

## 본드그래프 모델링에 의한 필터회로망의 주파수응답 표현에 관한 연구

正會員 愼 瑋 緯\* 正會員 李 炯 基\*\* 正會員 金 明 起\*\*\*

### A study on the Frequency Response Representation of Filter Network by Bondgraph Modeling

Wee Jae SHIN\*, Hyung Ki LEE\*\*, Myung Ki KIM\*\*\* *Regular Members*

**要 約** 본 논문에서는 수동필터회로망의 주파수응답 표현을 위해도식적 기법인 본드그래프 모델링 해석법을 제안하였다. 본드그래프를 변형시킨 포인트그래프에 의해 필터회로망의 버터워스 및 체비세프함수를 유도하고 제안된 알고리즘의 타당성을 확인하기 위해 필터의 표준설계 데이터와 비교하였다.

**ABSTRACT** This paper present an analysis of filter network using bondgraph technique for the determination of coefficients of filter function not by means of Computational operation.

The proposed bondgraph technique is confirmed to be suitable for obtaining the frequency response characteristic of filter network.

#### I. 서 론

물리 또는 공학 계통에서 집중된 파라미터(Lumped Parameter)를 갖는 다중포트(multiport) 계통의 그래프적 표현을 모델화 하기 위해 파워본드(Power bond)와 에너지포트(Energyport)의 이용에 관한 검토가 일찌기 1959년에 시작되었으

며, 그 목적은 수학적인 변수들의 상호관계와 미분 방정식을 유도하기 위한 통일된 과정을 제공하려는 것이었다. H. M. Paynter가 제안한 이 이론은 0-접합과 1-접합의 중요한 요소로 구분되었다<sup>(1)</sup>. 1969년 D. C. Karnopp가 파워 보존, 변환을 나타내기 위해 에너지 흐름과 구조를 표현하는 본드그래프를 이용한바 있다<sup>(2)</sup>. 1972년에 Rosenberg R. C.에 의해 상태방정식 계산을 위한 본드그래프 표현방법과 선형동적시스템의 시물레이션을 위한 방법이 제안된 이래 공학 계통의 여러분야에서 이 모델링 방법의 적용이 시도되어 왔다<sup>(3)-(6)</sup>. 또한 1975년에 Karnopp는 음향필터(Acoustic Filter)

\*慶南大學校 電子工學科

Dept. of Electronics Engineering, Kyung Nam University.

\*\*國立釜山工業大學 제어계측과

Dept. of Control & Instrumentation Engineering P. N. I. T.

\*\*\*東亞大學校 電子工學科

Dept. of Electronics Engineering, Dong-A University

論文番號: 90-19(接受 1989. 9. 19)

를 본드그래프로 모델링하였으며<sup>(6)</sup>, 1983년 Rosenberg 는 R-L-C 회로망을 본드그래프를 이용, 주파수영역에서 해석할 수 있음을 보였다.<sup>(7)</sup> 1985년 John Choma는 회로망의 다중극점을 이용하여 저역통과 특성을 갖는 능동회로의 필터 함수를 근사적으로 결정하는데 있어 Time moment 를 이용한 가우시안근사법(Gaussian Approximation), 집중극점근사법(Lumped pole Approximatin)을 소개한 바 있다<sup>(11)</sup>. 그러나, Choma는 계산이나 컴퓨터에 의해 극점들을 구하였고 축적소자인 L과 C중 어느 한소자만 포함된 회로망의 근사계산법이었다.

본 연구에서는 종래 다극점 필터회로망의 주파수 응답을 결정하는데 많은 계산량이 요구되므로 일반적으로 컴퓨터연산을 하는데, 컴퓨터를 이용하지 않고 도식적인 방법인 본드그래프를 자이로본드그래프로 변환하고 다시 포인트그래프로 표현하여 주파수 응답을 구할 수 있는 한가지 기법을 제안하였다. 이 기법으로 버터워스 및 체비세프함수의 계수를 구한다. 이 제안한 기법의 타당성을 표준설계데이터와 비교 확인하였다.

