다변량 혼합모형에서 통계적 제어문제의 베이지안적 고찰*

이석훈**　　박래현**　　최종석**

〈요　　약〉

조건을 나타내는 독립변수들을 어떻게 제어함으로써 우리가 관찰하는 값을 우리가 목적하고 있는 값에 가깝게 얻을 수 있는지를 연구하는 혼합모형의 통계적 제어문제를 처리하기 위한 방법에 대해서 고찰하였다. 기존 이론이 반응변수가 하나인 경우와 분산을 아는 것으로 가정한 경우를 해결한 것을 주목하고 미리 아는 것으로 가정한 분산을 사전분포를 따르는 변수로 보며, 반응변수를 두개 이상으로 확장하여 다변량 선형모형을 설정하여 다변량 혼합모형에서의 베이지안 처리방법을 예와 함께 제시하였다.

1. 서　론

통계적 제어(statistical control) 문제는 어떤 현상이 통제 가능한 독립변수들 또는 설명변수들(explanatory variables)과 그에 따라서 관찰되는 종속변수들 또는 반응변수들(response variables)로 구성되는 확률모형에 의해서 설명될 때, 반응변수들이 어떤 이유에 의해서 특별히 정하여진 값들을 갖도록 하기 위하여 설명변수들의 값을 어떻게 선택하느냐 하는 문제로 요약된다. 이 문제는 본질적으로 회귀문제(regression problem)가 개입된 상황에서 나타난다고 볼 수 있으며, 다른 한편 통계적 예측의 분야로 볼 수도 있는데 Berliner(1987)가 설명한 바와 같이 통계적 예측 문제는 기존정보의 활용면에서 고전적 접근보다는 베이지안 접근으로 설명이 더 용이하다고 생각되므로 우리는 베이지안 방법과 밀접한 관계를 가진다고 믿고 있다. 문제의 형태상 Calibration이라는 통계적 예측문제와 유사하게 보이는데, Calibration은 반응변수 값이 y_0로 주어졌을 때 이에 대응되는 독립변수 x_0를 점추정 또는 구간추정하는 것인데 반해 제어문제는 반응변수가 목적한 값 y_0를 갖도록 하기 위해 독립변수를 선택하는 것이다. 즉 제어문제에서는 독립변수의 선택이 우리 것이지만 Calibration은 아니다. 통계적 결정론적으로 좀 더 설명하면 Calibration은 손실함수가 x_0와 x_0의 추정량 $\hat{x}_0$으로 되어 있는데 반해 제어문제는 손실함수가 반응변수 만으로 되어 있다. 또 제어문제는 장래의

* 이 연구는 89년도 한국과학재단 연구비 지원에 의한 결과임.
(과제번호 891-0105-019-1)
** 충남대학교 자연과학대학 통계학과. 305-764 대전시 서구 궁동 220

어떤 특정한 실험을 수행하려는 것이므로 점추정만 필요하고 구간추정은 연구의 주대상이 아니라고 할 수 있는데 그 특징이 있다.

통계적 제어문제의 연구는 다양한 확률모형을 도입하면서 진행되어 왔는데 Dunsmore (1969), Zellner(1971), Aitchison과 Dunsmore(1975) 및 Berliner(1983) 등에서 그 흐름을 찾아 볼 수 있다. 한편 Zaman(1981)은 제어문제를 $X^t=(X_1, \cdots, X_p)$가 평균이 $\Theta^t=(\Theta_1, \cdots, \Theta_p)$이고 공분산 행렬이 단위행렬인 정규분포일 때 손실함수 $L(\Theta, \delta) = (\Theta^t\delta-1)^2$ 하에서 결정함수 $\delta^t(x) = (\delta_1(x), \cdots, \delta_p(x))$를 선택하는 문제로 바꾸어서 다루었는데 최근에 Berliner (1987)는 위와 같은 Zaman의 생각을 혼합모형(mixture model)에 응용하여, 예를 들면, 가솔린에서 정하여진 옥탄가 y_0를 얻기 위해서는 어떤 비율로 가솔린의 성분들을 혼합할 것인가를 결정하는 문제를 다루었다.

