論 文

비가산성 잡음에서 순위 통계량을 이용한 신호 검파: 신호의존성 잡음과 확률 신호 검파

正會員 宋 翊 鎬* 正會員 金 相 燁* 正會員 金 善 勇* 正會員 孫 在 徹*

Signal Detection in Non-Additive Noise Using Rank Statistics: Signal-Dependent Noise and Random Signal Detection

Iick Ho SONG*, Sang Yeob KIM*, Sun Yong KIM*, Jae Cheol SON* *Regular Members*

要 約 신호 의존성 잡음(signal-dependent noise)이 섞인 관측 모형에서 순위 통계량(rank statistic)을 써서 약한 신호를 검파하는 검파기의 검정 통계량을 얻었다. 이 논문에서는 비가산성 잡음(non-additive noise) 환경을 생각하려고 순가산성 잡음 뿐만 아니라 신호 의존성 잡음도 함께 나타내는 일반화된 관측모델을 썼다. 이 모형에서 얻은 국소 최적 순위(locally optimum rank) 검파기는 국소 최적(locally optimum) 검파기와 비슷한 꼴을 가지고, 순가산성 잡음 모형에서의 국소 최적 순위 검파기를 일반화한 것임을 보였다. 또한 다중 입력인 때에도 비슷한 결과를 얻을 수 있음을 알 수 있었다.

ABSTRACT Test statistics are obtained for detection of weak signals in signal-dependent noise using rank statistics. A generalized model is used in this paper in order to consider non-additivenoise as well as purely-additive noise. Locally optimum rank detectors for the model are shown to have similarity to locally optimum detectors and to be generalizations of those for the purely-additive nosie model. A similar result is obtained for multi-input cases.

*韓國科學技術院 電氣및 電子工學科
KAIST
論文番號 : 90-96(接受1990. 10. 22)

I. 머릿말

잡음이 섞여 있을 때 확률 신호 또는 알려진

신호를 검파하는 여러가지 검파 방식들이 많이 연구되었다[e. g., 1, 2]. 그러나, 이들 연구에서 쓰인 관측 모형은 순가산성 잡음만을 나타낼 수 있는 것이었다. 그런데 신호 복원과 수중 음향 연구등과 같은 여러가지 상황에서처럼[3, 4] 비가산성 잡음을 신호 검파에서 생각하려면, 순가산성 잡음 뿐만 아니라 비가산성 잡음도 함께 나타낼 수 있는 일반적인 관측 모형을 생각해야 한다.

최근에 여러가지 잡음이 섞인 환경을 나타낼 수 있는 일반화된 관측 모형이 소개된 바 있고, 적산성 잡음 또는 신호 의존성 잡음과 같은 비가산성 잡음이 있을 때, 알려진 신호와 확률 신호의 국소 최적(locally optimum, LO) 검파에 이 관측 모형이 쓰였다[5]. 많은 경우에 국소 최적 검파기는 비교적 쉽게 구현할 수 있고, 신호대 잡음비가 아주 작을 때 다른 검파기 보다 성능이 뛰어나다고 알려져 있다.

이 논문에서는, 순가산성 잡음과 신호 의존성 잡음이 함께 섞여 있는 약한 확률 신호의 국소 최적 순위(locally optimum rank, LOR) 검파에 초점을 맞추기로 한다. 비록 국소 최적 순위 검정의 기본 개념 및 특성들은 통계학에서 이미 어느 정도 연구되어 있으나, 이 논문에서처럼 그 개념 및 특성들을 확장하거나 이 논문에서 다룬 문제에 적용한 연구는 아직 없다.

Ⅱ. 신호 의존성 잡음 모델

여러 특성의 잡음이 섞인 채로 수신기를 통해 얻은 자료를 X_i, $i=1, 2,\cdots,n$이라 하자. 그러면, 여기서 다루려는 신호 의존성 잡음 모형에서 X_i는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$X_i=\beta(\tau)\ S_i+\gamma(\tau)\ N_i+W_i,\quad i=1, 2,\cdots,n \qquad (1)$$

위 관측 모형(1)에서, 확률 신호 성분 S_i는 평균이 0, 분산이 σ_i^2인 확률 변수이고 S_i의 확률 밀도 함수를 f_S라 하자. n은 입력 경로에서 모이는 자료 갯수(표본의 크기)이고, $\beta(\tau)$와 $\gamma(\tau)$는 각각 확률 신호 성분과 신호 의존성 잡음 성분의 크기를 나타내며, τ는 신호 크기 매개 변수인데 0(귀무가설, H) 또는 양의 값(대립가설, K)을 가진다.

