서로 인접한 작업이라고 하자. 그리고 이 작업들은 시간 a에서 처리 가능하다고 하면, 벌과금 $p(i, j)$와 $p(j, i)$는 다음과 같다.

$$p(i, j)=w_i(a+t_i)^2+w_j(a+t_i+t_j)^2 \qquad (2)$$
$$p(j, i)=w_j(a+t_j)^2+w_i(a+t_j+t_i)^2 \qquad (3)$$

식 (2) (3)에서 작업 i가 작업 j에 선행해야 할 때 즉 $p(i, j)<p(j, i)$의 충분조건식(sufficient conditions)을

유도할 수 있다.

$$w_i(a+t_i)^2+w_j(a+t_i+t_j)^2<w_j(a+t_j)^2+w_i(a+t_j+t_i)^2$$
$$w_jt_i(2a+t_i+2t_j)<w_it_j(2a+t_j+2t_i)$$

또는,

$$w_jt_i(2a+t_i+t_j)+w_jt_it_j<w_it_j(2a+t_j+t_i)+w_it_jt_i$$

따라서 충분조건식은,

$w_jt_i<w_it_j$과 $w_j<w_i$

$$\therefore w_i/t_i>w_j/t_j \quad \cdots\cdots (4)$$
$$w_i>w_j \quad \cdots\cdots (5)$$

식 (4)는 이미 알고 있듯이 WSPT(Weighted Shortest Processing Time)와 같은 결과임을 알 수 있다[9]. 식 (4)와 (5)가 동시에 만족되지 않는 경우에는 식 (4)만을 만족하는 작업순서 i와 j를 구한다. 식 (1)에서부터 작업순서 ij를 ji로 상호교환함으로써 벌과금감소액에서의 최대값은 다음과 같다.

$$p_{ij}=(w_j-w_i)t_it_j \quad \cdots\cdots (6)$$

3. 분지한계법(Branch and Bound Method)

제2장에서 설정된 함수식을 최소화하는 최적의 작업일정계획을 구하는 해법을 분지한계법을 이용하여 개발한다[10].

3.1 분지(branching) 방법

식 (4)와 (5)에 따라서 작업을 순서화하여 얻은 두 작업순서를 σ_1, σ_2라고 하자. σ_1과 σ_2의 처음 r번째까지가 똑같은 작업집합 B를 갖는다면, 나머지 집합 A는 최적작업순서에서 절대로 처음 r번째까지에는 일정계획되지 않는다. 단 A, B내에서 작업순서는 달라도 된다[1].

$$S=(B, A) \quad \cdots\cdots (7)$$

〈우선순위 Ⅰ〉

작업집합 B, A가 충분조건 식 (4) (5)에 따라서 똑같은 나열의 집합들을 갖는다면, 작업의 집합 B, A도 같은 순서로 최적일정계획된다.

일정계획나무(scheduling tree)의 분지단계에서 노드의 수를 줄일 수 있는 어떤 방법을 고려해 보자. 최적작업순서에서 어떤 작업들 사이에는 사전에 선행조건(priori precedence relationship)식이 어떤 조건에 따라서 주어질 수 있다[5]. 이 조건에 따라서 미리 정해진 선행조건을 가지고 〈우선순위 Ⅰ〉과 병행해서 분지하면 많은 계산량을 효과적으로 줄일 수 있다.

〈우선순위 Ⅱ〉

만약 작업 i와 j가 다음의 조건식을 만족하면 작업 i는 작업 j에 선행된다. 즉 $i \leftarrow j$이다.

$$t_j \geq t_i \text{과 } w_it_i \geq w_jt_j \quad \cdots\cdots (8)$$

식(8)을 살펴보면 $t_j \geq t_i$는 SPT(Shortest Processing Time) 작업순서규칙이며, $w_it_i \geq w_jt_j$는 LPT(Largest Processing Time) 개념의 작업순서규칙이다[9].

본 연구에서는 〈우선순위 Ⅰ〉과 〈Ⅱ〉를 사용하여서 일정계획나무의 노드를 분지해 나간다. 〈우선순위 Ⅰ〉을 먼저 적용시켜 나무의 노드를 임시로 분지해 나간 다음, 〈우선순위 Ⅱ〉를 다시 적용시켜 식 (8)의 조건식에 위배되는 노드는 다시 제거한다. 이렇게 분지된 노드에 대해서만 하한치 계산을 행한다.

3.2 하한치(lower bound)계산

하한치 LB(S)를 계산하기 위하여 다음의 수치예제를 들어보자.