## II. 본드그래프(Bond Graph. BG)

본드그래프 기법은 근본적으로 시스템에 대한 상태방정식을 유도함에 있어서 선형그래프 기법과 똑같이 우수할 뿐 아니라 특히 집중된 파라메타를 갖는 시스템 해석에 유리한 방식이다<sup>(8)</sup>.

본 연구에서는 이러한 장점을 갖는 본드그래프를 간략화된 표준화의 자이로본드그래프로 변환하고, 포인트그래프로 변환시켜 버터워스 및 체비세프필터의 주파수특성 해석에 적용하였다.

## 1. 인과관계(Causality)

Causality 표시는 system의 상태변수를 선정하는데 필수적인 작업이며 독립된 Energy 저장요소의 선택은 본드그래프에 Causality를 표시함으로써 조직적으로 상태방정식을 유도할 수 있다. 여기서 Causality는 Stroke로 나타낸다. Table. 2는 인과 관계를 블록 선도(Block diagram)으로 나타낸 것이다.

## III. 자이로본드그래프(Gyrobond graph. GBG)

GBG는 Bondgraph의 Canonical form이며 GBG의 기본구성 요소 set는 I(C), R, Se, (S<sub>r</sub>), 1, (0), GY들이다.

### 1. 요소에 대한 인접조건(Adjacency Condition)

GBG는 아래의 인접조건을 만족해야 한다.

- (1) 각 I는 각 I포-트에서 1접합에 인접한다.
- (2) 각 R는 1접합에 인접한다.
- (3) 각 Se는 1접합에 인접한다.
- (4) 각 GY는 서로 다른 두 1접합에 이웃한다.
- (5) 각 1접합은 I, R, Se와 한개 이상 인접하지 않으며 다른 1접합 이상으로 인접되지 않는다.
- (6) 1접합의 쌍은 하나의 GY 또는 그들간을 결합하는 한개의 다중 포-트 이상을 갖지 않는다

### 2. GBG의 형태

GBG에 관계되는 두가지 중요한 개념이 있는데 Complexity와 Fullness이다.

표1. 전기회로망과 본드그래프 요소들간의 관계  
Relation of the electrical network and bondgraph elements

본드그래프 표준set	포-트 (port)	필단변수원 (effort source)	통과변수원 (flow source)	필단 변수원 (effort)	통과변수 (flow)	순실요소 (R)	축적에너지 (C)	관성 (I)	TF	GY	0-접합	1-접합
전기계	단자	전압원	전류원	전압	전류	전기저항	전기용량	인덕턴스	이상적인 변압기	자이레이타	포-트의 병렬접속	포-트의 직렬접속

표 2 본드그래프 인과관계의 블록선도 표현  
Representation with the block diagram of bondgraph causality.

B G (1-port)	특 성 식	Block diagram	B G (2- port)	특 성 식	Block diagram
	$e = \phi_R f$			$e_1 = m e_2$ $f_2 = m f_1$	
	$f = \phi_R^{-1} e$			$f_1 = f_2 / m$ $e_2 = e_1 / m$	
	$e = \phi_C^{-1} \int f dt$			$e_1 = r f_2$ $e_2 = r f_1$	
	$f = d\phi_C e / dt$			$f_1 = e_1 / r$ $f_2 = e_2 / r$	
	$f = \phi_I^{-1} \int e dt$		B G (3- port)		
	$e = \phi_I d f / dt$			$e_2 = e_1$ $f_1 = -(f_2 + f_3)$	
				$f_2 = f_1$ $e_1 = -(e_2 + e_3)$	

- (1) 모든 1요소는 한 포-트이다.
- (2) 모든 R 요소는 한 포-트이다.
- (1)과 (2)를 만족하면 simple이고 그렇지 않으면 complexity이다.
- (3) I 포-트의 수는 1점합의 수와 같다. 이것을 만족하면 full(F)이고 그렇지 않으면 Partial(p)이다.
  - (a) simple full graph(SFG)
  - (b) complex full graph(CFG)
  - (c) simple partial graph(SPG)
  - (d) complex partial graph(CPG)

### Ⅲ. 필터회로망의 주파수 응답해석

규준화된 버터워스 필터는 극점들이 원점을 중심으로한 단위원상에 대칭으로 존재하므로 버터워스 함수의 계수항은 서로 대칭적이어야 하며 상수항은 1이 된다.

