

유연성 반복과정과 비선형유한요소법에 의한 케이블 구조물의 형태탐색

A Shape Finding of the Cable Structures by Flexibility Iteration Procedure and Nonlinear FEM

皇	甫	錫*
Hwang	bo,	Seok
徐	三	悅**
Sur,	Sam	Uel
權	宅	鎭***
Kwun,	Taek	Jin

요 약

케이블 구조물은 응력-변형도관계에서 비선형성이 강하고 대변위에 의해 기하학적 비선형이 도입되므로 해석이 복잡하다. 그러므로 케이블 구조물의 평형형태 탐색과 해석에 앞서 기하학적 비선형을 고려해야만 한다.

본 논문에서는 이러한 문제를 해결하기 위해 케이블, 네트, 전선, 현수케이블 지붕등에 적용될 수 있는 수치해석과정이 소개된다. 이 과정은 두 부분으로 나눌 수 있는데, 하나는 유연성반복과정에 의해 등분포하중을 받는 케이블 구조물의 응력과 평형형태를 구하는 것이고, 다른 한 부분은 비선형 유한요소법에 의해 절점외력을 받는 평형형태를 해석하는 것이다.

Abstract

Analysis of cable structures is complex because their force-displacement relationships are highly nonlinear and also because large deformations introduce geometric nonlinearity.

Therefore, we must take account their geometric nonlinearity in the analysis and find the equilibrated shape of cable structures.

In this paper, to solve these problems, numerical procedures involving geometrical nonlinearity are introduced. They are applicable to general cable net, flexible transmission lines and suspended cable roof. These procedures are divided into two parts; one is to obtain the equilibrated shapes

* 정회원, 성균관대 대학원

** 정회원, 성균관대 강사

*** 정회원, 성균관대 교수, 공학박사

이 논문에 대한 토론은 1990년 12월 31일까지 본 학회에 보내주시면 1991년 6월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

and stresses of the cable structures with uniform load by flexibility iteration method, the other is to analyse the equilibrated structures subjected to nodal external forces by nonlinear finite element method.

1. 서론

케이블 구조는 현수교, 사장교, 또는 이와 비슷한 형태로 만든 구조가 대부분이었으나 최근에 케이블 트러스나 케이블 네트를 이용한 새로운 구조가 개발되어 체육관, 격납고, 전시관등 대스판구조물에 자주 이용되고 있다.

케이블 구조물은 역학적으로 휨강성이 거의 없고 인장에 의해 하중이 전달되는 구조로써, 다른 구조에 비해 매우 가벼운 구조물을 형성한다.

그러나 재료적인 비선형성이 강하고 형태의 불안정성 때문에 해석이 용이하지않다. 따라서 케이블 구조물의 형태안정화는 구조공학자가 결정해야할 중요한 문제중의 하나이다.

연속체에 대한 유한요소해석이 거의 전 분야에 걸쳐 적용되고 있음에도 불구하고, 케이블 구조물은 그형태에 따라 전체적인 거동이 여러가지 양상으로 나타나기 때문에, 다양한 해석방법이 전개되어 왔다. 현수지붕, 현수교등과 같은 대부분의 케이블 구조물에서, 변위는 매우 크지 않고 기하형태는 해석하기 전에 잘 정의된다. 반면에 계류케이블(繫留케이블; mooring cable), 대규모 케이블 안테나, 해양구조물을 정착시키는 유연파이프(flexible pipe)등은 구조물 자체의 크기와 같은 차수의 변위를 갖으며, 풍력 또는 조력에 의해 동적거동을 하기 때문에 정적평형상태로 수립하기 매우 어렵다. 특히, 케이블 구조물은 대변위에 의한 기하형태를 고려할 때, 기하학적 비선형이 도입되므로 안정형태를 결정하는데 더욱 복잡하게 된다.

