

◎ 論 文

비선형항의 효과를 고려한 2차원 유동모형에 대한 수치해석연구

김 희 종* · 김 진 후** · 이 상 화***

(1989년 12월 5일 접수)

A Study on Numerical Analysis for 2 Dimensional Circulation Model with Effect of Nonlinear Term

Hi-Jong Kim, Jin-Hoo Kim and Sang-Hwa Lee

Key Words : Circulation Model(유동모델), Explicit Method(양해법), Bottom Friction Coeff (해저마찰계수), Eddy Viscosity Coeff.(와동점성계수), Open Boundary(개방경계), Nonlinear Term(비선형항)

Abstract

This study describes the application of a two dimensional depth integrated numerical model. The explicit scheme of finite difference method had been applied to the model of circulation.

The nonlinear terms showed a slight difference for the variations of water elevation when calculated grid was small. They were also found to be minor when calculated grid size was increased. For verification of the numerical model, numerical results were compared with predicted values and field data. In the model, the effect of nonlinear advective terms proved not to be significant.

1. 서 론

유동모형은 조석체계를 포함한 유동상태, 수질 환경(탁도, 염도 등), 퇴적물 이동에 의한 지형변화 등 연안개발에 따른 환경변화 예측에 필수적으로

요구되는 해수의 움직임은 1차원, 2차원 또는 3차원적으로 표현하는 수치모형을 일컫고 있다. 1차원 수치모형은 주로 강이나 하구 등의 흐름을 해석하는데 이용되며, 해역이 좁고 긴 지역일때는 실제의 흐름을 잘 재현할 수도 있다. 2차원 수치모형은 수심평균된 식을 이용하는 것으로서 일반적으로

* 동아대학교 토목공학과

** 정회원, 동아대학교 해양공학과

*** 동아대학교 토목공학과

참조사항 : 유동모형을 circulation model, flow model이라 부르고 있음.

널리 쓰이고 있으며 3차원 수치모형은 수심에 따른 유동변화의 폭이 커서 유속의 연직분포를 나타낼 때 요구되는데 복잡한 과정을 필요로 하고 있다. 이러한 여건에 비추어서 본 연구에서는 수심 평균화된 2차원 방정식을 차분화한 후 모형을 구성하여 지배방정식의 비선형항의 효과에 대해서 비교 분석하였다. 수심평균화된 2차원 유동모형은 Hansen¹⁴⁾에 의해서 개발된 후 수치해석방법에 대해서 국외^{11, 12, 13, 14)}뿐만 아니라 국내^{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)}에서도 여러편의 연구발표가 있었다.

본 연구의 유동모형에 대한 수치해석 방법은 유한차분법인 양해법(explicit method)을 선택하여 C-F-L조건(Courant-Friedrichs-Lewy criterion)을 만족하는 범위내($\Delta t \leq \Delta s / \sqrt{2gH_{max}}$)에서 차분시간(Δt)과 계산격자간격(Δs)을 결정하였다. 연구의 대상지역은 수심이 얇은 천해역인 금강하구역을 선택하였으나 이에 앞서 임의의 지역에 대해서 분석을 실시하여 비교하였다. 2차원 유동방정식은 Crean¹¹⁾에 의해서 제시된 형태를 취하였는데 조석에 의한 유체순환(tidal circulation)만을 고려하여 식을 전개하였다.

이에 대한 몇가지 가정은 다음과 같다.

- (1) 물은 비압축성이다.
- (2) 수압은 정수압 분포로서 변한다.
- (3) 수평방향의 수입자의 속도는 연직방향으로의 평균유속을 취한다.
- (4) 해수면에서 바람의 영향을 고려치 않으므로 해면에서의 마찰응력은 무시한다.

2. 지배방정식

기본방정식은 Reynolds의 운동방정식과 연속방정식을 해저에서 해수면까지 수심에 대해서 적분한 후 수심 평균화된 2차원 방정식으로 표시된다.

