

수리가능 제품의 여유재고 비축문제 Spares Provisioning Problem for Repairable Items

유 형 근*
 김 만 식**
 김 종 수***

Abstract

The inventory problem of the repairable items is modeled as a queueing network for the purpose of determining the number of spares in a multi-echelon repair system subject to stochastic failure.

In this paper, we are considering a finite number of repairman at each base and the depot. After repair job has completed, the repaired items are returned to the base where they have originated. For the system, we identify the distribution of the total number of failed items which belongs to a base and develop a method to find spare inventory levels of the repairable items at each base to satisfy a specified minimum fill rate.

1 서 론

수리가능제품의 수리/공급 문제는 다단계 수리체계에 의존하고 있어 기지(Base)에서 작동중이던 제품에 고장이 발생하면 그 고장이 경고장(base repairable)인지 중고장(depot repairable)인지를 결정하여 경고장인 경우는 기지창(base repair center)에서, 중고장인 경우는 중앙창(depot repair center)에서 수리를 한 후 다시 제품이 속해 있던 기지로 반송한다. 이러한 수리가능제품의 여유제품의 효율적인 관리는 장비의 가동률을 높여주고 재고를 줄여줌으로써 비용의 절감을 도모할 수 있다. 따라서, 관리의 목적상 주어지는 최소요구충족률(minimum fill rate)을 만족하기 위하여 각 기지에서 보유하여야 할 여유제품수를 합리적이며 효율적으로 구하는 방법이 필요하다.

수리가능제품의 여유제품수를 결정하는 데는 최소요구충족률을 만족하며 최소의 재고를 가질 수 있도록 하는 방법과 재고량이 주어진 상태에서 시스템의 특성치(충족률, 기대 재고량, 기대 품절량)를 구하고 특성치 중에서 관리의 목적에 맞는 여유제품수를 결정하는 방법으로 대별된다.

METRIC[10]에서는 제품에 고장이 발생하였을 때 여유제품이 존재하면 즉시 교체하고, 여유제품이 존재하지 않으면 주문잔고(backorder)에 의한다. 고장난 제품의 정도에 따라 경고장과 중고장으로 구분한다. 경고장은 기지창(base repair center)에서, 중고장은 중앙창(depot repair center)에서 수리한다. 제품의 발주방식이 일대일 교체정책(S, S-1)에 의할 때 기지창과 중앙창에서 보유하고 있어야 할 여유 제품수를 결정한다. MOD-METRIC[12]은 METRIC 모형을 계층적 구조를 갖는 제품에 적용하여 일반화하였다. METRIC과 MOD-METRIC 모형은 무한한 수리능력을 전제조건으로 함으로써 대기행렬이 발생하지 않는 것으로 보았으나, 실제 문제에서는 수리능력이 제한되어 있으므로 현실을 잘 반영한 모형이라 할 수 없다.

Gross et al[4, 5, 6, 7, 8]은 각 수리창에 병렬로 존재하는 한정된 수리능력과 일정시점에서 고장이 날 수 있는 작동중인 제품수가 한정되어 있을 경우를 고려하였고, Albright[1, 2, 3]는 다수의 기지와 중앙창으로 구

*한양대학교 대학원

**한양대학교 교수

***한양대학교 조교수

접수일 : 1990. 10. 20.

성된 단일제품의 기계-수리 대기모형에서 평형상태의 확률분포를 이용하여 시스템의 특성치(기대 품질량, 주문잔고수)를 구하였다.

이들 모형 [1, 2, 3, 4, 6, 7, 8]은 METRIC과 MOD-METRIC 모형보다 현실적이지만 모의실험을 통해 결정변수인 여유제품수를 변경시키면서 시스템 특성치를 도출하고 도출된 특성치 중에서 목적에 부합하는 해를 구하는 방법이므로 많은 실험회수와 해의 도출시간이 길다.

기존의 모형에서는 여유제품을 기지창과 중앙창에서 보유하는 것으로 가정하였으나, 여유제품을 중앙창에서 보유하는 것은 기지의 충족률을 저하시키는 것을 의미하므로, 본 논문에서는 중앙창에서는 여유제품을 보유하지 않고 고장난 제품을 수리하여 기지로 반송시키는 역할만 하는 것으로 가정하였다. 또한, 중앙창 및 기지창의 한정된 수리능력 때문에 발생하는 대기행렬을 고려하여 각 지기의 관리목적상 주어지는 최소요구충족률을 만족하는 최소여유제품수를 수리해석적인 방법에 의하여 도출하였다.