본 논문에서는 OB'rein¹¹등이 제안한 유연성반복과정(Flexibility Iterative Procedure)을 사용하여 자중, 열하중과 같은 등분포하중조건에 의한 부재의 축력을 계산하고 정적평형상태에서의 임의의 절점기하형태를 정확하게 결정하고자 한다. 또한, 이상의 결과에 의한 기하형태와 초기 부재력을 이용하여 케이블 성분을 갖는 임의의 구조물 형태

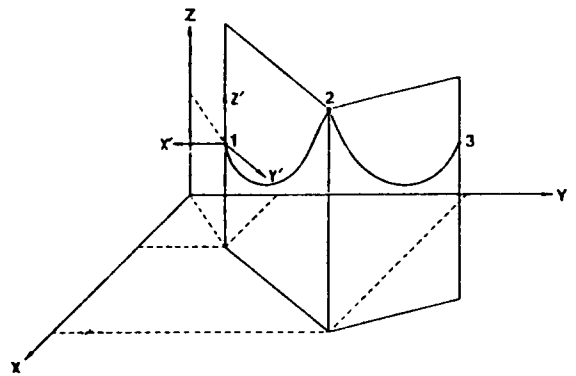
에 대한 안정형태를 일반적인 비선형 수치해석과정을 통하여 결정하고자 한다.

2. 평면케이블요소와 지배 방정식

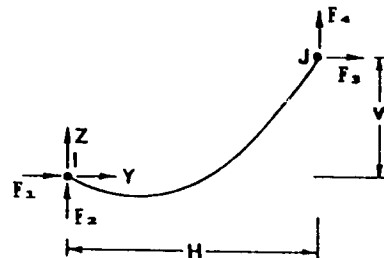
2. 1 평면케이블 요소

Fig. 1(a)에서와 같이 전체좌표계 XYZ에서 취한 국부좌표계 X'Y'Z'의 Y'Z'평면에 존재하는 2차원 평면케이블요소를 선택할 수 있다. 이 케이블요소는 자중을 받아 탄성현수곡선으로 평형상태를 갖는 탄성케이블요소이다.(Fig. 1(b))

여기에서 F_1, F_2, F_3, F_4 는 각 절점의 단부력이며 H와 V는 각각 케이블의 수평, 수직 투영길이이다.



(a) global coordinates



(b) cable elements in local coordinates

Fig. 1 Cable Elements

2. 2 지배방정식

Fig. 1(b)에서 취한 평면케이블요소의 단부력을 결정하기 위해 다음과 같은 현수방정식을 이용한다.

$$L^2 = V^2 + H^2 \frac{\sinh^2 \lambda}{\lambda^2} \tag{2.1}$$

$$\lambda = \frac{W |h|}{2 |F_1|} \tag{2.2}$$

$$F_2 = \frac{W}{2} \left[\frac{-V \cosh \lambda}{\sinh \lambda} + L \right] \tag{2.3}$$

$$H = -F_2 \left[\frac{L_u}{EA} + \frac{1}{W} \text{Log} \left(\frac{F_4 + TJ}{TI - F_2} \right) \right] \tag{2.4}$$

$$V = \frac{1}{2EA W} (TJ^2 - TF^2) + \frac{TJ - TI}{W} \tag{2.5}$$

$$L = Lu + \frac{1}{2EA W}$$

$$\left[F_4 TJ + F_2 TI + F_2^2 \text{Log} \left(\frac{F_4 + TJ}{TI - F_2} \right) \right] \tag{2.6}$$

여기에서 L 은 탄성변형된 케이블의 길이이고, Lu 는 변형전의 케이블길이이다. W, E, A 는 각각 단위길이당 하중, 탄성계수, 단면적이며 TI 와 TJ 는 각 절점에서의 부재력이다.

식(2.4)와 (2.5)는 Hooke의 법칙에 의한 탄성신장이 포함되어 있으며 이것은 다음의 정적방정식에 의해 F_1, F_2 만의 함수로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} H &= \mathbf{F}_w [F_1, F_2] \\ V &= \mathbf{F}_v [F_1, F_2] \\ L &= \mathbf{F}_l [F_1, F_2] \end{aligned} \tag{2.7}$$

여기에서

$$\begin{aligned} F_4 &= -F_2 + WLu \\ F_3 &= -F_1 \\ TI &= (F_1^2 + F_2^2)^{1/2} \\ TJ &= (F_3^2 + F_4^2)^{1/2} \end{aligned} \tag{2.8}$$

2. 3 유연성반복과정

등분포하중을 받는 케이블의 평형형태를 결정하기 위해 유연성반복과정을 이용한다. Fig. 2는 유연성반복과정의 i 번째 과정을 표현한다.

