不確實한 arc容量制約式들을 考慮한 네트워크問題의 最適化
－Option of Network Flow Problem Considering Uncertain Arc Capacity Constraints－

朴 柱 寧*
宋 瑞 日**

Abstract

In this paper we deal with the miniaml cost network flow problem with uncertain arc capacity constraints. When the arc capacities are fuzzy with linear L－R type membership function, using parametric programming procedure, we reduced it to the deterministic minimal cost network flow problem which can be solved by various typical network flow algorithms. A modified Algorithm using the Out-of-kilter algorithm is developed.

Ⅰ. 序 論

線型計劃모델 또는 統計學的인 모델과 같이 確定的인 모델로 定式化되어진 多樣한 意思決定 문제에 있어서 많은 理論的인 發展이 있었다. 그러나 둘이 確定的모델 또는 統計的인 모델을 使用했던지간에, 그것은 문제의 實體를 표현하기에 충분하지 않았다. 왜냐하면 意思決定者의 대부분의 實際狀況에서는 假定되어진 古典的인 意思決定理論에 있어서 정상적인 방법으로 目的函數와 制約式들을 正確하게 列擧할 수 없기 때문이다.

그것이 純粹하게 確定的이든 確率的인 接近方法이 던지간에 어떤것도 應用되어 질 수 없다. 이유는 그러한 상황에서 몇몇의 計量値들은 "보다 더 큰", "근재에", 혹은 "더 작은" 이와같은 論理學的인 項으로만 표현되어 질 수 있기 때문이다.

이러한 境遇에 있어서 fuzzy set theory는 아마 도움이 될 것이다. Zadeh[11]는 그러한 문제들을 取扱하는 하나의 방법으로서 fuzzy subsets의 槪念들 提示했다. Bellman과 Zadeh의 論文 "不確實한 狀況下에서의 意思決定"(1970)[1]에서는 意思決定理論과 그것의 應用分野에 대해서 상당한 研究가 이루어졌다. Bellman과 Zadeh의 방법을 이용하여, 퍼지數理計劃法에 關聯된 많은 論文들이 퍼지線型計劃法[12], 퍼지輸送問題[3] 그리고 퍼지네트워크 흐름문제[14] 등과 같이 쓰여졌다.

實生活에 있어서 네트워크 문제에 曖昧模糊함(fuzziness)이 存在한다. 예를들어, 공장의 供給과 都賣商의 需要는 아마도 生産分配 문제에 있어서 매우 模糊할 것이다. 거기에는 아마도 供給者들로부터 사기위한 原料의 量에 不安定性이 존재할 것이다. 生産分配 문제는 네트워크 문제로서 定式化 되어질 수 있다. 공장과 都賣商들은 네트워크 문제에서 原産地와 目的地로 각각 對應된다. 또한 供給과 需要는 arc들의 容量에 對應된다. 그러므로 不確實한 arc용량을 갖는 最小費用 네트워크 흐름 문제는 傳統的인 最小費用 네트워크 흐름문제 보다 휠씬 더 實質的이다.

본 研究에서는 不確實한 arc容量 制約式을 갖는 最小費用 네트워크 흐름문제를 處理한다. arc容量들이 線型 L－R 形態의 멤버쉽 函數를 가지고 불확실할 때, 母數計劃法(Parametric Programming)의 節次[2]를 利用하여 Out-of-Kilter 알고리즘과 같은 典型的인 네트워크 흐름 알고리즘에 의해서 풀수 있는 確定的인 最小費用 네트워크 흐름문제로 轉換하였다.

* 蔚山專門大學 工業經營科
** 東亞大學校 産業工學科
접수 1990년 4월 20일

2. 퍼지集合과 멤버쉽 函數

퍼지 意思決定 문제에 대해서 Bellman과 Zadeh에 의해서 提示된 一般的인 構造는 다음과 같다. X는 可能한 代案들의 集合이라고 하자. 퍼지目標 G는 部分集合으로서 그들의 멤버쉽 函數에 의해서 式(2.1)과 같이 定意되어진다.

$$G : X \rightarrow [0,\ 1] \tag{2.1}$$

퍼지制約式 C는 X의 部分集合으로서 式(2.2)와 같이 定意되어진다.