또한 순가산성 잡음 성분들 W_i, $i=1, 2,\cdots,n$,은 모두 평균이 0, 분산이 σ_W^2이고 확률밀도 함수가 f_W인 독립 동일 분포(i.i.d.) 확률 변수이다. 여기서 확률 신호와 순가산성 잡음은 통계학적으로 독립이라고 가정한다. N_i는 신호 의존성 잡음인데, 이것은 N_i의 크기 $\gamma(\tau)$가 신호의 크기를 결정하는 τ에 따라 바뀌기 때문이다. N_i, $i=1, 2,\cdots, n$은 확률밀도 함수가 f_N이고 평균이 0, 분산이 σ_n^2인 독립 동일 분포 확률 변수이다. 한편, N_i와 S_i는 서로 독립이지만 N_i와 W_i는 일반적으로 상관되어 있다고 가정한다. 끝으로 (N_i, W_i)의 결합 확률 밀도 함수를 f_{NW}로 쓰기로 하자. $\beta(\tau)$와 $\gamma(\tau)$는 $\beta(0)=\gamma(0)=0$을 만족하는 약짜 증가 함수라고 가정하고, f_W는 모든 x에 대해 $f_W(x)=f_W(-x)$를 만족한다고하자.

(1)이 나타내는 관측 모형은, 신호 처리 가운데서 특히 신호 검파 문제에 가장 기본적으로 널리 쓰이는 순가산성 잡음 모형을 일반화한 것이라 할 수 있다.

Ⅲ. 국소 최적 순위 검파기의 검정 통계량

3.1. 순가산성 잡음에서의 검정 통계량

이 절에서는 순가산성 잡음만이 섞였을 때 확률 신호 국소 최적 순위 검파의 결과를 다시 살펴 보도록 하자.

국소 최적 순위 검파기의 검정 통계량은 일반적으로 신호의 공분산 $r_S(i,k)$, $i, k=1, 2,\cdots,n$과 순가산성 잡음의 확률 밀도 함수 f_W에 의존함이 알려져 있다[6]. 곧,

$$T^r_{LOR}(X)=\sum_{i}^{n}\sum_{k}^{n} r_S(i,\ k)\ Z_i,\ Z_k c_2(Q_i,\ Q_k)$$

$$+\sum_{i}^{n}\sigma_i^2[d_1(Q_i)-c_2(Q_i,Q_i)] \qquad (2)$$

(2)에서 $\mathbf{X}=(X_1, X_2\cdots,X_n)$는 관측 자료 벡터이고, $Z_i=\mathrm{sign}(X_i)$는 X_i의 부호 통계량이며 Q_i는 집합 $M=\{|X_1|, X_2|,\cdots|X_n|\}$ 가운데서 $|X_i|$의 순위(크기 순위, magnitude rank)를 나타낸다. 한편 $r_s(i,k)=E\{S_iS_k\}$와 $\sigma_i^2=r_s(i,i)$는 각각 S_i와 S_k의 공분산과 S_i의 분산을 나타내고,

$$c_2(i,k)=E\{g_1(|X|_{[i]})\ g_1(|X|_{[k]})|H\}, \qquad (3)$$

$$d_1(i)=E\{h_1|X|_{[i]}|H\}, \qquad (4)$$

$$g_1(x)=-\frac{f_W'(x)}{f_W(x)} \qquad (5)$$

및

$$h_1(x)=\frac{f_W''(x)}{f_W(x)} \qquad (6)$$

이다. (3)과 (4)에서 $|X|_{[i]}$는 집합 M에서 i번째로 작은 원소를 나타낸다.