운동량방정식 :

$$\frac{\partial M}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{M^2}{H} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{MN}{H} \right) - fN + \frac{KM\sqrt{M^2+N^2}}{H^2} + A_H \left(\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial y^2} \right) + gH \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad \dots \dots (1)$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{MN}{H} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{N^2}{H} \right) + fM + \frac{KN\sqrt{M^2+N^2}}{H^2} + A_H \left(\frac{\partial^2 N}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N}{\partial y^2} \right) + gH \frac{\partial h}{\partial y} = 0 \quad \dots \dots (2)$$

연속방정식 :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} = 0 \quad \dots \dots \dots (3)$$

- 여기서, M : x방향 선유량(UH)
- N : y방향 선유량(VH)
- U, V : 수심과 시간에 대해 평균화된 x, y 방향의 유속
- t : 시간
- f : Coriolis계수($f = 2\Omega \sin\phi$)
- Ω 는 지구의 자전 각속도, ϕ 는 위도
- K : 해저마찰계수
- H : 총수심(= d + h)
- d : 평균해면 수심
- h : 해면변위
- g : 중력 가속도
- A_H : 수평방향의 와동점성계수

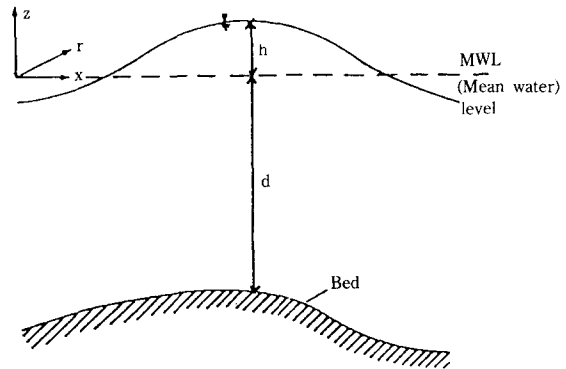


Fig. 1 Definition of coordinates

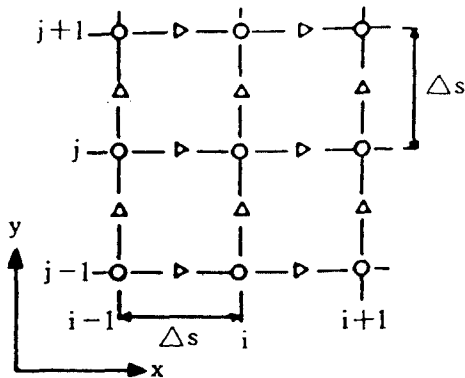
식(1), (2)에서 해저마찰계수(K)는 수심, 해저질의 점성 및 지형 등 여러인자에 의하여 결정되어지는 경험적인 값이며 이 값을 결정하는 특별한 공식은 밝혀져 있지 않으나 대략 0.0025~0.0045 정도이다.^{9, 10, 11, 12)} 국내에서는 금강하구역을 대상으로 수심에 따라 해저마찰계수값이 제시된 경우¹⁰⁾가 있으나 일반적으로 사용되는 값은 0.0025를 채택하고 있다. 와동점성계수값은 수평방향과 연직방향의 값으로 구분되는데 일반적으로 수평방향의 값은 $10^4 \sim 10^6 cm^2/s$, 연직방향의 값은 $1 \sim 10^3 cm^2/s$ 을 사용하고 있다.¹⁵⁾ 여기서는 연직방향의 점성계

수값이 식 (1), (2)의 마찰응력항에서 고려되었다. 와동점성항은 Flather와 Heaps¹³⁾가 Morecambe Bay에 조석상태를 수치계산할 당시까지는 고려하지 않았으나 이후 Crean¹¹⁾은 이항을 넣어 계산해 본 결과, 식 (1), (2)의 좌변의 둘째, 셋째항 즉 비선형의 이송항으로 인해 발생하는 수치계산상의 불안정성이 완화됨을 밝혔다. 본 연구에서는 비선형의 이송항에 대한 존재여부를 고찰하였는데 특히 개방경계에서 일어나는 수치상의 불안정성에 대해서 면밀한 검토를 실시하였다.

3. 해석방법

3.1 차분의 격자구조

격자구조는 Hansen, Flather와 Heaps에 의해서 사용된 것과 유사하다.