$$C : X \rightarrow [0,\ 1] \tag{2.2}$$

퍼지目標 G와 퍼지制約式 C로부터 產出되는 퍼지意思決定 D는 이들의 交集合니다. 즉,

$$D : G \cup C \tag{2.3}$$

여기서

$$\begin{aligned} \mu_D(x) &= \mu_G(x) \cup \mu_C(x) \\ &= \min(\mu_G(x),\ \mu_C(x))\ ;x \in X, \end{aligned} \tag{2.4}$$

三各型 멤버쉽函數[13],를 가지는 퍼지數(Fuzzy Number)는 式(2.5)와 같은 멤버쉽함수 $\mu_n(x)$를 갖는 垂直線의 퍼지 부분집합으로 定意된다.

$$\begin{array}{cl} 0 & x<a_n \\ (x-a_n)/(b_n-a_n), & a_n<x<b_n \\ (c_n-x)/(c_n-b_n), & b_n<x<c_n \\ 0 & ,\ x<c_n \end{array} \tag{2.5}$$

本 研究에서는$(a_n,\ c_n)$을 $\tilde{n}$의 support로서 言及한다 : a_n은 下限값이고, b_n은 形式的인 값이고, c_n은 b_n과 거의 같은 퍼지 部分集合 $\tilde{n}$의 上限값이다.

두개의 퍼지數(fuzzy number) $\tilde{m}=(a_m,\ b_m,\ c_m)$과 $\tilde{n}=(a_n,\ b_n,\ c_n)$ 算術的인 演算은 Zadeh의 擴張原理(Extension Principle)[13]으로부터 誘道된다. 여기서 μ_m과 μ_n을 各各의 멤버쉽함수라 하자. 그러면 $\tilde{m}+\tilde{n}$의 멤버쉽함수의 합 μ_{m+n}은 식(2.6)과 같이 정의된다.

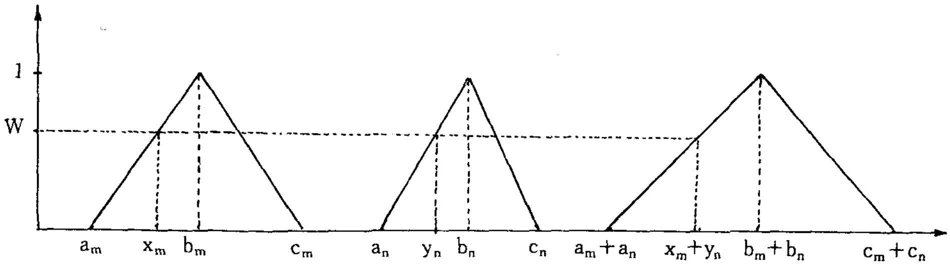
$$\begin{aligned} \mu_{m+n}(z) &= \max_{z=x+y}\min(\mu_m(x),\ \mu_n(y)) \\ &= \max_{x}\min(\mu_m(x),\ \mu_n(z-x)) \end{aligned} \tag{2.6}$$

本 硏究는 μ_{m+n}의 典型的인 形態를 찾기위해서 $0<w<1$인 w의 實數값을 考慮하고, $x_m \in [a_m,\ b_m]$, $y_n \in [a_n,\ b_n]$을 가지는 x_m과 y_n을 對等하게 한다. 그래서 $\mu_m(x_m)={}_n(y_n)=w$,

$z^*=x_m+y_n$이라하자. 그리- $z^*=x+y$인 任意의 座標 x와 y를 考慮해 보면, 만일 $x<x_m$, $y>y_n$이면 $\mu_m(x)<w$, 그래서 $\min(\mu_m(x),\ \mu_n(y))<w$. 만일 $x>x_m$, $y<y_n$일 때도 같은 結果를 가진다. 따라서 그것은 式(2.7)과 같은 사실을 따라야 한다.

$$\begin{aligned} \mu_{m+n}(x_m+y_n) &= \mu_{m+n}(z^*) = \max_{z=x+y}\min(\mu_m(x),\ \mu_n(y)) = w \\ &= \mu_m(x_m) = \mu_n(y_n). \end{aligned} \tag{2.7}$$

이 결과는 $[a_m+a_n,\ b_m+b_n]$ 區間에서 定意된 멤버쉽함수 μ_{m+n}이 增加하는 부분에 대해서만 維持된다. 區間$[b_m+b_n,\ c_m+c_n]$의 減少하는 부분에 대해서도 이와 類似한 結果가 維持된다.