3.2. 검정 통계량

이제 이 논문의 주제인, 순가산성 잡음과 신호 의존성 잡음을 함께 나타낼수 있는 모형 (8)에서, 확률 신호의 국소 최적 순위 검파로 관심을 돌려 보자.

먼저 모형 (1)을 [5]에 보인 것과 비슷하게 재매개변수화 하면 쓸데없이 어려운 수학적 연산을 거치지 않으면서 똑같은 결과를 얻을 수 있다. 그러면 모형 (1)은 다음과 같이 바뀐다.

$$X_i=b(\theta)S_i+\ c(\theta)N_i+W_i \qquad (7)$$

모형 (7)에서, 확률 신호를 국소 최적 순위 검파하는 검파기의 검정 통계량은 일반화된 Neyman-Pearson 기본 정리를 쓰면 얻을 수 있다. 곧, $\Delta\geq2$일 때나 $\Delta\geq1$이고 $E\{N|W\}=0$일 때에는

$$T_{LOR}^{sd}(\mathbf{X})=\sum_{i}^{n}0\ \sum_{k}^{n} r_s(i,\ k)Z_iZ_kc_2(Q_i,Q_k)$$
$$+\sum_{i}^{n}[\sigma_i^2\{d_1(Q_i)-c_2(Q_i,Q_i)\}$$
$$+e(Q_i)] \qquad (8)$$

이다. 여기서

$$e(i)=\begin{cases} c''(0)c_3(i) & E\{N|W\}=0,\ \Delta=2, \\ \dfrac{d_3(i)}{(b'(0))^2} & E\{N|W\}=0,\ \Delta=1, \\ 0 & \Delta>2 \text{ 또는 } E\{N|W\}=0,\ \Delta>1, \end{cases} \qquad (9)$$

$$c_3(i)=E\{g_2(|X|_{[i]})|H\}, \qquad (10)$$

$$d_3(i)=E\{h_3(|X|_{[i]})|H\}, \qquad (11)$$

$$g_2(x)=-\frac{(\int nf_{NW}(n,\ x)dn)'}{f_W(x)} \qquad (12)$$

및

$$h_3(x)=\frac{(\int n^2f_{NW}(n,\ x)dn)''}{f_W(x)} \qquad (13)$$

인데 (12)와 (13)에서 ′과 ″은 x에 대한 미분을 나타낸다.

또한, $\Delta<2$이고 $E\{N|W\}\neq0$일 때에는

$$T_{LOR}(\mathbf{X})=\sum_{i}^{n}c_3(Q_i) \qquad (14)$$

이고, $\Delta<1$이고 $E\{N|W\}=0$일 때에는

$$T_{LOR}(\mathbf{X})=\sum_{i}^{n}d_3(Q_i) \qquad (15)$$

이다. 이들은 [5]에서 얻은 국소 최적 검파기의 검정 통계량과 매우 비슷한 꼴 임을 알 수 있다. 여기서 식 (8)은 식 (2)를 일반화 한 것이라는 점에 주목할 필요가 있다.

그런데, 확률 신호 성분들이 서로 상관되어 있지 않고 그들의 분산이 다 같다면, 국소 최적

순위 통계량을 써서 확률 신호를 검파할 수는 없다. 그 까닭은 검정 통계량 (8)이 상수가 되기 때문인데, 이것은 국소 최적 순위 검파기가 순위와 부호만을 쓴다는 가정에서 나오는 당연한 결과이다.

식 (8), (14), (15)로 부터 다음과 같은 결론을 얻을 수 있다.

(1) $\Delta>2$일 때나 $\Delta>1$이고 $E\{NW\}=0$일 때에는, 순가산성 잡음 모형에서의 국소 최적 순위 검파기의 검정 통계량과 같은데, 이는 검정 통계량이 확률 신호에만 의존하고, 신호 의존성 잡음은 순가산성 잡음보다 상대적으로 세기가 약하여 검정 통계량에 영향을 미치지 못함을 뜻한다.