2 모형설정

2.1 기호정의

독립변수는 Table 1에, 독립변수에 의존하는 종속변수는 Table 2에 나타내었다.

Table 1. Independent Variable

λ_j : 기지 j 에서 단위시간당 발생하는 고장수의 기대값. μ_j : 중앙창($j=0$)이나 기지창($j=1, 2, \dots, J$) 내의 각 수리창구에서 단위시간당 수리받는 평균 제품수. c_j : 수리창 j 의 수리창구수. γ_j : 기지 j 에서 작동중이던 제품이 고장이 났을 때, 그 고장이 경고장일 확률. α_j : 기지 j 의 최소 요구 충족률. T_j : 중앙창에서 기지 j 까지 반송시간.

Table 2. Dependent Variable

Decision Variable
S_j : 기지 j 에서 보유하여야 할 최소 여유제품수.
Derived Variable
FR_j : 기지 j 의 충족률. $P_j(n)$: 임의의 시점에 기지창 j 에서 수리중인 제품수가 n 인 확률. $P_o(N)$: 임의의 시점에 중앙창에서 수리중인 제품수가 N 인 확률. $P_{jo}(K_j)$: 중앙창에서 수리중인 제품중 기지 j 에서 수송되어진 제품수가 K_j 인 확률. $P_{oj}(K_j, \tau)$: 중앙창에서 기지 j 로 반송중인 제품수가 K_j, τ 인 확률. $P(Z_j)$: 임의의 시점에 기지 j 에서 발생중인 총고장수 Z_j 의 확률.

2.2 모형전개

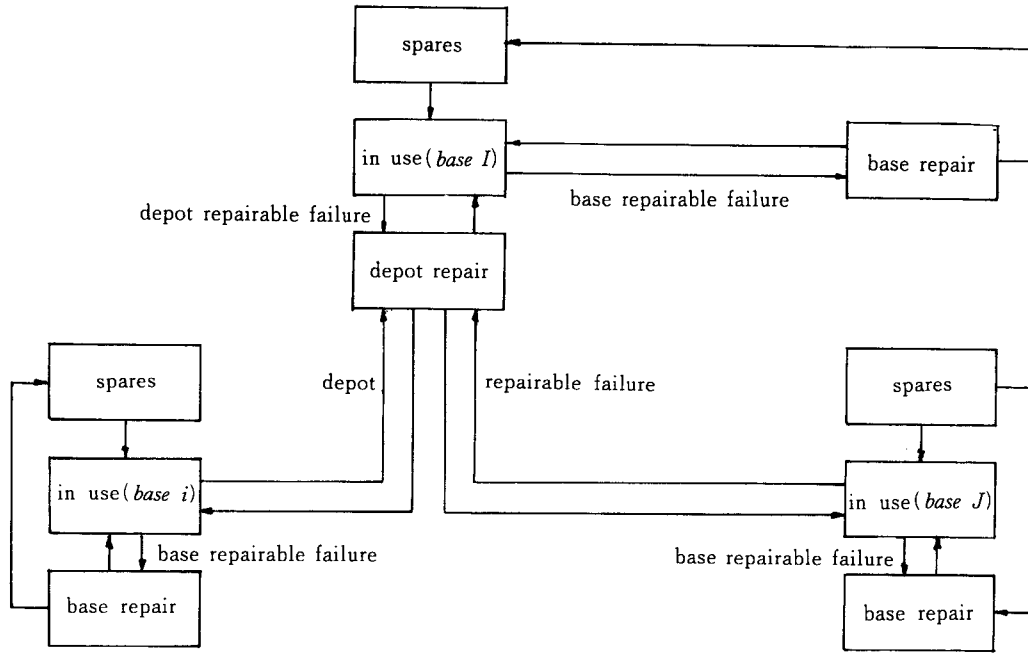


Figure 1. Schematic representation of flow of repairable items

Figure 1에서와 같이 J 개의 기지와 J 개의 기지창, 하나의 중앙창으로 구성된 시스템을 고려하자. 기지창에서는 그 기지에서 발생한 고장중 경고장 제품만을 수리하고 중고장 제품은 중앙창으로 수송되어 수리된다.