〈그림 1〉 線型 L—R 멤버쉽函數를 갖는 퍼지 number $\tilde{m}$과 $\tilde{n}$, 그리고 그 合 $\tilde{m}+\tilde{n}$에 대한 멤버쉽函數의 形態

m+n의 멤버쉽함수는 이제 쉽게 構成할 수 있다.;〈그림 1〉을 보면 그것은 삼각형이기 때문에

$$\tilde{m}+\tilde{n}=[a_m+a_n,\ b_m+b_n,\ c_m+c_n]$$

이다.

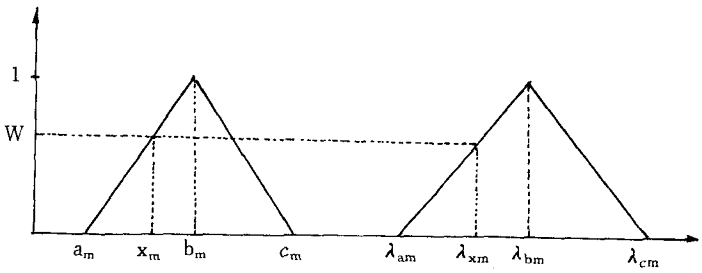
퍼지數(fuzzy number)의 스칼라(scalar)곱 $\lambda\tilde{m}$은 또한 Zadeh의 擴張原理로 부터 誘導되어 진다. $\lambda\tilde{m}$에 대한 멤버쉽함수는 式(2.8)과 같다.

$$\mu_{\lambda\cdot m}(x)=\mu_m(x/\lambda),\ A\lambda\in R-\{0\}. \tag{2.8}$$

이제 $\lambda\tilde{m}$의 멤버쉽함수도 쉽게 構成할 수 있다; 〈그림 2〉를 보면 이것 또한 삼각형 이기 때문에

$$\lambda\tilde{m}=[\lambda a_m,\ \lambda b_m,\ \lambda c_m]. \tag{2.9}$$

明確하게도, 母數들(a_m+a_n은 support의 下限값이다. 같이)과 멤버쉽함수(triangularity)의 형태에 있어서 變動이 없음을 알수 있다.



〈그림 2〉 퍼지 number m에 대한 scalar 곱 λm의 멤버쉽함수 形態

(정리 1) 線型 멤버쉽函數는 式(2.10)과 같이 정의된다;

$$z=\sum_i \sum_j \tilde{C}_{ij}\, x_{ij} \tag{2.10}$$

여기서 $\tilde{C}_{ij}$의 각각은 式(2.11)과 같은 멤버쉽함수를 갖는 퍼지母數(parameter)이다.

$$\mu_C(C_{ij})=\begin{cases}1-\dfrac{|\alpha_{ij}-C_{ij}|}{P_{ij}}, & \alpha_{ij}-P_{ij}<\alpha_{ij}+P_{ij}\\ 0 & ,\ \text{그밖에}\end{cases} \tag{2.11}$$

그러면 線型函數 z의 멤버쉽함수는 式(2.11)과 같이 정의된다.

$$\mu_z(z)=\begin{cases}1-\dfrac{|z-\Sigma\Sigma\,\alpha_{ij}X_{ij}|}{\Sigma\Sigma P_{ij}X_{ij}}, & x_{ij}\neq 0\\ 0 & ,\ \text{그밖에}\end{cases} \tag{2.12}$$

여기서

$\sum_i \sum_j P_{ij}X_{ij} < | z - \sum_i \sum_j \alpha_{ij} X_{ij} |$ 일때 $\mu_Z(z) = 0$.

이 證明은 간단하다. 式(2.10)은 퍼지數의 스칼라곱과 그들의 合으로 구성되어 있다. 그것들의 멤버쉽함수는 퍼지數들의 算術演算에 의해서 쉽게 誘道할 수 있다.