(2) $\Delta=1$이고 $E\{NW\}=0$일 때나 $\Delta=2$이고 $E\{NW\}\neq0$일 때에는, 확률 신호와 신호 의존성 잡음 모두가 검정 통계량에 영향을 준다. 이 때 확률 신호와 신호 의존성 잡음이 국소 최적 순위 검정 통계량에 미치는 상대적인 효과는 b'(0) 또는 c (0) 값과 신호의 분산과 공분산 값에 따라 결정된다.

(3) N_1와 W_1의 상관도는 확률 신호를 국소 최적 순위 검파하는 데에 불리한 영향을 미친다는 것을 국소 최적 순위 검파기가 쓸모없게 되는 Δ의 두 문턱 값($\Delta=1, 2$)을 비교해 보면 알 수 있다. 그런데 이 상관도는 신호 의존성 잡음 모형에서 신호의 국소 최적 검파에서는 유리한 요소였다[9].

3.3. 다중 입력일 때

확률 신호 검파를 포함하는 많은 실제 응용에 쓰이는 자료들은, 여러 수신기로 부터 같은 때에 얻어지는 것(다중 입력)이 많다. 따라서, 신호 의존성 잡음 모형에서도 수신 배열에서 자료를 얻었을 때 확률 신호를 어떻게 검파 할 것인가를 고려하는 것이 꽤 흥미있을 것이다.

이런 때에는 순간 순간 마다 각각의 수신기에서 공통으로 관측되는 자료에 들어있는 약한 확률 신호를 검파하는 것이 주요 관심이 된다. 한 개의 수신기로 얻은 자료에서 신호를 검파하는 것 보다 수신기 배열에서 얻은 자료로 검파하는 것의 성능이 일반적으로 훨씬 좋은데, 이는 공통적인 신호 성분 때문에 각 검파기 마다의 출력이 상관되어 있기 때문이다.

입력이 다중일 때에도 앞에서 얻은 국소 최적 순위 검파의 검정 통계량과 비슷한 결과들을 얻을 수 있다. 보기를 들면, $\Delta\geq2$일 때나 $\Delta\geq1$이고 $E\{NW\}=0$일 때에는 검정 통계량이

$$T_{LOR}^{(m)}(\mathbf{X})=\sum^{n}\sum^{L}\sum^{n}\sum^{L} r_S(i,k)Z_{ji}Z_{lk}\, c_2(Q_{ji},Q_{lk}) + \sum^{n}\sum^{L}\sigma_i^2\left[\{d_1(Q_{ji})-c_2(Q_{ji},Q_{ji})\}+e(Q_{ji})\right] \tag{16}$$

이다. 식 (16)에서 L은 배열 크기를, Q_{ji}는 집합 $(\{|X_{1i}|, |X_{2i}|, \cdots, |X_{Li}|\})$에서 $|X_{ji}|$의 순위를 나타내고, $Z_{ji}=\text{sign}(X_{ji})$이다.

다중 입력일 때에, 크기 순위를 얻는 방법이 여러가지 있을 수 있다. 보기를 들면, 식 (16)의 Q_{ji}는 모든 관측값의 절대값으로 구성된 집합 $(\{|X_{11}|, |X_{12}|, \cdots, |X_{1n}|, |X_{21}|, |X_{22}|, \cdots, |X_{2n}|, \cdots, |X_{L1}|, |X_{L2}|, \cdots, |X_{Ln}|\})$에서 $|X_{ji}|$의 크기 순위가 될 수 있는데, 순위를 얻는 방법이 이렇게 바뀌더라도 검정 통계량의 꼴인 식은 순위를 얻는 방법에 관계없이 같음을 보일 수 있다.

Ⅳ. 보 기

이 절에서는 두 가지 경우에 대하여 점수(score) 함수의 보기를 들어보자. 먼저 f_{NW}가 이변수(bivariate) 정규 분포의 확률 밀도 함수일 때에는, 곧

$$f_{NW}(x,y)=\frac{1}{2\pi s(1-r^2)^{1/2}}\exp\left[-\frac{x^2-2rsxy+s^2y^2}{2s^2(1-r^2)}\right] \tag{17}$$