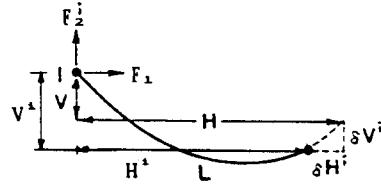


Fig. 2 i step of iterative flexibility method

여기에서 첨자 i 는 i 번째 과정을 나타내며 H 와 V 는 i 번째 과정에서 식(2.4)와 (2.5)에 의해 결정되는 케이블의 수직, 수평 투영길이이다. $\delta H, \delta V$ 는 각각 초기절점좌표에 의한 H, V 와 H^i 와 V^i 와의 오차벡터이다. 만약 이 오차벡터가 허용치를 초과한다면 다음 식에 의해 선형보정을 가한 F_1^{i+1}, F_2^{i+1} 의 값을 갖고 허용범위 안으로 수렴할때 까지 반복을 계속한다.

$$\begin{aligned} F_1^{i+1} &= F_1^i + \delta F_1^i = F_1^i + a_1 \delta H^i + a_2 \delta V^i \\ F_2^{i+1} &= F_2^i + \delta F_2^i = F_2^i + a_3 \delta H^i + a_4 \delta V^i \end{aligned} \tag{2.9}$$

여기에서 a_1, a_2, a_3, a_4 는 보정항이다. 한편, 케이블 단부력에 대한 H^i 와 V^i 의 변화는 H 와 V 를 F_1, F_2 에 대해 미분하여 단부력의 변화량을 곱함으로써 구할 수 있다.

$$\delta H^i = \left(\frac{\partial H}{\partial F_1} \right)_i \delta F_1^i + \left(\frac{\partial H}{\partial F_2} \right)_i \delta F_2^i \tag{2.10}$$

$$\delta V^i = \left(\frac{\partial V}{\partial F_1} \right)_i \delta F_1^i + \left(\frac{\partial V}{\partial F_2} \right)_i \delta F_2^i$$

$$\beta_1 = \left(\frac{\partial H}{\partial F_1} \right)_i = \frac{H^i}{F_1^i} + \frac{1}{W} \left(\frac{F_4^i}{TJ} + \frac{F_2^i}{TF} \right) \tag{2.11}$$

$$\beta_2 = \left(\frac{\partial H}{\partial F_2} \right)_i = \frac{F_1^i}{W} \left(\frac{1}{TJ} - \frac{F_2^i}{TF} \right) \tag{2.12}$$

$$\beta_3 = \left(\frac{\partial V}{\partial F_1} \right)_i = \frac{F_1^i}{W} \left(\frac{1}{TJ^i} - \frac{F_2^i}{TF^i} \right) \quad (2.13)$$

$$\beta_4 = \left(\frac{\partial V}{\partial F_2} \right)_i = -\frac{Lu}{AE} - \frac{1}{W} \left(\frac{F_4^i}{TJ^i} + \frac{F_2^i}{TF^i} \right) \quad (2.14)$$

여기서에서 식(2.11)~(2.14)는 식(2.8)에 의해 F_1, F_2 만의 함수로 표현 될 수 있으며 식(2.9)의 a_1, a_2, a_3, a_4 는 식(2.10)과의 관계에 의해 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$a_1 = \frac{\beta_4}{d} \quad a_2 = \frac{-\beta_2}{d} \quad (2.15)$$

$$a_3 = \frac{-\beta_3}{d} \quad a_4 = \frac{\beta_1}{d}$$

여기에서

$$d = (\beta_1 \beta_4 - \beta_2 \beta_3)$$

위에서 언급한 반복과정을 수행하기 위해서는, 초기값 F_1^0, F_2^0 가 요구되는데 F_1^0, F_2^0 에 대한 값은 다음식을 이용한다.

$$F_1^0 = \frac{-WH}{2\lambda^0} \quad (2.16)$$

$$\lambda^0 = \left[3 \left(\frac{Lu^2 - V^2}{H^2} \right) \right]^{-1/2} \quad (2.17)$$

$$F_2^0 = \frac{W}{2} \left(-V \frac{\cosh(\lambda)}{\sinh(\lambda)} + Lu \right) \quad (2.18)$$