3. 불확실한 아크(arc) 용량을 갖는 최소비용 네트워크 문제

$N = \{1, 2, \cdots, m\}$인 유한집합의 마디들과 N 속에서 마디들이 서로 짝으로 結合하는 directed 容量들 $S = \{(i, j), (k, l), \cdots, (s, t)\}$의 집합으로 구성되는 어떤 directed 네트워크 G를 考慮해 傳統的인 最小費用 네트워크 흐름 문제는 다음과 같이 標示할 것이다. 最小費用으로 需要를 滿足시키기 위해서 네트워크를 통하여 배(ship)로 供給할 수 있다.

數理學的으로 이 문제를 써 보면 (여기서 Σ는 arc들이 존재하는 위에서 취해진다). 다음과 같다.

$$\min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij}X_{ij} \tag{3.1}$$

$$\text{s.t} \sum_{j=1}^{m} X_{ij} - \sum_{k=1}^{m} X_{Ki} = 0, \; i = 1, 2, \cdots, m \tag{3.2}$$

$$\ell_{ij} \leq X_{ij} \leq U_{ij}, \; i, j = 1, 2, \cdots, m \tag{3.3}$$

制約式 (3.3)은 각 arc들의 흐름용량을 나타내고, 式(3.2)는 흐름 保存制約若으로 불리어진다. 흐름 保存(folw conservation)은 네트워크상에서 創造도 파괴도 되지 않는 흐름을 가리킨다. 式(3.2)에서 $\sum_{j=1}^{m} X_{ij}$는 마디 i밖의 總 흐름을 나타낸다. 반면에 $\sum_{k=1}^{m} X_{ki}$는 마디 i내에서의 총 흐름을 나타낸다.

不確實한 容量을 가지고 最小費用 네트워크 흐름문제는 다음과 같이 表現할 수 있다.

$$\text{Min} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} X_{ij} \tag{3.4}$$

$$\sum_i X_{ij} - \sum_k X_{ki} = 0, \; i = 1, 2, \cdots, m \tag{3.5}$$

$$l_{ij} < X_{ij} < U_{ij}, \; i, j = 1, 2, \cdots, m \tag{3.6}$$

여기서 "~"는 許容限界의 意味로서 "曖昧模糊함(fuzziness)"을 나타낸다. 制約式들과 目標는 明確하지가 못하다. 그러나 퍼지집합은 그들의 멤버쉽함수들에 의해서 特徵지어진다.

式(3.7)과 같은 函數들을 假定해 보면, 퍼지목표의 멤버쉽함수는

$$\mu_G(z) = \begin{cases} 1 - to/po, & z = zo + to, \; to > 0, \; to < po \\ 1 & , z < z0 \\ 0 & , \text{그밖에} \end{cases} \tag{3.7}$$

여기서 zo는 目的函數값에 대한 成就希望水準이고, po는 水準 zo의 最大한 收用할 수 있는 間隔이다.

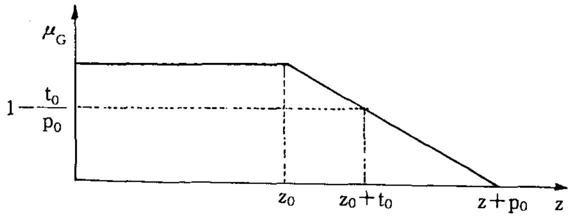
이와 類似하게 흐름 容量制約式들에 대한 멤버쉽함수는 式(3.8)과 같이 定意된다.

$$\mu_L(l_{ij}) = \begin{cases} 1 - \dfrac{tij}{pij}, & l_{ij} = l_{ij}^{\circ} - t_{ij}^{l}, \; t_{ij}^{l} > 0, \; t_{ij}^{l} > 0, \; t_{ij}^{l} < P_{ij}^{l} \\ 1 & , l_{ij} > l_{ij}^{\circ} \\ 0 & , \text{그밖에} \end{cases} \tag{3.8}$$