본 논문에서는 버터워스 및 체비셰프함수를 구하기 위해 본드그래프의 표준형인 자이로본드 그래프를 포인트그래프로 변환하여 단위파라메타를 갖는 선형그래프에 대응시킨 다음 Gyrodjacency 행렬과 대각행렬로 구성되는 상태형렬을 이용하여 함수를 나타낸다.

#### 1. 포인트그래프의 인접조건과 Gyrodjacency 행렬

포인트그래프는 gyrobond-graph의 간략화된 표현이다. 간략화에 대한 이유는 다음과 같다.

- (1) gyrobond-graph는 전통적인 형태인 방향성 선형그래프로 축약된다. 이 선형 그래프의 성질은 관련되는 계통의 고유치에 연관된다.
- (2) point graph는 간결한 형태로 되기 때문에 screen상에 대규모계통을 나타내는데 유리하다.

다음과 같은 인접조건에 따라 1점합을 분류한다.

- 1) full point : 인접하는 I요소를 갖는 1점합, 이

집합은 R요소를 가질 수도 있고 갖지 않을 수도 있다.

2) partial R point : 오직 인접되는 R 요소만 갖는 1집합 R파라미터는 0이 아니며 기호는 작은 원으로 나타낸다.

3) partial point : 이웃하는 I나 R요소 둘다 갖지 않는 1집합으로서 기호는 작은 구형이다.

GBG내에서 모든 축적요소는 적분 인과관계를 갖고 이러한 요소를 포함하는 회로망의 기본적인 행렬은 gyroadjacency 행렬이다. 이 행렬은  $S_N = [S_{ij}]$ 의 비대칭 행렬이다.

$S_{ij} = -r_{ij}$  point i에서 point j로 gyrator 계수  $r_{ij}$ 를 갖는 방향성 선이 있는 경우.

$S_{ij} = +r_{ij}$  point j에서 point i로 gyrator 계수  $r_{ij}$ 를 갖는 방향성 선이 있는 경우.

$S=0$  以外の 경우

단, gyrator 계수가 1인 경우는  $S=1$ 과  $-1$ 이 된다.

## 2. 표준화 계수

선형그래프에서 구한 고유치는 단위파라메타를 갖는 구조일 때의 값이다. 표준화된 필터는 일반적인 파라메타를 취급하므로 표준화 계수를 고려해야 한다.

$X$ 는 멀티방향성 그래프  $G=(x, u)$ 의 마디들의 집합  $K$ 에 대응되는  $n$ 개변수  $x_k$ 의 집합이고  $x_k$ 의 전체에 대한 0이 되지 않는 값을  $x_k$ 라 하면  $x_i$ 는 마디  $i$ 에 이웃하는  $x_k$ 의 합에 비례한다.

$$\lambda x_i = \sum_k x_k \quad (1)$$

$\lambda$ 는 적절히 선택된 값이며 만약  $G$ 가 멀티프리티(Multiplicity) 라면  $\lambda x = a_{ik} \sum_k x_k$ 이 된다.

이를 간단히 표현하면

$$\lambda x = A x \quad (2)$$

$A=(a_{ik})$ 는  $G$ 의 인접행렬,  $x$ 는 요소  $x_k$ 를 갖는 열벡터를 나타낸다. (1)식과 (2)식의 non-trivial 해는

$$|\lambda I - A| \equiv P_G(\lambda) = 0$$

$\lambda$ 는  $G$ 의 고유치이며, 직관적으로 고유벡터의 요소는 마디의 가중치(Weight)로서 나타낸다.  $x_i$ 는  $i$ 에 이웃하는 모든  $x_k$ 의 합에 비례하지 않고 평균치에 비례한다는 방법으로 마디의 가중치  $x_k$ 를 나타낼 수도 있다.