- : elevation of sea surface(h)
depth of mean sea level(d)
- ▷ : U velocity
- △ : V velocity

Fig. 2 Spatial grid of model

격자형태는 계산대상영역 전체를 정방형 격자로 분할하고 어긋난 격자형태로 두어, 각 격자점 중앙에 해면변위(h)와 평균해면 수심(d), 측면에 평균유속 U,V를 둔다. 그리고 x방향 차분간격 Δx 와 y방향의 차분간격 Δy 를 동일하게 취하여 $\Delta x = \Delta y = \Delta s$ 로 한다. 식(1), (2), (3)에서 선유량 M,N은

계산을 편리하게 하기 위하여 식(4)와 같은 형태로 변형하여 나타내었다.

$$\begin{aligned}
 SX &= M \frac{\Delta t}{\Delta s} = UH \frac{\Delta t}{\Delta s} \\
 SY &= N \frac{\Delta t}{\Delta s} = VH \frac{\Delta t}{\Delta s} \dots\dots\dots (4)
 \end{aligned}$$

여기서 SX와 SY는 U와 V의 속도점과 동일한 격차점 위치에 있다.

3.2 초기 및 경계조건과 대상지역

유동계산의 초기단계에서는 모든 변수값 SX, SY, U, V 및 h 등은 영(zero)으로 초기화하였다. 육지경계에서는 경계에 평행하거나 수직한 분포는 영(zero)이되는 no slip 조건을 선택했다. 그리고 수치해석상 비선형항의 계산을 위하여 해안선의 경계에서는 투영법(method of image)을 이용하였다.

수치모형을 현장자료와 비교하기에 앞서 모형의 검토를 위해서 임의의 해저지형을 가진 수로에 대해서 고찰하였는데 지형이 수로 전역에 걸쳐 수심이 10m인 일정한 경우와 수로의 중심부분 격자구간에서는 수심은 5m, 그외의 수심이 10m로서 수로 중앙부분이 올라삿은 불규칙한 경우를 예를 들었다. 유동모형 계산격자수는 시간간격 $\Delta t = 10s$, 공간격자간격 $\Delta s = 150m$ 일 때는 28×22 개이며, 시간간격 $\Delta t = 20s$, 공간격자간격이 $\Delta s = 300m$ 일 때는 14×11 개이다. 개방경계치에 사용된 값¹¹⁾으로는 균산내항과 금강하구둑의 분조값(Table 1 참조)을 사용하였는데, 이렇게 가정한 이유는 임의 지형영역이 균산내항에서 금강하구둑에 이르는 영역과 유사하게 생각했기 때문이다.

개방경계에 대한 조위변화식은 식(5)와 같다.

$$\begin{aligned}
 h(x,y,t) &= A_1 \cos(\omega_1 t - \phi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t - \phi_2) \\
 &+ A_3 \cos(\omega_3 t - \phi_3) + A_4 \cos(\omega_4 t - \phi_4) \\
 &\dots\dots\dots (5)
 \end{aligned}$$

- A_1, A_2, A_3, A_4 : 각 분조의 반조차(진폭)
- $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$: 각 분조의 각속도
- t : 시간
- $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$: 각 분조의 지각
(phase lag)

Table 1 Tidal constituents for open boundary condition

	M ₂		S ₂		K ₁		O ₁	
	Angular velocity = 1.404×10^{-4} rad/s		Angular velocity = 1.45×10^{-4} rad/s		Angular velocity = 6.75×10^{-5} rad/s		Angular velocity = 7.29×10^{-5} rad/s	
	Amplitude (cm)	Phase (°)	Amplitude (cm)	Phase (°)	Amplitude (cm)	Phase (°)	Amplitude (cm)	Phase (°)
Gunsan inner harbour	202.5	92.5	72.9	140.6	29.6	282.6	27.2	247.4
Keum river seadike	192.3	95.5	66.3	147.6	33.2	297.8	24.0	246.2