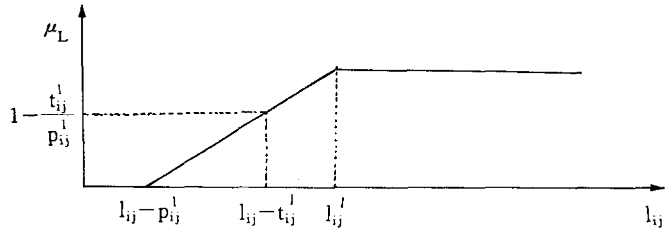
그리고

$$\mu_U(u_{ij}) = \begin{cases} 1 - \dfrac{t_{ij}^{u}}{P_{ij}}, & u_{ij} = u_{ij}^{\circ} + t_{ij}^{u}, \; t_{ij}^{u} > 0, \; t_{ij}^{u} < p_{ij}^{u} \\ 1 & , u_{ij} < l_{ij}^{\circ} \\ 0 & , \text{그밖에} \end{cases} \tag{3.9}$$

여기서 l_{ij}^{0}와 u_{ij}^{0}는 l_{ij}와 u_{ij}의 각각에 대한 成就希望水準이고, t_{ij}^{u}와 t_{ij}^{l}은 水準 u_{ij}°와 l_{ij}^{0}의 各各에 대해서 最大한 收用할 수 있는 間隔을 나타낸다. (〈그림 3,4,5〉 參照)



〈그림 3〉 目的函數의 멤버쉽函數

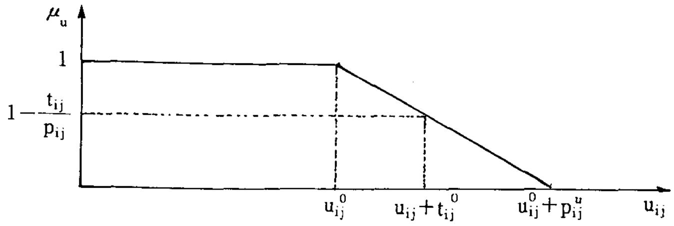


〈그림 4〉 arc 容量의 下限에 대한 멤버쉽函數

Bellman과 Zadeh의 概念 [1]에 의하면, 퍼지意思決定은 式(3.10)과 같은 멤버쉽함수를 갖는 퍼지집합 D에 의해서 정의된다.

$$\mu_D(x)=\mu_G(x)\wedge \bigwedge_{(i,j)\in s} \mu L(x)\wedge \bigwedge_{(i,j)\in s} \mu_U(x) \tag{3.10}$$

여기서 ∧는 最小演算(minimum operator)이다. 最適意思決定 x*는



〈그림 5〉 arc 容量의 上限에 대한 멤버쉽函數

$$\mu_D(x^*)=\max \mu_D(x) \tag{3.11}$$

이다.

Chanas [2]는 퍼지線型計劃問題를 解決하기 위해서 母水計劃法(Parametric programming)을 사용했다. 여기서 式(3.4)~(3.6)은 確定的인 최소비용 네트워크 흐름 문제로 轉換하는 것을 보여준다.

不確實한 arc 容量制約式을 갖는 문제를 고려하면 式(3.6)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$l^o_{ij}-\theta P^l_{ij}<X_{ij}<U^o_{ij}+\theta P^u_{ij},$$

여기서 母數 θ $(0<\theta<1)$는 容量制約式의 間隔의 等級으로 解析될 수 있다. 그것은 式(3.12)와 같이 固定된 母數 θ의 條件을 갖는 문제의 모든 實行 可能한 解 θX_{ij}에 대해서 言及하기 쉽다.

$$\mu_U(\theta X_{ij})>1-\theta \text{와 } \mu_L(\theta X_{ij})>1-\theta \tag{3.12}$$
$$i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ m.$$

반면에 모든 實行可能한 (feasible)흐름 (만일 $P^u_{ij}>0$, $P^l_{ij}>0$, i, j=1, 2, ⋯, m)에 대해서는 式(3.13)과 같다.

$$\mu_U(\theta X_{ij}) \wedge \mu_L(\theta X_{ij}) = 1-\theta \quad (i,\ j) \in S. \tag{3.13}$$

이것으로부터 制約式들의 滿足의 程度 "common"은

$$(\underset{(i,j)\in s}{\geq} \mu_U(\theta X_{ij})) \wedge (\underset{(i,j)\in s}{\geq} \mu_L(\theta X_{ij})) = 1-\mu \tag{3.14}$$

이다.