〈표 1〉 수치예의 작업내용(by Townsend)

	J_1	J_2	J_3	J_4	J_5
t_i	10	4	6	1	2
w_i	2	5	7	3	1
w_i/t_i	1/5	5/4	7/6	3	1/2

〈표 1〉의 수치예를 가지고 하한치 계산을 설명해 보자. 식 (4) 즉 $w_i/t_i > w_j/t_j$에 따라서 작업순서를 구해보면 42351이다. 그리고 식 (5) 즉 $w_i > w_j$에 따라서 작업순서를 구해보면 32415이다. 식 (4)와 (5)의 작업순서가 일치하지 않으므로 식 (4)에 의한 작업순서 42351를 기준으로 가중비용치순서 32415를 고려하여 작업 ij를 상호교환하여 줄일 수 있는 최대 벌과금 감소액 p_{ij}를 식 (6)에 따라서 계산해 보자.

$42 \rightarrow 24$: $p_{42} = (w_2 - w_4)t_4t_2 = (5-3)(1)(4) = 8$
$43 \rightarrow 34$: $p_{43} = (w_3 - w_4)t_4t_3 = (7-3)(1)(6) = 24$
$23 \rightarrow 32$: $p_{23} = (w_3 - w_2)t_2t_3 = (7-5)(4)(6) = 48$
$51 \rightarrow 15$: $p_{51} = (w_1 - w_5)t_5t_1 = (2-1)(2)(10) = 20$

따라서 작업순서 42351에 대한 하한치 LB(42351)은 f(42351)에서 최대 벌과금감소액의 총액을 감한 값이다. 즉 LB(42351)=f(42351)−(8+24+48+20)이다. 여기서 f(42351)은 작업완료시간의 2차 벌과금함수식의 값이다.

$$f(42351) = \sum_{i=1}^{5} w_i C_i^2 = 3(1)^2 + 5(5)^2 + 7(11)^2 + 1(13)^2 + 2(23)^2$$
$$= 2202$$

그러므로 작업순서 42351의 하한치 LB(42351)은 2102이다.
위의 수치예를 통하여 알 수 있는 작업순서 σ의 하한치 LB(σ)는 다음 식 (9)와 같이 나타낼 수 있다.

$$LB = f(\sigma) - \sum_{(i,j)} P_{ij} \qquad (9)$$

단 (i, j)는 상호교환된 작업집합

3.3 수치예

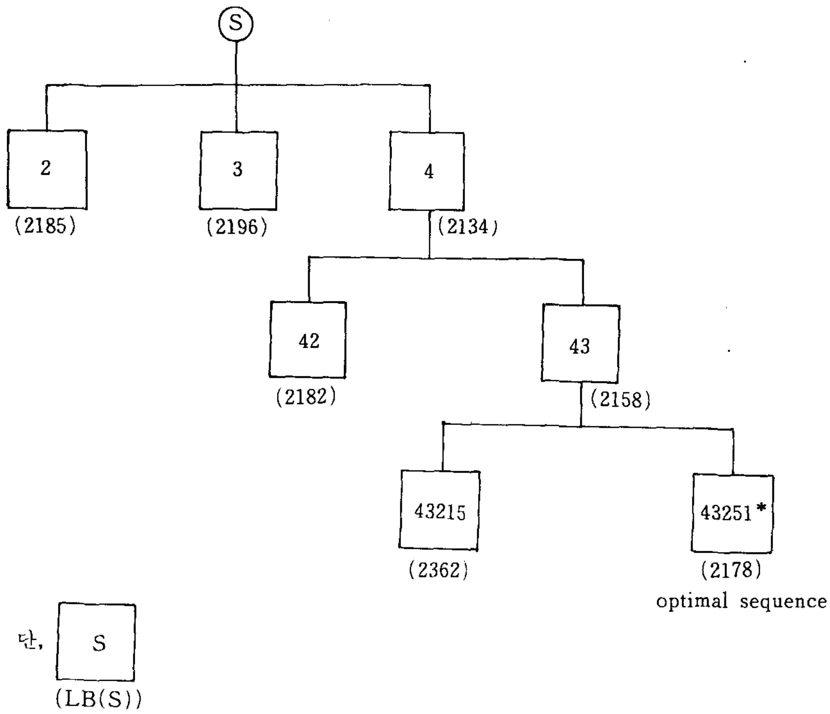
앞절에서 제시한 수치예(표1)를 가지고 본 연구에서 개발한 해법을 적용하여 보자.
식 (4)의 조건식에 따른 작업순서 σ_1은 42351이며, 식 (5)의 조건식에 따른 작업순서 σ_2는 32415이다.
따라서 .〈우선순위 Ⅰ〉에 따른 작업집합 B, A는 다음과 같다.

B= {2, 3, 4}
A= {1, 5}

그리고 〈우선순위 Ⅱ〉에 따른 작업들의 선행관계는 다음과 같다.