현장대상 구역(Fig. 3 참조)은 군산내항에서 하구둑에 이르는 영역($4.3km \times 3.2km$)인 금강하구둑을 대상으로 계산격자간격(Δs)은 $100m$ 인 정방형으로 하였으며 격자망수는 1452개이며 육지를 제외한 해상격자 즉, 계산점의 격자는 830개이다. 지형자료로서는 금강하구 수리현상 조사보고서(1988. 6)²⁾에 수록된 군산항 수심도(1985. 11)를 이용하였으며 조절변수들로서 Coriolis 계수 즉, $f=2\Omega \sin\phi$ 는 지구자전의 각 속도($\Omega=7.29 \times 10rad/s$), 대상지역의 중심위도($\phi=36^\circ N$)로 주어졌으며 그 외에 와동점성계수($A_H=10^6cm^2/s$), 해저마찰계수($K=0.0025$) 및 계산시간간격($\Delta t=4s$)이 각각 주어졌다.

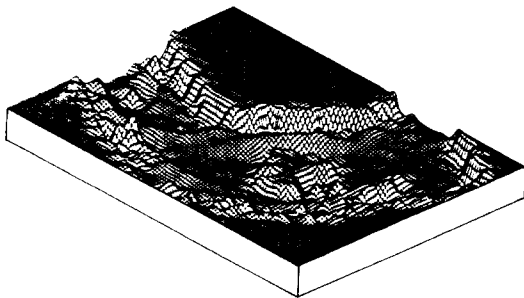


Fig. 3 Topography of model area around Keum river estuary

4. 적용 및 고찰

해저마찰계수를 통상적으로 사용하는 0.0025로 주고 비선형항이 포함되었을 경우와 제외된 경우를 임의의 지형에 대한 수면의 변화에 대해서 RMS(root mean square) 오차로 나타내어 비교하였다.

$$\text{RMS 오차} = \left\{ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (S_{0i} - S_{a_i})^2 \right\}^{1/2}$$

(RMS 오차단위 : cm)

여기서 S_{0i} 와 S_{a_i} 는 비선형항이 제외된 값과 포함될 때 값이며 N 은 데이터 갯수이다. 유동모형 적용시는 비선형항이 포함될 때 불안정한 해의 값이 개방경계 부근에서 발생하므로 비선형항의 포함여부가 문제시되고 있다. Flather와 Heaps¹³⁾은 비선형항의 이송항이 포함된 계산영역을 생각할 때, 개방경계에서 $6\Delta s$ 거리내에 있는 계산격자점에 대해서는 비선형항을 생략하므로 수치해석상의 불안정을 제거할 수 있음을 알았고 Murthy¹⁵⁾는 개방경계에서 $2\Delta s$ 내의 격자점들에 대해서 비선형항을 무시해야 수치해의 불안정을 막을 수 있다고 하였다. 이러한 점들을 고려하여 본 연구에서는 비선형항 포함시 개방경계에서 $3\Delta s$, $6\Delta s$ 내의 격자점들은 전체 계산점에서 제외시켜 그 결과를 비교하였다. 또한 와동점성계수가 미치는 영향을 조사하기 위하여 이 값을 $10^6cm^2/s$ 와 $10^4cm^2/s$ 로 변환시켜 보았다. 비선형항이 포함된 경우는 개방경계에서

Table 2 Comparison for RMS errors of model

	Depth	RMS error	Remarks
Grid size $\Delta s=300m$	uniform	1.84	6 ΔS from open boundary
	uniform	2.41	3 ΔS from open boundary
Eddy viscosity coeff $10^6 cm^2/s$	nonuniform	2.02	6 ΔS from open boundary
	nonuniform	2.65	3 ΔS from open boundary
Grid size $\Delta s=150m$	uniform	3.08	6 ΔS from open boundary
	uniform	3.76	3 ΔS from open boundary
Eddy viscosity coeff $10^6 cm^2/s$	nonuniform	3.32	6 ΔS from open boundary
	nonuniform	4.53	3 ΔS from open boundary
Grid size $\Delta s=300m$			
Eddy viscosity coeff $10^6 cm^2/s$	nonuniform	1.64	6 ΔS from open boundary

3 Δs , 6 Δs 떨어진 경우에서 계산된 값들은 비선형항 제외시를 기준으로 하여 RMS 오차로 비교되었다. 전술한 사항을 고려한 후 계산된 값들을 나타내면 Table 2와 같다.