System의 방정식을 만족하기 위해  $x_k^*$ 는

$$\lambda x_i = \frac{1}{d_i} \sum_k x_k \quad (3)$$

로 나타내며 (3)식은

$$\lambda D = A \quad (4)$$

$$|\lambda D - A| = 0 \quad (5)$$

가 된다.

여기서  $K$ ,  $i$ 는  $i$ 의 이웃 마디이며  $d_i$ 는 out-degree 또는 마디  $i$ 의 Valency(앞쪽)  $d_i > 0$ 으로 가정. 또 대각 행렬  $D=(s_{ik}d_i)$ 는 out degree 행렬, (5)는 (3)과 (4)의 non-trivial해의 존재를 위한 필요충분 조건이며 여기서 변형된 특성다항식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$Q_G(\lambda) = \frac{1}{|D|} |\lambda D - A| = \lambda^n + q_1 \lambda^{n-1} + \dots + q_n \quad (6)$$

이것의 스펙트럼은

$$SP_G(G) = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n] Q$$

$$Q_G(\lambda) = |\lambda I - D^{-1}A| = |\lambda I - AD^{-1}|$$

여기서

$$D^{1/2} = S_{ik} \sqrt{d_i} \text{이고 } A^* = D^{1/2}(D^{-1}A)D^{-1/2}$$

그러면

$$A^* = D^{1/2} A D^{-1/2} = \frac{a_{ik}}{\sqrt{d_i d_k}} \quad (7)$$

특성식  $Q_C(\lambda) = |\lambda I - A^*|$  이 된다.

### 3. Ladder형 필터의 모델링

Ladder형 필터의 함수를 결정하기 위해 그림 1과 같이 전형적인 평탄특성을 갖는 버터워스 수동 필터를 선택하자.

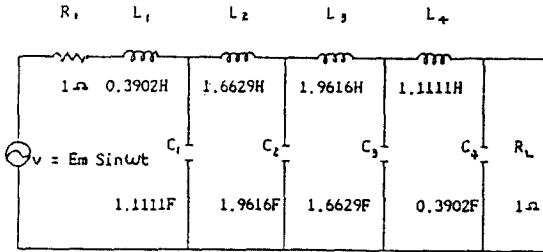


그림 1 복 종단 8차 버터워스 저역통과 필터  
8th Butterworth Low Pass Filter of Doubly Terminated

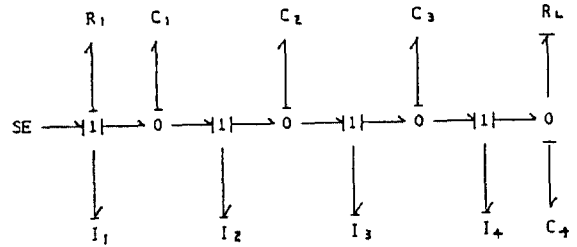


그림 2 인과관계를 갖는 그림 1의 본드그래프  
Bond Graph of Fig. 1 with Integral Causality

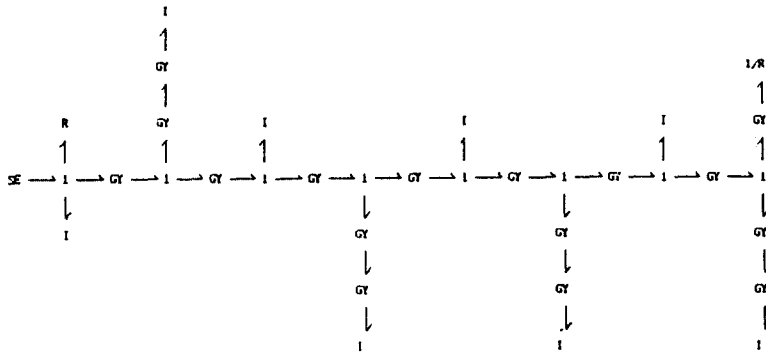


그림 3 그림 1의 자이로본드그래프  
Gyro-Bond Graph of Fig. 1

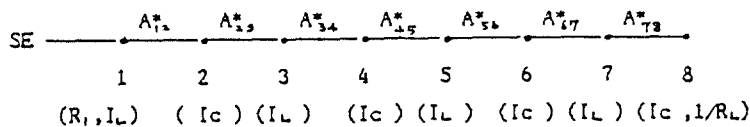


그림 4 그림 1의 포인트그래프  
Point Graph of Fig. 1

4. 버터워스 및 체비세프함수의 유도

필터회로망의 버터워스 및 체비세프함수를 gyroadjacency 행렬에 관계되는 상태행렬을 이용해서 구한다.