Berliner가 위 문제에서 얻은 해는 오차항의 분산 σ^2이 알려져 있는 경우이었고 그가 다룬 예제에서는 σ^2의 변화에 해가 둔감(insensitive)하다고 하였다. 그러나 보다 현실적이고 거부감이 없이 하려면 σ^2를 모르는 것으로 가정하여야 하고 다른 예에서는 σ^2의 영향을 무시할 수 있다고 단정할 수 없으므로 본 연구에는 σ^2를 미지로 하여 혼합모형에서의 베이지안 제어문제를 다루고자 한다. 또 한 걸음 더 나아가 일변량 반응변수에 대하여 토의한 Berliner의 접근을 다변량의 반응변수를 가지고 있는 문제에 적용할 수 있도록 확대 발전시키고자 한다. 우리의 베이지안 최적해로서는 Berliner에서 처럼 베이즈 결정법칙을 택했음을 밝혀두고 싶다. 제 2 절에서는 혼합모형에서 오차항의 분산이 미지일 경우 제어문제를 베이지안 접근을 써서 해결하는 방법을 다루었는데 Berliner의 생각을 수정한 것이라 할 수 있다. 제 3 절에서는 다변량 혼합모형에서 제어문제의 베이지안 해결책을 제시하였는데 여기에서도 오차항의 공분산 행렬은 미지로 하였다. 제 4 절에서는 2절과 3절에서 논의된 내용을 Data에 적용하여 보고 전체적인 토의를 하였다.

2. 일변량 혼합모형

2. 1 결정문제(decision problem)

본 절에서 우리가 다루려 하는 것은 다음과 같은 선형혼합모형이다.

$$y_i = \alpha_0 + \alpha_1 z_{1i} + \cdots + \alpha_k z_{ki} + \varepsilon_i \quad , \; i = 1, \cdots, n \tag{2. 1}$$

여기서 k개의 성분비율(z_{ij}) 사이에는 아래와 같은 관계식을 가진다.

$$0 \leqq z_{ji} \leqq 1 \; , \quad \sum_{j=1}^{k} z_{ji} = 1 \; , \quad j = 1, \cdots, k \; ; \; i = 1, \cdots, n \tag{2. 2}$$

윗 식에서 $\Theta_j = \alpha_0 + \alpha_j$, $j = 1, \cdots, k$로 놓으면

$$y_i = \Theta_1 z_{1i} + \cdots + \Theta_k z_{ki} + \varepsilon_i \; , \quad i = 1, \cdots, n$$

으로 되고 이를 다시 행렬을 이용하여 나타내면 아래와 같다.

$$y = Z\Theta + \varepsilon \tag{2. 3}$$

여기서 $y' = (y_1, \cdots, y_n)$, $\Theta' = (\Theta_1, \cdots, \Theta_k)$이고 Z는 $n \times k$ 계획행렬이다. 우리는 오차항 벡터 ε을 평균이 $0 = (0, \cdots, 0)'$ 이고 공분산행렬이 $\sigma^2 I_n$ 인 정규분포 즉, $\varepsilon \sim N_n(0, \sigma^2 I_n)$으로 가정하고 σ^2은 모르는 것으로 하겠다.

y_0를 우리가 원하는 반응변수의 값이라고 하면 (2. 1)식에서 y_0를 양변에서 빼주고 y와 α_0를 새로 정의하면 일반성을 잃지 않고 $y_0 = 0$라 가정할 수 있다. 제어문제는 반응변수 y가 목적한 값인 $y_0 = 0$에 가깝게 나오도록 성분비율을 정하는 것이므로 결정론적으로 보면 손실함수 $L(y, y_0)$하에서 성분비율의 추정값인 결정법칙 $\delta' = (\delta_1, \cdots, \delta_k)$를

$$\delta_i \geqq 0 \ , \quad \sum_{j=1}^{k} \delta_j = 1 \ , \quad i = 1, \cdots, k \tag{2. 4}$$

의 조건하에서 택하는 것으로 볼 수 있는데 우리는 계산상의 편의 등을 고려하여 손실함수를 흔히 쓰는 $L(y, y_0) = (y - y_0)^2 = y^2$을 택하기로 하겠다.