각 기지의 수요를 발생시키는 고장의 시간간격은 기지 j 에서 평균 $1/\lambda_j$ 를 갖는 지수분포에 따른다. 고장중에서 경고장은 γ_j 의 비율로 중고장은 $(1-\gamma_j)$ 의 비율로 발생한다. 즉, 기지창 j 에 도착하는 경고장제품의 발생 시간간격 분포는 평균 $1/\gamma_j \lambda_j$ 를 갖는 지수분포에 따른다. 보관창고에 여유제품이 존재하면 시간의 지체없이 즉시 교체하며, 여유제품이 없을 때는 기지창이나 중앙창에서 수리를 마치고 기지에 입고될 때까지의 시간이 지연된다.

기지에서 작동을 하던 제품에 고장이 발생하여 기지창이나 중앙창에서 수리중이거나 중앙창에서 수리를 마치고 기지로 반송중인 제품은 기지의 관점에서 그 제품은 가용하지 않으므로 고장난 제품으로 처리되어야 한다. 시스템이 안정상태에 도달한 후 임의의 시점에서 기지 j 에서 고장난 제품수의 분포는 기지창 j 에서 수리중인 제품수와 중앙창에서 수리중인 중고장 제품중 기지 j 로부터 수송되어진 제품수 및 중앙창에서 수리를 마치고 기지 j 로 반송중인 제품수의 분포를 합성하여 구할 수 있다.

2.3 수리중인 경고장 제품수의 분포

기지창 j 에 c_j 의 수리창구가 있을 때, 경고장의 발생시간 간격분포는 평균 $1/\lambda_j r_j$ 인 지수분포에 따르고, 수리시간이 평균 $1/\mu_j$ 인 지수분포에 따른다고 하면, 기지창 j 에서 수리중인 제품수가 n 일 확률 $P_j(n)$ 는 M/M/ c_j 모형에 의하여 식 (1)이 된다.

$$P_j(n) = \begin{cases} \frac{(\lambda_j \gamma_j)^n}{n! (\mu_j)^n} P_j(0) & (1 \leq n < c_j) \\ \frac{(\lambda_j \gamma_j)^n}{(c_j)^{(n-c_j)} c_j! (\mu_j)^n} P_j(0) & (n \geq c_j) \end{cases} \quad (1)$$

$P_j(0)$ 를 구하기 위하여 경제조건(식 (2))을 적용하면

$$P_j(0) \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda_j \gamma_j)^n}{n! (\mu_j)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda_j \gamma_j)^n}{(c_j)^{(n-c_j)} c_j! \mu_j^n} \right] = 1 \quad (2)$$

식 (3)이 된다.

$$P_j(0) = \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda_j \gamma_j)^n}{n! (\mu_j)^n} + \frac{1}{c_j!} \left(\frac{\lambda_j \gamma_j}{\mu_j} \right)^{c_j} \frac{c_j \mu_j}{(c_j \mu_j - \lambda_j \gamma_j)} \right]^{-1} \quad (3)$$

2.4 수리중인 중고장 제품수의 분포

기지 j 에서 발생한 단위시간당 중고장 제품수의 분포는 모수 $(1-\gamma_j)\lambda_j$ 를 갖는 포아송분포에 따르고, 각 기지에서 발생한 중고장 제품수의 분포는 서로 독립적이며 동일한 포아송분포에 따르므로 단위시간당 중앙창으로 수송되어지는 중고장 제품수의 확률분포는 $\sum(1-\gamma_j)\lambda_j$ 를 갖는 포아송 분포에 따른다. 중앙창에 c_0 개의 수리창구가 있다고 하면, 중앙창은 $M/M/c_0$ 대기행렬 모형으로 분석할 수 있다. 시스템이 안정상태에 도달한 후 임의의 시점에서 중앙창에서 N 개의 중고장제품이 존재할 확률 $P_0(N)$ 은 식 (4)로 표현된다.

$$P_0(N) = \begin{cases} \left(\frac{\sum_{j=1}^J (1-\gamma_j) \lambda_j}{N! (\mu_0)^N} \right)^N P_0(0) & , (N < c_0) \\ \frac{\left(\frac{\sum_{j=1}^J (1-\gamma_j) \lambda_j}{(c_0)^{(N-c_0)} c_0! (\mu_0)^N} \right)^N P_0(0)}{c_0! (\mu_0)^N} & , (N \geq c_0) \end{cases} \quad (4)$$