F_1^0 값은 식(2.1)의 L 에 Lu 를 대입하고 $((\sinh^2 \lambda)/\lambda^2)$ 의 급수전개에서의 첫번째 항을 사용함으로써 구할 수 있다. λ^0 값은 다음과 같은 가정으로 선택될 수 있다. 변형되지 않은 길이 Lu 가 절점 I, J 의 직선 거리보다 짧거나 같은 경우 초기 처짐비(sag ratio)를 5%로 가정하여 λ^0 값을 0.2로 정의한다. H 가 0인 경우 임의의 λ 값을 매우 큰 값 10^6 을 주어 계산한다. 따라서 초기 H 가 0이 아닌 경우 케이블은 I 점에서 거의 수평으로 되며, 이것은 또한 F_2 값이

매우 미소하다는 것을 뜻한다. 이러한 경우 F_2 에 대한 보정은 의미가 없어지게 된다.

모든 경우에 수렴이 보장되게 하기 위해 프로그램에서는 J 점이 I 점보다 높을 경우의 요소에 대해 I 점과 J 점을 바꾸어 계산하여 수렴이 얻어진 후, 본래의 위치로 변환된다. 이때, 프로그램에서는 I 점이 J 점보다 높게 인식되기 때문에 V 값은 항상 -값을 취하게 되고, 위의 반복과정은 빠르게 수렴된다. 구해진 F_1 값과 F_2 값을 이용하여 식(2.7)의 관계로서 F_3, F_4, TI, TJ 를 구할 수 있다.

3. 요소방정식

3.1 국부좌표계에서 접선강성

집중하중은 이전의 과정에서 정의된 평형형상의 절점에 작용하는 것으로 하여 이에 대한 유한요소 방정식을 구성한다.

등분포하중에 의한 형태안정에도 불구하고, 절점 하중에 의한 요소의 변위는 빈약한 휨강성과 형태의 불안정성 때문에 여전히 크다. 따라서 케이블 요소에는 탄성변위와 강체이동이 고려되어야 한다. 따라서 대변위에 의한 기하학적 비선형형을 도입한다. 이것은 국부좌표계에서 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$[K] = [K_e] + [K_g] \quad (3.1)$$

여기에서 $[K], [K_e], [K_g]$ 는 각각 국부좌표계에서의 접선강성, 탄성강성, 기하학적 강성매트릭스이다.

케이블 구조물의 거동은 비선형성이 매우 강하므로 하중과 그에 따른 변위를 몇개의 증분으로 나눌 수 있으며 하중증분이 구간에서의 거동은 선형이라고 가정한다. 이때 증분에 대한 힘-변위 관계식은 다음과 같다.

$$\{\delta F\} = [k] \{\delta u\} \quad (3.2)$$

여기에서 $\{\delta F\}$ 와 $\{\delta u\}$ 는 각각 국부좌표계에서의 하중증분과 변위증분이다.

3. 2 전체좌표계에서의 접선강성

$$[K_e] = a^T [k_e] a \tag{3. 8}$$

$$[k_g] d \{ \delta R \} = da^T \{ \delta F \}$$

전체 구조물에 대한 접선강성을 구하기 위해 모든 요소접선강성은 전체좌표계로 좌표변환 되어야 하는데 강성을 조합하기 위해 직접강성법¹⁰⁾(Direct Stiffness Method)을 사용할 수 있다. 전체좌표계와 국부좌표계의 변위관계식은 다음과 같다.

$$\{ \delta u \} = a \{ \delta R \} \tag{3. 3}$$

여기에서 $\{ \delta R \}$ 은 전체좌표계에서 변위증분이고, a 는 좌표변환 Matrix이다.

요소력과 절점력과의 관계는 다음식에 의해 만족되는데 여기에서 $\{ \delta P \}$ 는 증분요소력이며 $\{ \delta F \}$ 는 절점에 작용하는 하중증분이다.

$$\{ \delta P \} = a^T \{ \delta F \} \tag{3. 4}$$

식(3, 4)를 미분하면

$$d\{ \delta P \} = a^T d \{ \delta F \} + da^T \{ \delta F \} \tag{3. 5}$$

이고, 여기에서 두번째 항은 a^T 가 변위 U 의 함수이므로 존재 할 수 있다.