구체적으로 자료에 근거하여 위의 문제를 살펴보면 $b = (Z'Z)^{-1} Z' y$ 와 $s^2 = (n-k)^{-1}(y-Zb)'(y-Zb)$ 이 Θ와 σ^2의 충분통계량이고 $y = \Theta'\delta + \varepsilon$(오차항 ε는 b, s^2과 독립이고 평균이 0, 분산을 $\eta^2(<\infty)$으로 가정하기로 한다)로 볼 수 있으며 위험함수(risk function)가

$$R = E(y^2) = E[(\Theta'\delta)^2] + \eta^2$$

이므로 결론적으로 우리의 제어문제는 b, s^2가 주어졌을 때 손실함수 $L(\Theta, \delta) = (\Theta'\delta)^2$ 하에서 결정함수 $\delta(b, s^2) = (\delta_1, \cdots, \delta_k)'$을 (2. 4)식 하에서 택하는 것으로 할 수 있다.

2. 2 베이지안 방법

위의 결정론적 제어문제를 해결하기 위해 해석과 접근이 가장 쉽고 좋다고 생각되는 베이지안 접근을 하려고 하는데 우리의 방법은 Berliner의 생각을 우리의 가정에 맞게 수정한 것이다.

모수 Θ, σ^2의 사전분포(prior)로는 비정보적(noninformative) 사전분포인

$$\pi(\Theta, \sigma^2) \propto \sigma^{-2}$$

을 택하면 Θ, σ^2의 사후분포(posterior)는 b와 s^2이 서로 독립이므로

$$\pi(\Theta, \sigma^2 \mid b, s^2) \propto \pi(\Theta, \sigma^2) f(b \mid \Theta, \sigma^2) f(s^2 \mid \Theta, \sigma^2)$$

이다. 여기서 $f(\cdot \mid \Theta, \sigma^2)$은 우도함수(likelihood function)을 나타낸다. 또

$$b \sim N_k(\Theta, (Z'Z)^{-1}\sigma^2)$$
$$(n-k)s^2/\sigma^2 \sim \chi^2(n-k)$$

를 이용하면 위 사후분포는 다음과 같이 된다.

$$\pi(\Theta, \sigma^2 \mid b, s^2) \propto (\sigma^{-2})^{n/2} \exp[(-1/2\sigma^2)\{(n-k)s^2 + (\Theta-b)'Z'Z(\Theta-b)\}] \qquad (2.\ 5)$$

(2. 5)식에서 우리가 원하는 Θ의 주변 사후분포는 아래처럼 구해진다.

$$\begin{aligned}\pi(\Theta \mid b, s^2) &= \int \pi(\Theta, \sigma^2 \mid b, s^2)\, d\sigma^2 \\ &\propto [1+(n-k)^{-1}(\Theta-b)'\{(Z'Z)^{-1}s^2\}^{-1}(\Theta-b)]^{-(n-2)/2}\end{aligned} \qquad (2.\ 6)$$

위 (2. 6)식에서 보면 Θ의 사후분포는 자유도가 $n-k$인 다변량 Student t 분포임을 알 수 있고 평균과 공분산 행렬은 아래와 같다.

$$E(\Theta \mid b, s^2) = b \qquad (2.\ 7)$$

$$\mathrm{cov}(\Theta \mid b, s^2) = \{(n-k)/(n-k-2)\}(Z'Z)^{-1}s^2 \qquad (2.\ 8)$$

우리의 제어문제에서 베이즈 결정법칙은 (2. 4)식 하에서 사후 기대 손실함수(posterior expected loss)인

$$l(b, s^2) = \int (\theta'\delta)^2 \pi(\theta \mid b, s^2)\, d\theta \qquad (2.\ 9)$$