Simple partial araph의 상태행렬은 인과관계(causality)를 갖는 SPG 및 SFG의 경우 일반적으로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

상태행렬

$$A = [(S_F - R_F) + S_{12}(S_P - R_P)^{-1}S_{12}] [1]^{-1} \quad (8)$$

상태행렬은 대칭행렬인 gyroadjacency 행렬과 저항과 인덕턴스의 대각행렬에 의해 표현하면 다음과 같다.

$$S = \begin{bmatrix} S_F & S_{12} \\ -S_{12}^T & S_P \end{bmatrix} \quad (9)$$

이고

$$S_F = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & \dots & S_{1N} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & \dots & S_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ S_{N1} & S_{N2} & S_{N3} & \dots & S_{NN} \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$R_F = \begin{bmatrix} R_1 & & & & \\ & R_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & R_f & \\ & & & & \ddots \end{bmatrix} \quad R_P = \begin{bmatrix} R_{f+1} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & R_N & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

$$I^{-1} = \begin{bmatrix} 1/I_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1/I^2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1/I_f \end{bmatrix} \quad (11)$$

로서 full point i에 관한 인덕턴스의 역수이다. 또, S<sub>12</sub>는 접합구조행렬의 부분이다.

(증명)

$$e = \begin{bmatrix} e_f \\ e_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_F & S_{12} \\ -S_{12}^T & S_P \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} R_F & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_f \\ f_p \end{bmatrix} \quad (12)$$

여기서 -는 열벡터를 나타냄. e<sub>f</sub>, f<sub>f</sub>는 축적요소에 인접하는 bond에 관한 횡단변수와 통과변수(full point) e<sub>p</sub>, f<sub>p</sub>는 partial point로서, 저항에 인접하는 bond에 관한 횡단변수와 통과변수, 축적요소에 대해

$$f_f = I^{-1}P \quad (13)$$

Partial point에 인접하는 저항에 대해서는

$$e_p = R_P f_p \quad (14)$$

(14)식을 e<sub>p</sub>식에 대입하고 결과를 e<sub>f</sub>에 대입하면 p' = e<sub>f</sub>가 된다. A는 P' = AP에서 유도되어 (8)식과 같이 된다. 필터회로망이 SFG로 모델링 가능한 경우는 (8)식에서

$$A = [(S_F - R_F)] I^{-1} \quad (15)$$

버터워스 및 체비세프함수 H(S)는

$$H(S) = \frac{1}{A(S)} = \frac{1}{|SI - A|} \quad (16)$$

로 나타낼 수 있다.

IV. 시뮬레이션

본 논문에서 제안된 도식적인 방법에 의한 필터 함수 표현의 타당성을 확인하기 위해 표준화(normalization)된 8차 버터워스필터와 4차 체비세프필터의 주파수특성을 제안된 해석방법에 의한 계산치와 표준설계데이터를 비교한다.

1. 버터워스(Butterworth) 및 체비세프(Chebyshev) 함수 계산 예(例)