그래서 不確實한 arc容量을 갖는 最小費用 네트워크 흐름 문제는 母數 θ에 따라 式(3.15)~(3.17)과 같이 轉換될 수 있다.

$$\text{Min} \quad \sum_i \sum_j C_{ij}X_{ij} \tag{3.15}$$

$$\text{s.t} \quad \sum_j X_{ij} - \sum_k X_{ki} = 0, \quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ m \tag{3.16}$$

$$l_{ij} - \theta P_{ij} < X_{ij} < U_{ij} + \theta P_{ij}, \quad i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ m \tag{3.17}$$

式(3.15)~(3.17)의 문제는 母數計劃法 [2]에 의해서 푸는 것은, 母數 θ에 따라 分析的으로 目的函數를 最大化하는 解들의 集合을 求하게 된다. 즉, 모든 θ에 대해서 $1-\theta$의 等級을 갖는 制約式들을 滿足하고, 이와 동시에 가능한 한 높은 等級을 갖는 目標(goal)를 成就하고자 하는 解를 求하게 된다.

그 문제의 目的函數의 最大값은 θ에 따라 分析的으로 표현되어질 수 있고, 이것은 θ에 있어서 連續的이고, picecewise 線型이고, 블록(concave) 函數이다.

4. 節次(Algorithm)

不確實한 arc容量을 갖는 네트워크문제의 最適化를 위한 알고리즘은 다음과 같다.

[段階 0] : $\theta^0=0$, $\theta^1=0$라 하고, θ^1을 가지고 arc 용량들을 새롭게 한다.

[段階 1] : 最小費用 네트워크 흐름 알고리즘에 의해서 문제를 解決한다. 만일 그 解가 實行可能하다면, [段階 2]로 간다.; 그 밖에 [段階 3]으로 간다.

[段階 2] : 만일 $|\mu_C - \mu_Z| < 0.005$이면 중단한다. 最適解가 구해진 것이다. 현재 反復狀態에서 最適解를 分類한다. 만일 $\mu_C < \mu_Z$이면 [段階 4]로 가고; 그 밖에 [段階 5]로 간다.

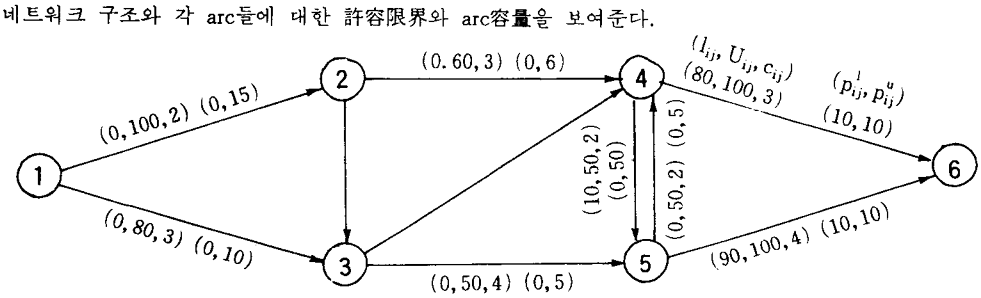
[段階 3] : 만일 $\mu_D > 0$이면 중단한다. 最終의 最適解로서 先行 反復段階의 最適解를 분류한다. 만일 $\mu_D = 0$이면 그 문제는 實行不可能하다.

[段階 4] : $\theta^0 = \theta^1$과 $\theta^1 = \theta^1 - (\theta^0 - \theta^1)/2$로 놓는다.

[段階 5] : $\theta^0 = \theta^1$과 $\theta^1 = \theta^1 + (\theta^0 - \theta^1)/2$로 놓는다. θ^1을 가지고 arc容量들을 새롭게 하고, [段階 1]로 가라.

5. 例 題

〈그림 6〉과 같은 6개의 마디(Node)와 10개의 arc를 가진 最小費用 네트워크흐름 문제를 考慮해 보면, 〈그림 6〉은 네트워크 구조와 각 arc들에 대한 許容限界와 arc容量을 보여준다.