을 최소로 하는 δ인데 $(\theta'\delta)^2 = \delta'(\theta\theta')\delta$이므로

$$\begin{aligned}l(b, s^2) &= \delta'(\int \Theta\Theta' \pi(\Theta \mid b, s^2)\, d\Theta)\,\delta \\ &= \delta' B(b, s^2)\,\delta\end{aligned}$$

가 된다. 여기서

$$B(b, s^2) = \{(n-k)/(n-k-2)\}(Z'Z)^{-1}s^2 + bb' \qquad (2.\ 10)$$

결론적으로 베이즈 법칙은 (2. 4)식 하에서 $\delta' B(b, s^2)\delta$을 최소로 하는 δ를 택하는 비선형 계획 문제로 된다.

3. 다변량 혼합모형

2절에서 전개한 문제를 좀 더 확장하여 반응변수가 여러개 있는 경우로 발전시켜 다음과 같은 다변량 혼합모형을 생각해 보자.

$$y_i = \Theta' z_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, \cdots, n \qquad (3.\ 1)$$

여기서 y_i는 $p\times 1$ 벡터, 모수 Θ는 $k\times p$ 행렬이고 z_i는 $0 \leqq z_i$, $1'z_i = 1(1' = (1, \cdots, 1))$인 $k\times 1$ 벡터이다. (3. 1)식을 행렬을 이용하여 다시 쓰면 아래와 같다.

$$Y = Z\Theta + E$$

여기서 $Y' = (y_1, \cdots, y_n)$, $Z' = (z_1, \cdots, z_n)$, $E' = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$이다. 우리는 오차벡터 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ 이 서로 독립이고 모두 $N_p(0, \Sigma)$(Σ는 미지)를 따르는 확률변수라 가정하겠다.

우리의 목적은 2절에서 처럼 목표로 하는 반응변수의 값 $y_0 = 0$을 얻기 위하여 우리가 제어가능한 독립변수의 값 $\delta' = (\delta_1, \cdots, \delta_k)$를 (2. 4)식 하에서 추정하는 것이다. 여기서 사용할 손실함수는 δ에서 반응변수의 출현치를 y라 할 때, $y'Qy$로 하려 한다. Q는 양정치 행렬로 적용하는 문제에 따라 I_p, 대각행렬, Σ의 추정치 등으로 택할 수 있을 것 같다.

데이타에 근거하여 위 문제를 바라보자.

$X = (Z'Z)^{-1}Z'Y$와 $A = (n-k)\hat{\Sigma} = (Y-ZX)'(Y-ZX)$가 Θ와 Σ의 충분통계량이고 $y = \Theta'\delta + \varepsilon$($\varepsilon$는 X, A와 독립이고 평균이 0, 공분산행렬이 V인 오차벡터로 가정하자)로 볼 수 있으므로 2절의 논리를 그대로 적용하면 우리의 제어문제는 데이타 X, A가 주어졌을 때 손실함수

$$L(\Theta, \delta) = \delta'(\Theta Q\Theta')\delta \tag{3. 2}$$

와 (2. 4)식 하에서 결정함수 $\delta = \delta(X, A)$를 선택하는 것으로 할 수 있다.

다음은 위 제어문제의 해결을 위해 베이지안 접근을 시도해 보자.

모수 Θ, Σ의 사전분포로 비정보적인 사전분포

$$\pi(\Theta, \Sigma) \propto |\Sigma|^{-(p+1)/2}$$

를 택하고 X와 A가 독립이라는 사실과

$$X \sim N_{nk}(\Theta, \Sigma \otimes (Z'Z)^{-1})$$
$$A \sim W_p(\Sigma, n-\mathrm{k})$$

인 것을 이용하면 Θ의 사후분포는 아래처럼 계산될 수 있다.

$$\pi(\Theta \mid X, A) \propto |A + (\Theta - X)'Z'Z(\Theta - X)|^{-n/2} \tag{3. 3}$$

여기서 $|G|$는 행렬 G의 행렬식을 나타내고 $G \otimes H$는 행렬 G와 H의 직적(direct product)을 나타내며 $W_p(\Sigma, v)$는 모수가 Σ, v인 Wishart분포를 표시한다. (3. 3)식의 유도는 Box와 Tiao(1973)의 8장을 참조했고 기호도 그 책을 따른 것이다. Box와 Tiao(1973)는 (3. 3)식을 행렬변량(matric-variate) t분포라 부르고 그 분포를 기호로 $t_{kp}(X, (Z'Z)^{-1}, A, \nu)$(여기서 $\nu = n-(k+p)+1$)로 표시했다.