일 때에는

$$c_2(k,i)=c_2(i,k)$$
$$=\beta(n,k,i)\int\int_0 xyf_G(x)f_G(y)$$
$$(\Phi(y)-\Phi(x))^{k-i-1}$$
$$\eta^{n-k}(y)\ \mu^{i-1}(x)dxdy,\ k>i \tag{18a}$$

$$c_2(i,i)=\alpha(n,i)\int_0 x^2f_G(x)\eta^{n-i}(x)\mu^{i-1}(x)dx, \tag{18b}$$

$$c_3(i)=rs\{c_2(i,i)-1\}, \tag{19}$$

$$d_1(i)=c_2(i,i)-1 \tag{20}$$

및

$$d_3(i)=s^2[3r^2-1+(1-6r^2)c_2(i,i)+r^2\alpha(n,i)\cdot$$
$$\int_0 x^4f_G(x)\eta^{n-i}(x)\mu^{i-1}(x)dx] \tag{21}$$

이다. 여기서

$$\alpha(n,i)=\frac{2^{n-i+1}n!}{(n-i)!(i-1)!} \tag{22}$$

$$\beta(n,k,i)=\frac{2^{n-i+1}n!}{(n-k)!(k-i-1)!(i-1)!} \tag{23}$$

$$\eta(x)=1-\Phi(x), \tag{24}$$

$$\mu(x)=2\Phi(x)-1, \tag{25}$$

이고, Φ는 표준 정규 확률 밀도 함수 f_G의 누적 분포 함수이다. (18)-(21)에서 알 수 있듯이 일반적으로 점수(score) 함수의 값들을 해석적으로 구하기는 어렵다. 그런데 표본 크기를 충분히 크게 하면 점수(score) 함수는 다음과 같이 근사화할 수 있다[7]. 곧,

$$c_2(k,i)=\phi(i)\phi(k), \tag{26}$$

$$c_3(i)=rs[\phi^2(i)-1], \tag{27}$$

$$d_1(i)=\phi^2(i)-1 \tag{28}$$

및

$$d_3(i)=s^2[r^2\phi^4(i)+(1-6r^2)\phi^2(i)+3r^2-1], \tag{29}$$

인데, 여기서

$$\phi(i)=\Phi^{-1}\left(\frac{n+i+1}{2n+2}\right) \tag{30}$$

이다.

두 번째 보기로 $N_i=rsW_i+(1-r)sZ_i$인 때를 생각해 보자. 여기서 W_i와 Z_i는 서로 독립이고, Z_i는 평균이 0, 분산이 1인 확률 변수이고 W_i는 아래와 같은 logistic 확률 밀도 함수를 갖는다고 가정하자.

$$f_L(x)=\frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} \tag{31}$$

이 때 점수(score) 함수는 다음과 같이 얻어진다.

$$c_2(k,i)=c_2(i,k)$$
$$=\beta(n,k,i)\int_0^1\int_1^v$$
$$\frac{(1-u)^i(u-v)^{k-i-1}}{(1+u)^{k+1}}$$
$$\cdot\frac{(1-v)v^{n-k}}{(1+v)^{n-i+2}}\ dudv,\ k>i \tag{32a}$$

$$c_2(i,i)=\alpha(n,i)\int_0^1\frac{(1-v)^{i+1}v^{n-i}}{(1+v)^{n+3}}\ dv, \tag{32b}$$

$$c_3(i)=rs\left[\frac{i}{n+1}\ l_n\ \frac{n+i-1}{n-i+1}-1\right], \tag{33}$$

$$d_1(i)=\frac{1}{2}\left\{\frac{3i(i+1)}{(n+2)(n+1)}-1\right\}, \tag{34}$$

및

$$d_3(i)=s^2[\{r^2(\ln\zeta)^2+1-r^2\}\{6\zeta^2-6\zeta+1\}-4r^2$$

$$\frac{i}{n+1}\ln\zeta+2r^2] \qquad (35)$$

여기서

$$\zeta=\frac{n+i+1}{n-i+1} \qquad (36)$$

이다.