경제조건($\sum_{N=0}^{\infty} P_0(N) = 1$)에 의하여 $P_0(0)$ 는

$$P_0(0) = \left[\sum_{N=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\sum_{j=1}^J (1-\gamma_j) \lambda_j}{N! (\mu_0)^N} \right)^N}{c_0!} + \frac{1}{c_0!} \left[\frac{\sum_{j=1}^J (1-\gamma_j) \lambda_j}{\mu_0} \right]^{c_0} * \frac{c_0 \mu_0}{c_0 \mu_0 - \sum_{j=1}^J (1-\gamma_j) \lambda_j} \right]^{-1} \quad (5)$$

중앙창에서 수리된 중고장제품 중에서 기지 j 로 부터 수송되어온 제품수의 분포를 찾기 위하여 중앙창에 N 개의 제품이 존재한다고 할 때, 기지 $j(j=1, 2, \dots, J)$ 로 부터 수송되어온 온 제품수를 각각 K_j 개라 하고, 각 기지로 부터 수송되어 온 총 고장수와 기지 j 에서 수송되어 온 중고장수의 비율인 $((1-\gamma_j)\lambda_j)/(\sum(1-\gamma_j)\lambda_j)$ 를 θ_j 라 치환하고 수리중인 중고장 제품수가 총 N 개일 때 기지 $j(j=1, 2, \dots, J)$ 에서 수송되어온 제품수가 각각 K_j 인 조건부 확률 $P(K_1, \dots, K_j, \dots, K_J | N)$ 을 $P(K | N)$ 라 놓으면

$$P(K | N) = \binom{N}{K_1, \dots, K_j, \dots, K_J} \theta_1^{K_1} \dots \theta_j^{K_j} \dots \theta_J^{K_J}$$

N 와 $K_1, \dots, K_j, \dots, K_J$ 의 결합 확률분포 $P(K_1, \dots, K_j, \dots, K_J, N)$ 는

$$P(K_1, \dots, K_j, \dots, K_J, N) = P_0(N) \binom{N}{K_1, \dots, K_j, \dots, K_J} \theta_1^{K_1} \dots \theta_j^{K_j} \dots \theta_J^{K_J},$$

$$K_j = 0, 1, \dots$$

이다.

이 때 $P_{j0}(K_j)$ 는 (6)과 같이 구할 수 있다.

$$P_{j0}(K_j) = \sum_{N=0}^{\infty} P_0(N) \binom{N}{K_j} \theta_j^{K_j} (1-\theta_j)^{N-K_j}, \quad (6)$$

$$j=1, 2, \dots, J$$

$$K_j=0, 1, \dots$$

2.5 중앙창에서 기지로 반송중인 제품수의 분포

중앙창에서 수리된 제품이 임의의 시점 t에서 기지로 반송하는 제품의 시간간격분포는 중고장 제품의 발생 시간간격분포와 같다[5].

각 기지에서 발생한 중고장제품이 중앙창에 도착하는 시간간격 분포는 $1/\sum_{j=1}^J (1-\gamma_j)\lambda_j$ 를 평균으로 갖는 지수분포를 한다. 모든 기지로 부터 중앙창에 도착한 총 중고장 제품수와 기지 j로 부터 중앙창에 도착한 중고장 제품수의 비율은 $(1-\gamma_j)\lambda_j/\sum_{j=1}^J (1-\gamma_j)\lambda_j$ 이다. 중앙창에서 수리를 마치고 반송되는 시간간격은 평균 $1/(1-\gamma_j)\lambda_j$ 인 지수분포를 한다. 또한, 중앙창으로 부터 기지 j까지의 반송시간을 T_j 라 하면, 시스템이 평형상태에 도달한 후 임의의 시점에 반송중인 수리된 제품수의 분포는 반송시간 동안에 기지에서 발생한 중고장 제품수의 분포와 같다. 반송시간 동안에 기지에서 발생한 중고장 제품수를 $K_{j, T}$ 라 할 때, $K_{j, T}$ 의 확률분포 $P(K_{j, T})$ 는

$$P_{oj}(K_{j, T}) = \frac{((1-\gamma_j)\lambda_j T_j)^{K_{j, T}} * \text{EXP}(-(1-\gamma_j)\lambda_j T_j)}{(K_{j, T})!}, \quad (7)$$