이상을 토대로 하여 수치모형을 금강하구역의 검증대상지점(금강하구둑 건설전의 하류지점)에 대해서 조위의 관측치와 계산치를 비교하였는데 결과는 Fig. 4-Fig. 5과 같다. 이에 비추어보면 비선형항은 조위계산에 큰 영향을 주지 않았으므로 이항을 제외시켜 계산한 대상 전지역의 유속분포는 검증지점을 기준으로 해서 검증 기간중의 최강 유속값을 갖는 창조시(86. 4. 27 04 : 00)와 낙조시(86. 4. 27 09 : 00)의 상태를 Fig. 6, Fig. 7에 나타내었다.

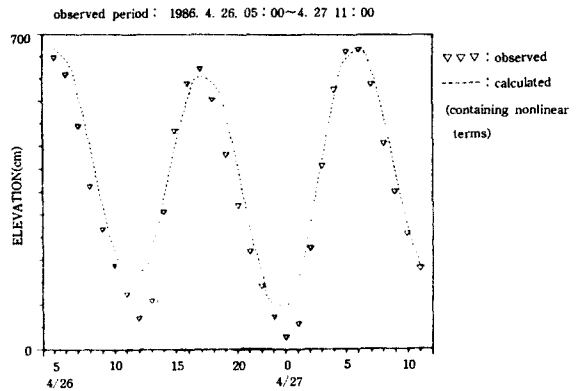


Fig. 5 Comparison of water elevation at observed site(2)

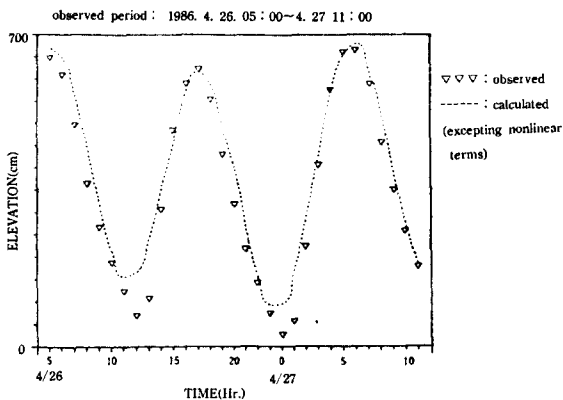


Fig. 4 Comparison of water elevation at observed site(1)