$2 \leftarrow 1$
$3 \leftarrow 1$
$4 \leftarrow 5$

〈우선순위 Ⅰ〉에 따른 집합 (B, A)와 〈우선순위 Ⅱ〉에 따른 선행관계를 고려한 분지와 3.2절에서 설명한 하한치계산을 하여 나타난 본 예제의 결과는 그림 1과 같다. 최적작업순서는 43251이다. 본 연구에서 채택한 탐색(searching) 방법은 최소의 하한치값을 가지는 노드만을 골라서 분지하는 Jump tracking방법이다. 그리고 다른 분지법의 기타 사항들은 일반적인 개념과 동일하다[7, 10].



S : 일정계획된 작업집합

〈그림 1〉 표 1의 수치예의 일정계획나무

4. 일반화된 2차 벌과금함수식

이제 식 (1)의 벌과금함수식을 일반화하여 일차식을 포함하는 이차식으로 표현해 보면 다음 식 (11)과 같이 나타낼 수 있다.

$$f(\sigma)=\sum_{i=1}^{n}(w_iC_i^2+w_i'C_i) \quad \cdots\cdots (10)$$

단, w_i'=작업 i의 또 다른 가중비용치

두 인접한 작업 ij에 대하여 작업 i가 작업 j를 선행하기 위한 조건을 식 (10)을 이용하여 구하면 다음과 같다. 2.2절에서 구한 절차와 동일하다.

$$w_i/t_i > w_j/t_j\text{과} \quad \cdots\cdots (11)$$

$$w_i+w_i'/t_i > w_j+w_j'/t_j \quad \cdots\cdots (12)$$

또한 작업 i와 j를 상호교환함으로써 절감할 수 있는 벌과금액은 다음 식과 같다.

$$P_{ij}'=[(w_j+w_j'/t_j)-(w_i+w_i'/t_j)]t_it_j \quad \cdots\cdots (13)$$

분지방법에서 식 (4) (5)를 식 (11) (12)으로 교체한 조건식으로 하여 〈우선순위 I〉을 적용하면 작업집합 B, A를 얻을 수 있다. 〈우선순위 II〉도 조건식 (8)을 다음 식 (14)로 교체하여서 작업들의 선행관계를 알 수 있다.

$$t_j \geq t_i\text{과} \quad w_i' \geq w_j'\text{과} \quad w_it_i \geq w_jt_j \quad \cdots\cdots (14)$$

하한치계산도 제3장에서 논의한 방법과 동일하며, 탐색방법도 Jump tracking이다. 기타의 내용도 제3장과

동일하다.

〈표 2〉를 예로 들어서 일반화된 2차 벌과금함수식에서의 최적일정계획을 구하여 보자.

〈표 2〉 표 1에서의 확장된 예(by Townsend)

	J_1	J_2	J_3	J_4	J_5
t_i	10	4	6	1	2
w_i	2	5	7	3	1
w_i'	18	8	1	2	15
w_i/t_i	1/5	5/4	7/6	3	1/2
w_i+w_i'/t_i	3(4/5)	7	7(1/6)	5	8(1/2)

식 (11)에 따르는 작업순서는 42351이며, 식 (12)에 따르는 작업순서는 53241이다. 따라서 작업 i와 j를 상호교환하여 얻을 수 있는 비용절감액 P_{ij}'는 다음과 같다.

$P'_{35}=(8\cdot 1/2-7\cdot 1/6)(6)(2)=16$
$P'_{25}=(8\cdot 1/2-\ 7\ )(4)(2)=12$
$P'_{45}=(8\cdot 1/2-\ 5\ )(1)(2)=\ 7$
$P'_{42}=(\ 7\ -\ 5\ )(1)(4)=\ 8$
$P'_{43}=(7\cdot 1/6-\ 5\ )(1)(6)=13$
$P'_{23}=(7\cdot 1/6-\ 7\ )(4)(6)=\ 4$

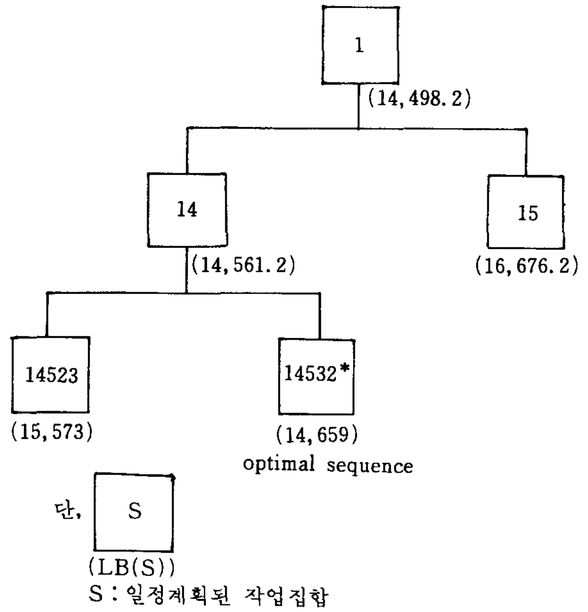
조건식 (11)에 따른 작업순서 σ_1은 14532이고, 조건식 (12)에 따른 작업순서 σ_2는 15423이다. 따라서 〈우선순위 Ⅰ〉에서의 작업순서집합 B, A는 다음과 같다.