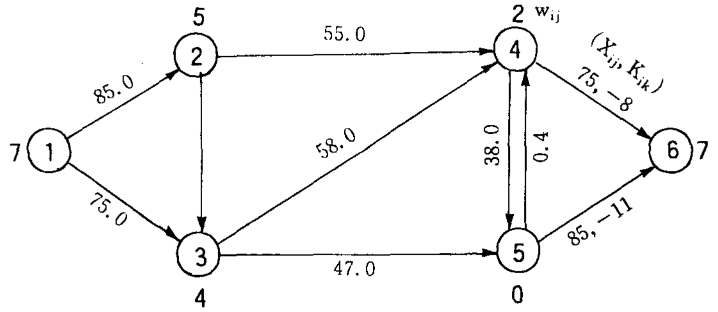


〈그림 6〉 例題의 네트워크 形態와 그 arc容量의 餘裕限界

目的函數의 멤버쉽函數는 다음과 같이 주어진다 :

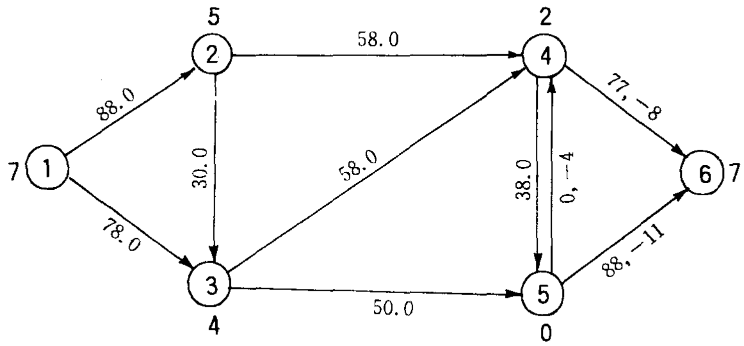
$$\mu_Z(z) = \begin{cases} 1-(z-1500)/200, & 1500<z<1700 \\ 1 & , z<1500 \\ 0 & , \text{그밖에} \end{cases}$$

最小費用 알고리즘으로서 우리들은 Out-of-iklter 알고리즘을 使用하기로 假定하면,

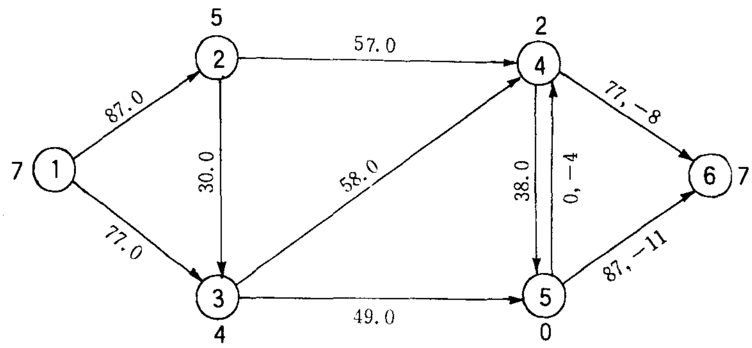


〈그림 7(a)〉 Iteration 1(θ =0.5, w_i : dual variable. k_{ij} : kilter state)

그러면 〈그림 7〉들은 각 反復段階에 대한 흐름들을 보여 주고 있다.



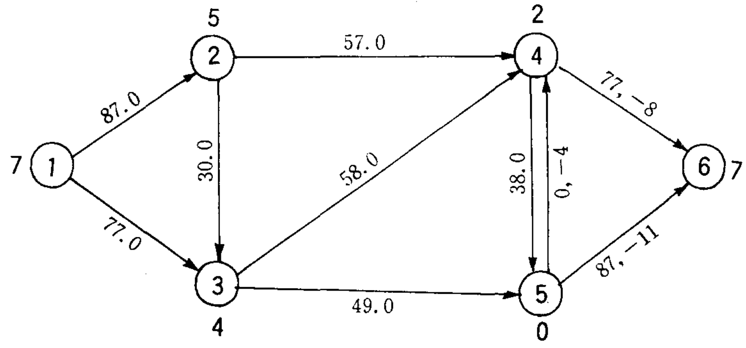
〈그림 7(b)〉 Iteration 2(θ =0.25)