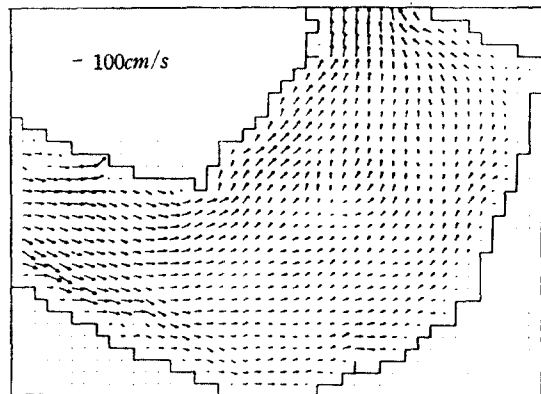


Fig. 6 Velocity distribution of maximum flood

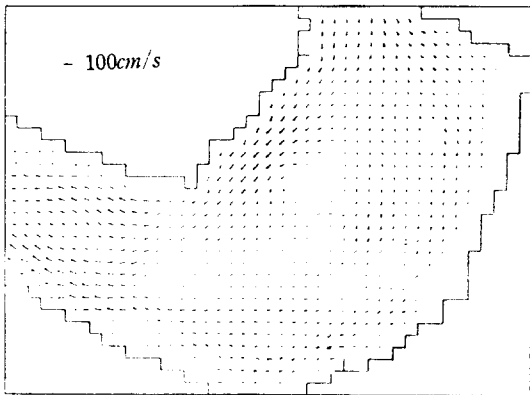


Fig. 7. Velocity distribution of maximum ebb

5. 결 론

이상의 결과에서 알 수 있듯이 비선형항이 포함된 경우와 제외된 값들의 비교치인 RMS 오차는 크지 않았다. 그러나 격자 간격(Δs)이 작을수록 RMS 오차는 큰 값으로 나타나고 있는데 이것은 격자 간격이 적어짐에 따라 비선형항에 대한 경계 처리가 중요시되고 있음을 의미한다. 한편 비선형항이 포함된 경우 개방경계 $3\Delta s$, $6\Delta s$ 떨어진 곳에서 계산된 값들은 차이가 다소 나타나는데 개방 경계처리에서 불안정한 값들이 발생될 수 있음을 알 수 있다. 그리고 와동점성계수의 값을 변화시켰을 때 이 값이 미치는 영향은 크지 않았음이 판명되었다.

현장 대상 지점의 조위에 대한 계산값은 창·낙 조시의 최고점의 부근에서 거의 일치하고 있으나 최저점 부근에서는 관측값¹⁾(군산항 건설사무소, 1986)과 다소 차이를 보이고 있다. 계산된 최강유속값은 내항과 금강하구둑 건설전 지점을 대상으로 비교대상지점으로 하면 기초사원 보고서²⁾의 값들과 유사한 경향을 보이고 있다.

참 고 문 헌

- 1) 군산항 건설사무소, 금강하구 수리현상 조사 현재자료 보고서, 1986. 12
- 2) 군산항 건설사무소, 금강하구 수리현상 조사 보고서, 1. 현지 자료조사, 1988. 6a

- 3) 군산항 건설사무소, 금강하구 수리현상 조사 보고서, 2. 이차원 수치모형 실험, 1988. 6b
- 4) 박창연, 박승우, "수심평균 2차원 수학적 모형 (TIFS)을 이용한 금강하구 및 연해의 조석계산", 한국 농공학회지, 제28권 제1호, 1986. 3
- 5) 이길성, 강주환, "천수방정식의 유한차분특성", 대한 토목학회 논문집, 제9권 제1호, 1989. 3
- 6) 이종태, 이원환, "항내의 장주기파 해석을 위한 2차원 부정류의 수학적 모형", 대한 토목학회 논문집, 제3권 제1호, 1983. 3
- 7) 최병호, "금강하구의 비선형 조석", 한국 수문학회지, 제21권 제1호, 1988. 3
- 8) 한건연, 김정욱, "수치모델에 의한 만내의 2차원 동수역학 해석", 한국수문학회지, 제15권 제4호, 1982. 12
- 9) Ahn, H.S. and S.W. Lee, "A Numerical Experiment on Tidal Currents in Asan Bay", Journal of Oceanological Society of Korea, Vol. 11, No. 1, 1976. 6
- 10) Choi, B.H., "Tidal Computations for Incheon Bay", Journal of Oceanological Society of Korea, Vol. 15, No. 2, 1980. 12
- 11) Crean, P.B., "A Numerical Model of Barotropic Mixed Tides between Vancouver Island and the Mainland and Its Relation to Studies of the Estuarine Circulation," In J.C.J. Nihoul [ed], Hydrodynamics of Estuaries and Fjords, Proc. 9th, Int., Elsevier Scientific publishing Co., pp. 283~313, 1978
- 12) Dronkers, J.J., "Tidal Computations for Rivers, Coastal area and Sea", Journal of the Hydraulics Division, ASCE, Vol. 95, No. HY1, Jan. 1969
- 13) Flather, R.A. and N.S. Heaps, "Tidal Computations for Morecambe Bay", Geophy, J.R. Astr. Soc. 42, pp. 489~517, 1975
- 14) Hansen, W., "Hydrodynamical Methods Applied to Oceanographic Problems", Proc. Symp. Math. Hydrodynamical Methods of phys. Oct. 1961
- 15) Murty, T.S., "Storm Surge", Dep. of Fisheries and Oceans, Ottawa, 1984