B= {1, 4, 5}
A= {2, 3}

〈우선순위 Ⅱ〉에 따른 작업들의 선행관계는 조건식 (14)에 의하여 구할 수 있다.

$1\leftarrow 3$
$1\leftarrow 4$
$1\leftarrow 5$
$4\leftarrow 3$
$5\leftarrow 3$

〈우선순위 Ⅰ〉과 〈우선순위 Ⅱ〉에 의하여 분지한계법을 적용하면 〈표 2〉의 예제는 〈그림 2〉와 같은 일정계획 나무로 나타낼 수 있다. 이 예제를 통하여 알 수 있는 사실은 본 논문에서 개발한 최적 알고리즘이 Townsend [12]은 물론이고 Gupta와 Sen[5]이 개발한 알고리즘보다 훨씬 더 적은 노드로서 최적해를 얻을 수 있다는 사실이다.



〈그림 2〉 표 2 수치예의 일정계획나무

5. 결 론

본 연구에서는 단일기계에서 각 작업이 그 완료시간에 대한 2차 함수식의 벌과금을 부과하는 n개의 작업을 가지고 있는 일정계획문제를 다루었다. 이 벌과금 함수식에 대한 모델을 일반화된 것까지를 설정하였으며, 이들에 대하여 최적해를 구할 수 있는 분지한계법을 개발하였다.

이 기법중 분지방법을 기존의 방법과는 다른 복합적인 조건을 고려하여서 계산량을 대폭 줄일 수 있도록 노드를 최대한 제거하였다. 본 논문의 해법은 특히 일반화된 모델의 벌과금함수식에 대해서 계산량이 많이 감소됨을 수치예제를 통해 알 수 있었다.

앞으로의 연구과제는 매우 효율적인 최적근사해(heuristic)해법을 매우 적은 계산량으로 구할 수 있는 방법을 제시해야 하겠으며, 또 다른 일정계획문제의 매개변수(예를들면, 납기) 등을 고려한 더욱 더 현실적이고 복잡한 모델을 설정하여 이에 대한 해법을 제시하여야 하겠다.

참 고 문 헌

1. Bagga, P. C., and Kalra, K. R., "A Node Elimination Procedure for Townsend's Algorithm for Solving the Single Machine Quadratic Penalty Function Scheduling Problem," *Management Science, 26,* pp. 633~636, 1980.
2. Baker, K. R., *Introduction to Sequencing and Scheduling,* Wiley, New York, 1974.
3. Graves, S. C., "A Review of Production Scheduling," *OR, 29(4),* pp. 646~675, 1981.
4. Gulati, V. P., Gupta, S. K., and Mittal, A. K., "Unconstrained Quadratic Bivalent Programming," *European J. of Or, 15,* pp. 121~125, 1984.
5. Gupta, S. K., and Sen. T., "On a Single Machine Scheduling Problem with Quadratic Penalty Function of Completion Times : An Improved Branching Procedure," *Management Science, 30,* pp. 644~647. 1984.

6. Lawler, E. L., "Optimal Sequencing of a Single Machine Subject to Precedence Constraints," *Management Science, 19,* pp. 544~546, 1973.
7. McBride, R. D., and Yormark, J. S., "An Implicit Enumeration Algorithm for Quadratic Integer Programming," *Management Science, 26(3),* pp. 282~296, 1980.
8. McNaughton, R., "Scheduling with Deadlines and Loss Function," *Management Science, 6,* pp. 1~12, 1959.
9. Panwalker, S. S., and Iskander, W., "A Study of Scheduling Rules," *OR, 25(1),* pp. 45~61, 1977.
10. Salkin, H. M., *Integer programming,* Add-Wesley Publishing Company, Massachuseetts, 1975.
11. Szwarc, W., Posner, M. E., and Liu, J. J., "The Single Machine Problem with A Quadratic Cost Function of Completion Times." *Management Science, 34,* pp. 1480~1488, 1988.
11. Townsend, W., "The Single Machine Problem with Quadratic Penalty Function of Completion Times : A Branch and Bound Solution," *Management Science, 24,* pp. 530~534, 1978.