다변량 혼합모형에서의 제어문제에 대한 최적해는 사후기대 손실함수인

$$\begin{aligned} l(X, A) &= \int L(\Theta, \delta)\pi(\Theta \mid X, A)\, d\Theta \\ &= \delta'\{\int \Theta Q\Theta'\pi(\Theta \mid X, A)\, d\Theta\}\delta \end{aligned}$$

을 조건 (2. 4)하에서 최소로 하는 δ가 된다. 그리고 우리는 부록에서 다음 식이 성립함을 증명했다.

$$B(X, A) = \int \Theta Q\, \Theta' \pi(\Theta \mid X, A)\, d\Theta$$
$$= (n-k-2)^{-1} t_r(AQ)(Z'Z)^{-1} + XQX' \qquad (3.\ 4)$$

여기서 $t_r(H)$란 행렬 H의 트레이스(trace)를 나타낸다. 그래서 결국 최적해는 (2. 4)식 하에서 $\delta' B(X, A)\delta$를 최소로 하는 δ가 됨을 알 수 있다.

4. 예제 및 토의

2절에서 미지의 분산인 경우에 얻은 우리의 목적함수를 3절의 다변량의 경우로 확장하여 Snee(1981)와 Berliner(1987)에 의해서 사용된 휘발유 성분 혼합자료를 기본적으로 사용하여 만든 인위적인 자료(artificial data)에 적용하였다.
독립변수는 그들과 동일한 자료를 사용하고 두 개의 반응변수 y_1, y_2를

$$\Theta' = \begin{pmatrix} 100 & 200 & 300 & 400 & 500 \\ 500 & 300 & 400 & 200 & 100 \end{pmatrix}$$
$$\Sigma = \begin{pmatrix} (0.4)^2 & 0.3 \\ 0.3 & (0.25)^2 \end{pmatrix}$$

으로 가정하고 이변량 정규분포를 따르도록 생성하여 (표 1)에 나타내었다.

〈표 1〉

z_1	z_2	z_3	z_4	z_5	y_1	y_2
.000	.000	.350	.600	.060	374.6800	266.0092
.000	.300	.100	.000	.600	390.5720	190.1359
.000	.300	.000	.100	.600	400.2480	170.0179
.150	.150	.100	.600	.000	313.9880	279.6600
.150	.000	.150	.600	.100	350.0680	264.5597
.000	.300	.049	.600	.051	339.6120	234.9093
.000	.300	.000	.489	.211	361.2120	209.1285
.150	.127	.023	.600	.100	336.9480	252.2030
.150	.000	.311	.539	.000	324.0360	307.1754
.000	.300	.285	.415	.000	311.6400	287.0930
.000	.080	.350	.570	.000	348.6120	277.8366
.150	.150	.266	.434	.000	298.8600	313.1599
.150	.150	.082	.018	.600	376.9840	216.6539
.000	.158	.142	.100	.600	413.9800	184.1158
.000	.000	.300	.461	.239	393.6600	236.0192
.150	.034	.116	.100	.600	396.1320	211.7531
.068	.121	.175	.444	.192	357.1200	248.7569
.067	.098	.234	.332	.270	364.4680	249.8909
.000	.300	.192	.208	.300	350.8840	238.3871
.150	.150	.174	.226	.300	337.6840	264.6822

.075	.225	.276	.424	.000	304.7400	300.3870
.075	.225	.000	.100	.600	392.0840	184.8338
.000	.126	.174	.600	.100	367.2720	237.6049
.075	.000	.225	.600	.100	364.6400	257.6567
.150	.150	.000	.324	.376	363.1080	222.4118
.000	.300	.192	.508	.000	321.0120	268.4756