식(3. 5)에 식(3. 2)와 (3. 3)을 대입하면 다음과 같은 식을 얻는다.

$$d\{ \delta P \} = a^T [k_e] a \{ \delta R \} + da^T \{ \delta F \} \tag{3. 6}$$

한편 전체구조물에서 힘 - 변위관계는 다음과 같다.

$$d\{ \delta P \} = [K] d \{ \delta R \} + [K_e] d \{ \delta R \} + [K_g] d \{ \delta R \} \tag{3. 7}$$

여기에서 $[K]$, $[K_e]$, $[K_g]$ 는 각각 전체좌표계에서의 접선강성, 탄성강성, 기하학적 강성을 표현한다.

따라서 식(3, 6)과 (3, 7)로 부터 다음식을 얻을 수 있다.

식(3. 8)의 첫번째 식은 국부좌표계에서 전체좌표계로 좌표변환메트릭스에 의해 변환된 접선강성이고, 두번째 식은 절점변위증분에 의해 요소력의 방향이 변화하는 것을 반영한다.

4. 해석방법

절점력을 받는 구조물의 해석은 비선형해법으로 잘 알려져 있는 Newton-Raphson 반복법과 하중증분법을 조합하여 사용한다. 구조물은 미세하게 분할된 하중 구간에서 선형으로 거동한다고 가정하고 전체하중 P 를 δP 로 분할 할 수 있다. 따라서 각 하중증분에서 구조물의 거동은 다음 식으로 표현한다.

$$\{ \delta R \} = [K^o]^{-1} \{ \delta R \} \tag{4. 1}$$

여기에서 첨자 o 는 초기과정을 표현하며 각 하중증분 단계에서 결정된 변위는 초기기하형태에 더해져 다음 단계에서 초기기하형태가 된다.

각 하중증분에 대한 변위증분을 구하기위해 Newton-Raphson 반복법을 사용하여 접선강성을 구한다. Fig. 3은 각 하중증분에 대한 접선강성을 구하는 과정을 표현한다.

이 과정에서 초기변위값 r^o 가 필요하게 되는데, 본 논문에서는 가상프리스트레스력(Peseudo Prestress)을 적용한다. 가상프리스트레스력은 첫번째 단계에서 계산된 후에 제거되며, 해석의 수렴속도에 영향을 준다. 각 요소에 대한 접선강성은 전체에 대한 접선강성으로 조합되고, i 번째 단계에서 조합된 전체접선강성 $[K]$ 는 적용된 절점력에 부합하는 절점변위와 관계있다. 따라서 i 번째 과정에서 적용된 불균형하중을 다음식으로 구한다.

$$\{ Q \}^i = \{ \delta P \} - \{ \delta F \}^i \tag{4. 2}$$

여기에서 $\{Q\}^i$ 는 i 번째 과정에서 불균형력이며 $\{F\}^i$ 는 i 번째 과정에서 적용된 하중이다.

따라서 $\{Q\}^i$ 가 $\{\delta P\}$ 에 비해 충분히 작을 때, i 번째 하중증분에 대한 평형상태로 수렴하며, 그렇지 않은 경우 계속 다음과정으로 반복된다. Fig. 4는 본논문에서 사용된 프로그램 흐름도이다.