$K_{j, T}=0, 1, 2, \dots$

2.6 최저 서비스수준의 고려

기지창이나 중앙창에서 수리중이거나, 수리후 기지로 반송중인 모든 제품들은 기지의 관점에서는 고장난 제품수에 포함되어야 한다. 기지 j의 고장난 제품의 총 수(Z_j)의 분포 $P(Z_j)$ 는 기지창에서 수리중인 제품수와 중앙창에서 수리중인 제품수, 중앙창에서 수리 후 기지로 반송중인 제품수의 결합분포이다. Z_j 의 확률 $P(Z_j)$ 는 CONVOLUTION에 의하여 (8)과 같이 구할 수 있다.

$$P(Z_j) = \sum_{K_{j,T}} \sum_{K_j} (K_j) * P_{oj}(K_{j, T}) * P_j(Z_j - K_j - K_{j, T}) \quad (8)$$

$K_j=0, 1, 2, \dots, K_{j, T}=0, 1, 2, \dots$
단, $Z_j - K_j - K_{j, T} \geq 0$

임의의 시점에서 기지 j에서 고장난 제품의 총 수 (Z_j)가 기지 j의 여유제품수 (S_j)보다 크면 ($Z_j > S_j$), 기지 j에는 품질이 발생한다. 기지 j의 최저요구충족률(α_j)은 기지 j에서 품질이 발생하지 않을 확률을 의미한다. 그러므로, 최저요구충족률을 높게 설정하면 여유제품을 많이 보유하여야 한다.

각 기지의 주어진 최소요구충족률을 만족하면서 재고를 최소화할 수 있는 여유제품수를 결정하기 위한 기지 j의 충족률(FR_j)은 최소요구충족률(α_j)보다 커야 하므로

$$FR_j = \text{Pr}\{Z_j \leq S_j\} = \sum_{Z_j=0}^{S_j} P(Z_j) \geq \alpha_j \quad (9)$$

식 (9)를 만족하는 기지 j의 여유제품수 (S_j)의 대안 중에서 최소의 S_j 가 기지 j에서 보유하여야 할 최소의 여유제품수이다.

3 수치예제

두개의 기지와 기지창, 한개의 중앙창으로 구성되어진 시스템을 고려하자.

입력자료($\lambda_1=10, \lambda_2=20, \gamma_1=0.6, \gamma_2=0.75, T_1=2, T_2=3, c_1=2, c_2=2, c_3=2, \mu_1=25, \mu_2=30, \mu_3=2$)에 의하여 주어진 문제에서 기지의 최소요구충족률을 각각 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 0.95, 0.97, 0.99로 변경하면서 각 기지에서 보유하여야 할 최소의 여유제품수와 그 때의 충족률은 Figure 2에 나타나 있다.