특정히 정하여진 종속변수 y_1과 y_2의 목적값(y_1^*, y_2^*)를 (350, 250), (340, 240)으로 하고 손실함수를 규정하는 양정치 행렬 Q를

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad Q_3 = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

로 놓고 각각 3절에서 얻은 결과를 이용하여 최적의 z_1, z_2, $\cdots$, z_5 값을 (표 2)에서 보였다. 여기서 Q_2와 Q_3는 손실의 크기가 y_1과 y_2의 중요성을 따라 결정되도록 하는 예로서 사용되었고 z의 값들을 구하는 과정은 주어진 자료의 독립변수가 크지 않기 때문에 Berliner(1987)가 사용한 Theil-Van de Panne procedure를 이용하였다.

〈표 2〉

(y_1^*, y_2^*)	Q	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	Z_5
(350, 250)	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	.0576	.1814	.1790	.3685	.2135
	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$	.0495	.1709	.1685	.4531	.1580
	$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	.1653	0	0	.8347	0
(340, 240)	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	.0682	.1955	0	.7363	0
	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$	.0927	.2790	.0824	.2256	.3203
	$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	0	.4013	.1991	0	.3996

한편 위의 결과를 일변량의 경우와 비교하여 보았는데 (y_1, y_2)를 관찰한 대신 y_1, y_2를 하나만 관찰하고 비정보 사전분포를 사용한 경우와, Berliner의 결과와 간접적인 비교를 하기 위하여 참값인 $\sigma^2 = .16$ 을 안다고 가정한 경우에 계산된 Z의 계수를 (표 3)에 정리하였다. 일변량으로 분산을 안다고 가정한 경우 비정보 사전분포를 사용한 경우와 거의 근사한 값을 갖는 것이 보여졌고(y_1만 관찰) 이변량 대신 일변량을 사용했을 때의 Coefficient는 Z_2, Z_4에 차이가 나타남을 볼 수 있었다.

<표 3>

경 우		Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	Z_5
(y_1, y_2)를 모두 관찰	$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	.0576	.1814	.1790	.3685	.2135
y_1만 관찰	비정보사전분포	.0694	.1583	.1711	.4061	.1951
	$\sigma^2 = .16$	.0689	.1577	.1722	.4079	.1934
y_2만 관찰	비정보사전분포	.0682	.1512	.1739	.4016	.2051

통계적 제어문제가 기본적으로 실험자의 정보활용이나 전문가적 가정이 전제된다는 사실에서 베이지안 접근의 타당성을 찾으면서 Berliner(1987)에 의하여 고려된 일변수 문제를 두개 이상의 종속변수에 관한 제어문제로 발전시키는 것을 이 연구의 목적으로 하였다. 평균과 분산에 관한 비정보적 사전분포를 이용하여 사후분포를 closed form으로 제시하고 이를 다변량으로 확장시켰고 이러한 확장된 결과들은 제어문제를 처리하는 현장전문가들을 크게 도울 수 있으리라고 생각된다.

예제에서 사용된 자료가 부분적이나마 인위적으로 생성되어 보다 실제적인 예를 보이지 못하였는데 이는 대부분의 제어문제의 자료가 지극히 제한적으로 노출되고 있어서 Snee(1981)의 자료를 부분적으로 사용할 수밖에 없었다.

최소화 문제에서는 자료의 크기가 크지 않기 때문에 Berliner(1987)의 방법을 사용하였는데 우리는 자료의 크기(관련 독립변수의 수)가 커지는 경우를 대비하여 이 원돈, 이 석훈(1989)이 소개한 simulated annealing(S/A) 방법을 적용하기 위한 실험을 하였다. 부분적인 결과는 대단히 좋게 나와서 일변량인 경우 Berliner(1987)의 결과와 거의 유사한 값이 구하여졌으나 처리시간이 긴 단점을 갖고 있었다. 그러나 독립변수 k가 커지면 이 방법의 개발, 사용도 좋은 방안이라고 생각되어 우리는 제어문제의 실제자료 확보 및 S/A 방법의 이용에 관하여 계속적인 노력을 기울이려고 한다.