Fig. 1에 나타낸 8차 버터워스필터를 선택하여 본 논문에서 제안된 계산법에 의해 버터워스함수



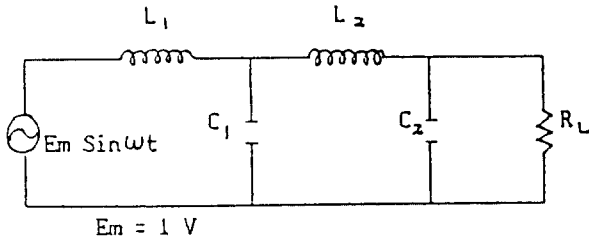


그림 5 단 종단 4차 체비셰프 필터  
4th chebyshev filter with singly-terminated

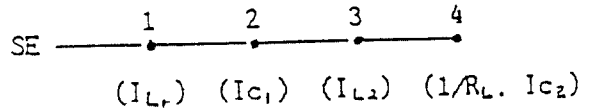


그림 8 그림 5의 포인트그래프  
Pointgraph of Fig. 5

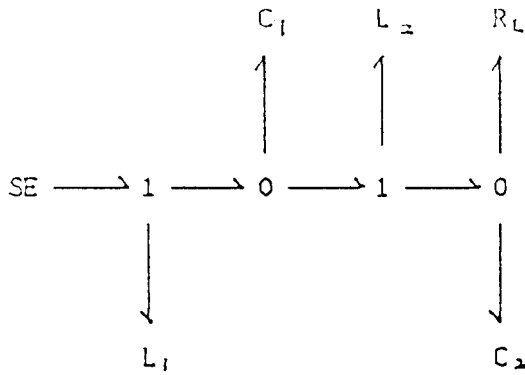


그림 6 단 종단 4차 체비셰프 저역통과필터의 본드그래프  
Bond Graph of 4th chebyshev LPF with singly-terminated

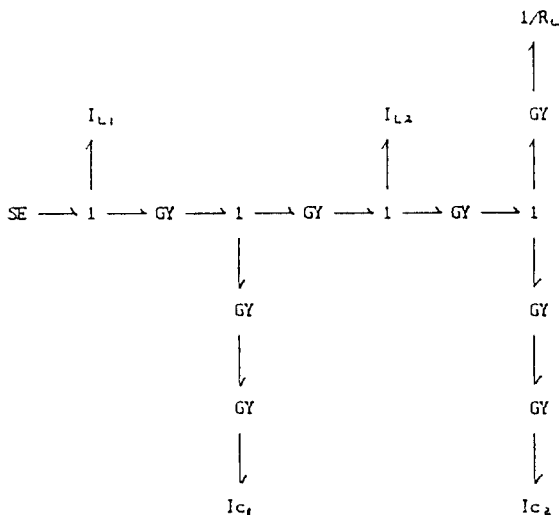


그림 7 그림 5의 자이로본드그래프  
Gyrobond graph of Fig. 5

Full Point graph이므로  $A = (S_F - R_F)I^{-1}$ 에  
(25), (26), (27) 식을 대입하면

$$S_F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$R_F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/R_L \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$I^{-1} = \begin{bmatrix} 1/L_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/L_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/C_2 \end{bmatrix} \quad (27)$$

$A = (S_F - R_F)I^{-1}$ 는

$$\begin{bmatrix} 0 & -1/C_1 & 0 & 0 \\ 1/L_1 & 0 & -1/L_2 & 0 \\ 0 & 1/C_1 & 0 & -1/C_2 \\ 0 & 0 & 1/L_2 & -1/C_2 R_2 \end{bmatrix} \quad (28)$$

이 된다.

따라서 표준화된 체비셰프함수  $H_C(S)$ 는



$$H_c(S) = \frac{1}{A_c(S)}$$

이 되며, 여기서 체비세프 다항식  $A_c(S)$ 는

$$A_c(S) = |SI - A| = S^4 + a_3S^3 + a_2S^2 + a_1S + a_0$$

이며, 계수값은

$$a_0 = 0.3790 \quad a_1 = 1.0249 \quad a_2 = 1.7158$$

$$a_3 = 1.1973 \quad a_4 = 1 \text{로 계산된다.}$$

따라서 체비세프필터함수  $|H(S)|_c^2$ 는

$$|H(S)|_c^2 = \frac{1}{A_c(S) A_c(-S)} \quad (32)$$

에서 구해진다.

## V. 결 론

본 논문에서는 최근까지 시간영역에서의 모델링 방법으로 주로 이용되어 오던 본드그래프 기법이 필터회로망의 주파수 특성 해석에 유용한 방법임을 제안하였고 적용 결과 종래의 해석 방법보다 간략화됨을 알 수 있었다.