V. 맺 음 말

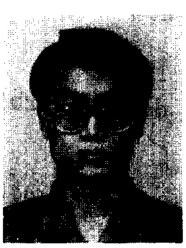
이 논문에서는, 최근에 제안된 일반화된 관측 모형의 하나인 신호 의존성 잡음 모형에서 평균이 0인 약한 확률 신호를 국소 최적 순위 검파하는 문제를 살펴보았다. 이 모형에서 확률 신호 국소 최적 순위 검파기의 검정 통계량이 확률 신호 국소 최적 검파기의 검정 통계량과 비슷함을 보였다.

또한 이 검정 통계량이, 순가산성 잡음 모형에서의 확률 신호 국소 최적 순위 검파기를 일반화한 것임을 보였고, 입력이 다중일 때에 검정 통계량이 어떻게 되는지도 함께 살펴 보았다.

한편, 이 논문에서 얻은 신호 의존성 잡음 모델에서 확률 신호 국소 최적 순위 검파기와 이미 알려진 다른 검파기들과의 성능을 유한한 표본 크기 및 무한한 표본 크기에서 견주어 보는 연구를 현재 진행하고 있다. 아울러 두 표본(two sample)일 때와 적산성 잡음일 때에, 순위 검정 방법을 쓰는 확률 신호 국소 최적 순위 검파에 대한 연구도 진행되고 있다.

參 考 文 獻

1. A. B. Martinez, *et al.*, "Locally Optimum Detection in Multivariate Non Gaussian Noise", *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. IT 30, pp. 815 822, November 1984.
2. S. A. Kassam, *Signal Detection in Non Gaussian Noise*, Springer Verlag, New York, 1988.
3. D. T. Kuan, *et al.*, "Adaptive Noise Smoothing Filter for Images with Signal Dependent Noise", *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.*, vol. PAMI 7, pp. 165 177, March 1985.
4. R. Pettai, *Noise in Receiving Systems*, John Wiley & Sons, New York, 1984.
5. I. Song, *Nonlinear Techniques for Detection and Filtering of Discrete Time Signals*, Ph. D. Dissertation, Dept. of Electr. Engr., Univ. of Pennsylvania, Philadelphia, PA, January 1987.
6. I. Song, "A Nonparametric Scheme for Detection of Random Signals" *Final Report*, Korea Adv. Inst. Sci. Tech., Seoul, Korea, February 1989.
7. J. Hajek and Z. Sidak, *Theory of Rank Tests*, Academic, New York, 1967.



宋 翊 鎬(Iick Ho SONG) 正會員
1960年 2月20日生
1982년2월 : 서울대학교 전자공학과 졸업(공학사)
1984년2월 : 서울대학교 전자공학과 졸업(공학석사)
1985년8월 : Univ. of Pennsylvania, Dept. of EE 졸업(M.S.E.)
1987년5월 : Univ. of Pennsylvania, Dept. of EE 졸업(Ph. D.)
1987년3월~1988년2월 : Bell Communication Research 연구원
1988년3월~현재 : 한국과학기술원 전기 및 전자공학과 조교수
관심분야 : 검파 및 추정, 통계학적 신호(화상)처리 및 통신이론

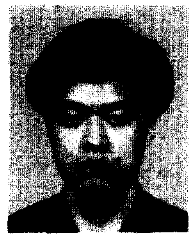
金 相 燁 Sang Yeob KIM 正會員
1967年 8月24日生
1990년 2월 : 고려대학교 전자공학과 졸업(공학사)
1990년 3월~현재 : 한국과학기술원 전기 및 전자공학과 석사과정 재학중

金 善 勇(Sun Yong KIM) 正會員

1968年 1月30日生

1990年 2月 : 한국과학기술원 과학기술대학 전기 및 전자공학과 공학사 학위 취득

1990年 3月~현재 : 한국과학기술원 전기 및 전자공학과 석사과정 재학중.



孫 在 徹(Jae Cheol SON) 正會員

1965年 11月 5日生

1988년2월 : 연세대학교 전기공학과 졸업(공학사)

1990년2월 : 한국과학기술원 전기 및 전자공학과 졸업(공학석사)

1990년3월~현재 : 한국과학기술원 전기 및 전자공학과 박사과정 재학중

관심분야 : 괴시 이론, 신호검파, 정보이론