부록 : (3. 4)의 증명

Q가 양정치 행렬이므로 $Q = TT'$이 성립하는 정칙(nonsingular)행렬 T가 존재한다. 그래서 $\Theta Q \Theta' = (\Theta T)(\Theta T)'$이 성립한다. Box와 Tiao(1973)의 8장에 의하면 X, A가 주어졌을 때 ΘT의 사후분포는 $t_{kp}(XT, (Z'Z)^{-1}, T'AT, \nu)$이다. 또
$\Theta T = (\Phi_1, \cdots, \Phi_p)$로 표시하면

$$(\Theta T)(\Theta T)' = \sum_i \Phi_i \Phi_i'$$

이 된다. Box와 Tiao(1973)을 참조하면

$$\Phi_i = (\Theta T)e_i \sim t_k((XT)e_i,\ (Z'Z)^{-1},\ e_i'T'ATe_i,\ n-k),\quad i = 1, \cdots, p$$

이므로 X, A가 주어졌을 때 $\Phi_i (i = 1, \cdots, p)$의 사후분포에 대한 평균과 공분산 행렬은

$$E(\Phi_i \mid X, A) = (XT)e_i$$

$$\mathrm{cov}(\Phi_i \mid X, A) = (n-k-2)^{-1}\{e_i'(T'AT)e_i\}(Z'Z)^{-1}$$

로 된다. 여기서 e_i는 i번째 요소가 1인 단위벡터이다. 그러므로

$$E[(\Theta T)(\Theta T)' \mid X, A] = \sum_i E[\Phi_i\Phi_i' \mid X, A]$$

$$= \sum_i [(n-k-2)^{-1}\{e_i'(T'AT)e_i\}(Z'Z)^{-1} + (XT)e_ie_i'(XT)']$$

$$= (n-k-2)^{-1}t_r(AQ)(Z'Z)^{-1} + XQX'$$

〈참 고 문 헌〉

(1) Aitchison, J., and Dunsmore, I. R. (1975). *Statistical Prediction Analysis*, Cambridge University Press.

(2) Berliner, L. M. (1983). "Improving on Inadmissible Estimators in the Control Problem", *The Annals of Statistics*, 11, 814－826.

(3) Berliner, L. M. (1987). "Bayesian Control in Mixuture Models", *Technometrics*, 29, 455－460.

(4) Box, G. E. P., and Tiao, G. C. (1973). *Bayesian Inference in Statistical Analysis*, Addison-Wesley, Massachusetts.

(5) Dunsmore, I. R. (1969). "Regulation and Optimization", *Journal of the Royal Statistical Society*, B, 31, 160－170.

(6) 이 원돈, 이 석훈(1989) "신경회로망 최적화 기법의 배경 및 응용", 전기학회지, pp. 23－30.

(7) Snee, R. D. (1981). "Developing Blending Models for Gasoline and other Blends", *Technometrics*, 23, 119－130.

(8) Zaman, A. (1981). "A Complete Class Theorem For the Control Problem and Further Results on Admissibility and Inadimissibility", *The Annals of Statistics*, 9, 812－821.

(9) Zellner, A. (1971). *An Introduction to Bayesian Inference in Econometrics*, John Wiley, New York.

Bayesian Control Problem in Multivariate Mixture Model

Sukhoon Lee*, Nae Hyun Park*, Jong Suk Choi*

〈Abstract〉

We consider the statistical control problem for the mixture model in which one can choose the values of independent variables that produce the values of the dependent variables as close to the target values as possible. The theory suggested for the problem is reviewed and an extended model with respect to the assumption of variance and the number of dependent variables is suggested. A Bayesian treatment is studied for the above problem with example as an illustration.

* Chungnam University, Dept of Statistics, 220 Goongdong, Youseongku, Taejon, 305－764 KOREA