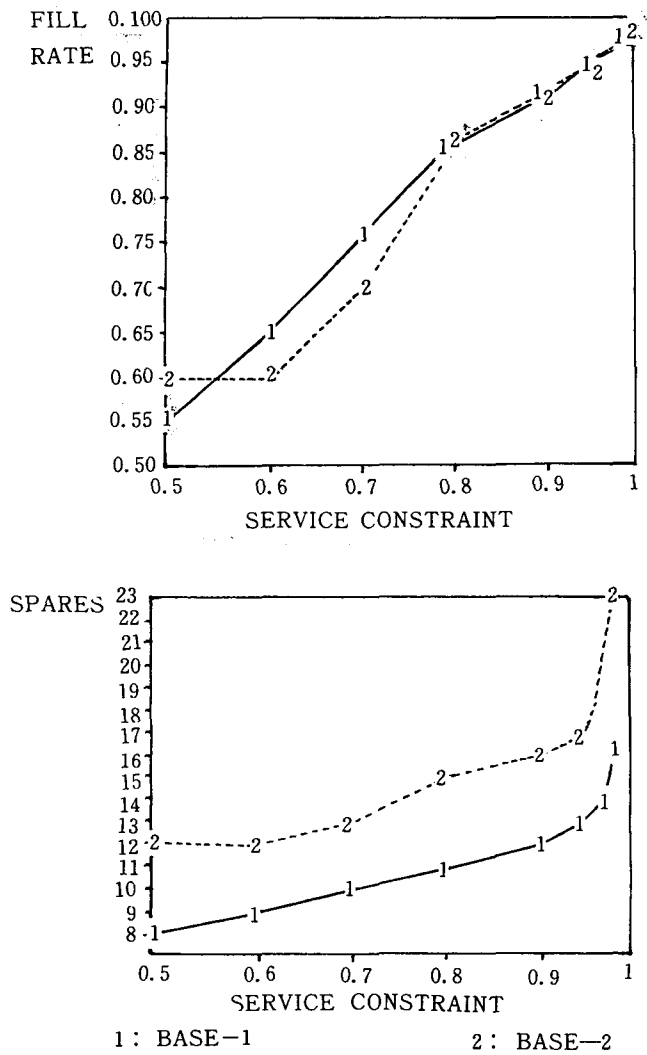


Fig 2. Graphical representation of output information

4 결론 및 향후 연구과제

기지에서 작동중이던 제품에 고장이 발생하여 기지창이나 중앙창에서 수리받는 중이거나 중앙창에서 수리를 마치고 기지로 반송중인 제품수의 확률을 대기행렬이론에 의하여 구하고, 3개의 확률을 CONVOLUTION TECHNIQUE에 의하여 합성하여 각 기지마다 책정되어진 최소요구충족률을 만족하는 최소여유제품수를 결정하였다.

기존의 재고수준이 주어진 상황하에서 시스템의 특성치를 유도하고 특성치 중에서 관리의 목적에 부합하는 여유제품수를 결정하는 모형과는 반대로 계산시간이 단축되며, 각 기지에 주어진 최소요구충족률을 만족하는 최소여유재고수준을 직접 구하므로 시스템을 관리하는 입장에서 의사결정이 용이하다.

그러나, 현실문제에 정확히 부합되기 위해서는 각 기지에 작동중인 on-line 제품수가 한정되어 있는 경우와 극 기지간의 제품교환이 허용되는 것을 고려하는 방법에 대한 많은 연구가 이루어져야 할 것이다.

참 고 문 헌

1. Albright, S. C., "An Approximation to the Stationary Distribution of a Multi-Echelon Repairable Item Inventory System with Finite Sources and Repair Channels," *Naval Research Logistics*, 36, pp. 179-195, 1989.
2. Albright, S. C. and Soni, A., "An Approximation to the Stationary Distribution of a Multidimensional Markov Process," *IIE Transactions*, 20, pp. 111-118, 1988.
3. Albright, S. C. and Soni, A., "Markov Multi-Echelon Repairable Inventory System," *Naval Research Logistics*, 35, pp. 49-61, 1988.
4. Gross, D., "On the Ample Service Assumption of Palm's Theorem in Inventory Modelling," *Management Science*, 28, pp. 1065-1079, 1982.
5. Gross, D. and Harris, C. M., *Fundamentals of Queueing Theory*, Wiley, New York, 1974.
6. Gross, D. and Ince, J. F., "Spares Provisioning for Repairable Items : Cyclic Queues in Light traffic," *AIEE Transactions*, 10, pp. 307-314, 1978.
7. Gross, D., Kahn, D. H. and Marsh, J. D., "Queueing Models for Spares Provisioning," *Naval Research Logistics Quarterly*, 24, pp. 521-536, 1977.
8. Gross, D., Miller, D. R. and Soland, R. M., "A Closed Queueing Network Model for Multi-Echelon Repairable Item Provisioning," *IIE Transactions*, 15, pp. 344-352, 1983.
9. Kaplan, A. J., "Mathematics for SESAME Model," *Technical Report No. TR 80-2*, U. S. Army Inventory Research Office, Philadelphia, PA, 1980.
10. Kruse, K. W. and Kaplan, A. J., "On a Paper by Simon," *Operations Research*, 21, pp. 1318-1322, 1973.
11. Muckstadt, J. A., "A Model for a Multi-Item, Multi-Echelon, Multi-Indenture Inventory System," *Management Science*, 20, pp. 472-481, 1973.
12. Shanker, K., "Exact Analysis of a Two-Echelon Inventory System for Recoverable Items under Batch Inspection Policy," *Naval Research Logistics Quarterly*, 23, pp. 579-601, 1981.
13. Sherbook, C. C., "METRIC : A Multi-Echelon Technique for Recoverable Item Control," *Operations Research*, 16, pp. 122-141, 1968.
14. Sherbook, C. C., "VERI—METRIC : Improved Approximations for Multi-Indenture, Multi-Echelon Availability Models," *Operations Research*, 34, pp. 311-319, 1986.