필터함수 계산을 위해 본드그래프를 자이로본드 그래프로 나타내고 다시 포인트그래프로 변환시켰다. 포인트그래프로서 필터를 모델링하면 path와 같은 형태의 그래프가 되는데, 일반적인 파라메타를 갖는 구조일 때는 상사변환 원리를 이용한 표준화 계수를 고려해야 한다.

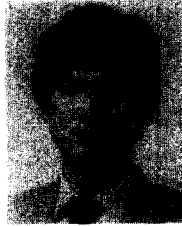
버티워스 및 체비세프 함수는 Gyroadjacency 행렬과 대각행렬로 나타내는 포인트그래프의 상태행렬에 의해 쉽게 유도할 수 있다.

## 參 考 文 獻

1. H. M. Paynter, D. C. Karnopp, "Design and Control of Multiport Engineering Systems", Proc. of IFAV, TOKYO Symposium, pp 443~454, (1965).
2. R. C. Rosenberg, D. C. Karnopp, "A Definition of the Bond Graph-Language", Journ. Dyn. Sys. Mea. and Cont., pp 1~4, sept(1972).
3. Karnopp D. C., and Rosenberg R. C., "System Dynamics : A Unified Approach", John Wiley and Sons Inc., pp 33~88, (1975).
4. Ronald C. Rosenberg, "Medeling and Simulation of Largescale, Linear Multiport System", Automatia, vol. pp 87~95, Jun.(1972).
5. Penfield. Jr, "Description of electrical network using wring operators", Proc, IEEE. 60, pp 49~53(1972).
6. D. karnopp, "Lumped Parameter models of Acoustic Filters using Normal mode and Bondgraph" Jurnal of sound and vibration, 42(4), pp 437~446 (1975).
7. Rosenberg R. C. and Karnop D. C., "Introduction to Physical System Dynamics", McGraw-Hill Inc., pp 85~105, (1983).
8. R. C. Rosenberg, "On Gyrobondgraphs and Their Uses", Journ. Dyn. Sys. Mea. and Cont., vol. 100 / 76 Mar. (1978).
9. D. M. CVETKOVIC. "SPECTRA OF GRAPHS", Academic press, pp 22~77, (1980)
10. H. G. K. "Network Synthesis and Filter Design", Korea electric Association, pp 84, 315 (1983).
11. J. Choma, Jr, "Electrical Networks Theory and Analysis", New York. Wiley (1985)



慎 瓊 緯(Wee Jae SHIN) 正會員  
1949年7月7日生  
1979年2月：東亞大學校 大學院 電子工  
學科(工學碩士)  
1983年2月：慶南大 併設 工專 助教授  
1990年2月：東亞大學校 大學院 電子工  
學科(工學博士)  
1983年3月～現在：慶南大學校 電子工  
學科 副教授



李 炯 基(Hyung Ki LEE) 正會員  
1951年11月27日生  
1975年2月：東亞大學校 電子工學科 卒  
業(工學士)  
1980年2月：東亞大學校 大學院 電子工  
學科(工學碩士)  
1985年6月：東亞大學校 大學院 電子工  
學科(工學博士)  
1974年～1980年2月：韓獨釜山職業訓練  
院 教師  
1976年7月～1978年5月：獨逸練修教育(教師)  
1980年3月～1990年 現在：釜山工業大學 제어계측工學科 副  
教授



金 明 起(Myung Ki KIM) 正會員  
1930年1月25日生  
1958年6月：美國 海軍工科學 卒業  
1966年2月：서울大學校 大學院 電子工  
學科卒業(工學碩士)  
1976年2月：東亞大學校 大學院 電子工  
學 專攻(工學博士)  
1954年2月～1969年3月：海軍士官學校  
教授部勤務  
1969年4月～1972年2月：IMEC 電子株式會社 勤務  
1972年3月～現在：東亞大學校 工科學 電子工學科教授  
本學會 釜山-慶南支部長