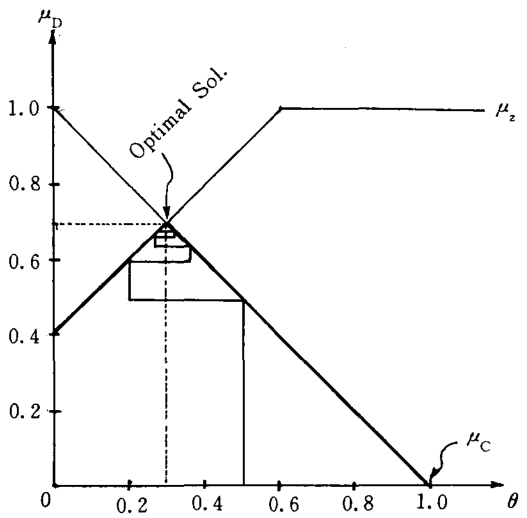
〈그림 7(c)〉 Iteration 3(θ =0.375)

가장 滿足스러운 實行可能 흐름은 〈그림 7(d)〉로 나타나며, 그리고 퍼지 意思決定 μ_D의 멤버쉽函數값은 거의 0.64로 얻어진다.

매번 反復段階 동안 θ에 對應하는 μ_D의 값은 〈그림 8〉에 나타나 있다.



〈그림 7(d)〉 最終 iteration (μ_D=0.64)



〈그림 8〉 퍼지 決定 μ_D의 멤버쉽函數

6. 結　論

本 硏究에서는 不確實한 arc容量을 가지는 最小費用 네트워크 흐름문제를 定式化하는데 主力해 왔다. 實際環境에서 있어서의 意思決定問題는 確定的이기보다는 不確實한 狀態에서 處理되는 것이 보다 더 實質的이다. 그래서 이러한 槪念을 最小費用 네트워크 흐름 問題에 應用을 하였다. 먼저 本 硏究에서는 典型的인 最小費用 네트워크 흐름 問題의 技法인 Out-of-kilter 알고리즘에 母數計劃法(parametric programming)을 混合한 알고리즘을 提示하였고, 둘째로 이 技法을 不確實한 arc容量을 가지는 最小費用 네트워크 흐름문제에 適用시켜서 結果를 分析하였다.

參 考 文 獻

1. R. E. Bellman & L. A. Zadeh, "Decision making in a fuzzy environment", Management Sci. 17, 1970, pp. 141-164.
2. Stefan Chanas, "The use of parametric programming in fuzzy linear programming", Fuzzy Sets and Systems 11, 1983, pp. 243-251.
3. Stefan Chanas, Waldemar Kolodziejczyk, and Anna Machaj, "A fuzzy approach to th transportation problem", Fuzzy Sets and Systems 13, 1984, pp. 211-221.
4. H. Hamacher, H. Leberling, and H. J. Zimmerman, "Sensitivity analysis in fuzzy linear programming", Fuzzy sets and systems 1, 1978, pp. 269-281.
5. F. A. Loostsma, "Performance evaluation of nonlinear optimization methods via pairwise comparison and fuzzy numbers", Mathematical programming 33, 1985, pp. 93-114.
6. J. Llena, "On fuzzy linear programming", European Journal of Operational Research 22, 1985, pp. 216-223.
7. H. Tanaka and K. Asai, "Fuzzy linear programming problems with fuzzy numbers", fuzzy Sets and Systems 13, 1984, pp. 1-10.
8. Roman Slowinsk, "A multicriteria fuzzy linear programming method for water supply system development planning", Fuzzy Sets Systems 19, 1986, pp. 217-237.
9. Jose L. Verdegay, "A dual approach to solve the fuzzy linear programming problem", Fuzzy Sets and Systems 14, 1984, pp. 131-141.
10. Ernest Czogala and Hans-Jurgen Zimmerman, "Decision making in uncertain environments", European Journal of Operational Research 23, 1986, pp. 202-212.
11. L. A. Zadeh, "Fuzzy sets", Information and control 8, 1965, pp. 338-353.
12. H. J. Zimmerman, "Fuzzy programming and linear programming with several objective functions", Fuzzy Sets and Systems 1, 1978, pp. 45-55.
13. Dider Dubois and Herri Prade, "Fuzzy sets and Systems : Theory and Applicaions", Academic Press, 1980.
14. Stefan Chanas and Waldemar Kolodziejczyk, "Integer Flows in Networks with Fuzzy Capacity Constraints", Networks, 1986.
15. F. A. Lootsma, "Stochastic and Fuzzy PERT", European Journal of Operational Research, Vol. 43, 1989, pp. 174-183.