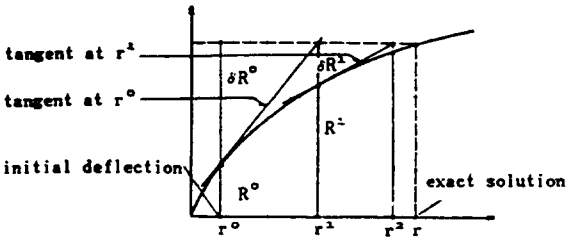


Fig. 3 Load-Deflection Curve

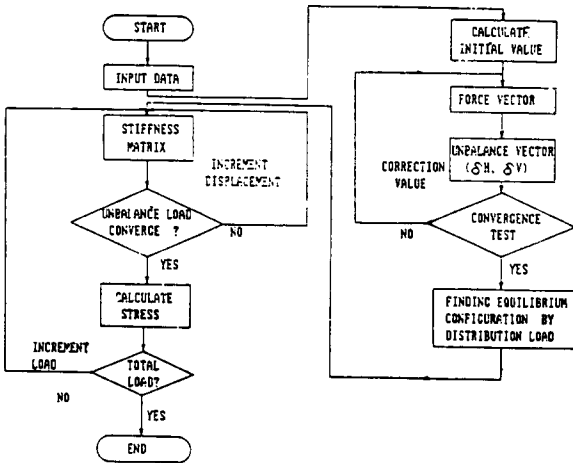


Fig. 4 flow chart of computer program

5. 해석모델 및 고찰

Fig. 5는 자중에 의해 평형화된 현수케이블에 집중하중 8 kips가 작용하는 단일 케이블이다. 일반적으로 케이블 구조물은 자중 또는 프리스트레스력에 의해 평형이 취해진후, 외력이 작용하는 경우가 많기 때문에 이같은 모델의 설정은 현실적이라 할 수 있다. 모델의 초기위치는 지점간에 수평으로 놓여진다. 유연성반복과정에 의해서 자중에 의한 평형형태와 절점외력에 필요한 절점좌표, 그리고

각요소의 자중에 의한 프리스트레스력을 제공한다.

요소의 수는 비교의 목적으로 10개로 하였으며 4개의 일정한 하중증분이 사용되었고, 각 하중 단계에서 2번의 Newton-Raphson 반복법으로 해가 얻어졌다.

하중점에서의 수직변위가 다른 문헌[2], [3], [4], [5]들과 Table 1에서 비교되었다.

Fig. 5 Single Cable (Example 1)

Table 1. Displacements on load points (Example 1)

MODEL	DISPLACEMENTS (ft)	
	HORIZONTAL	VERTICAL
PRESENT	-2.904	-18.190
CBL1	-2.819	-18.458
TRUSS	-2.772	-17.951
O'Brien	-2.82	-18.460
Michalos	-2.773	-17.953
Birnstiel		

Fig. 6은 초기에 프리스트레스력을 갖는 3차원 케이블 네트를 나타내고 있다. 집중하중을 받는 내부절점에서의 변위가 다른 해석결과와 비교되어 Table 2에 제시되었다.

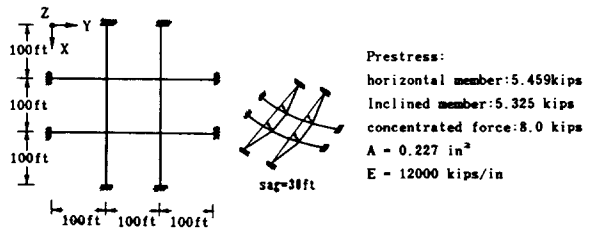


Fig. 6 Cable Net (Example 2)

Table 2. Displacements on load points (Example 2)

MODEL	DISPLACEMENTS (ft)		
	X	Y	Z
PRESENT	-0.1300	-0.1300	-1.4700
CBL1	-0.1300	-0.1390	-1.4673
TRUSS	-0.1322	-0.1322	-1.4707
Saffan	-	-	-1.4707
West Kan	-0.1352	-0.1324	-1.4698

Fig. 7은 지름이 100m인 원형 케이블 넷이다. 이 케이블 넷은 3개의 원형 링과 방사방향(放射方向)의 케이블로 구성된 거미줄형태의 모델이다. 이 모델은 이전의 모델과 같이 자중에 의한 등분하중과 절점집중하중을 받고 있다.

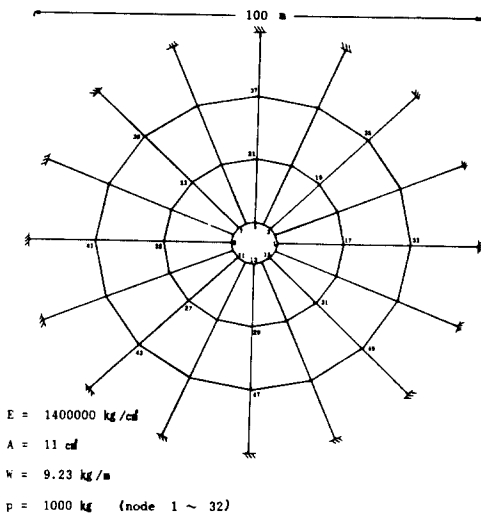


Fig. 7 Circular Cable Net (Example 3)

Table 3. Displacements on typical nodes in each load increment (1, 17, 33 node in Fig. 7)

단위 : cm

LOAD INCREMENT	X			Z		
	1	17	33	1	17	33
1	0.4194	0.8178	0.305	135.8	118.6	57.30
2	0.6656	1.298	0.482	171.1	149.4	72.20
3	0.872	1.700	0.6343	195.8	171.0	82.65
4	1.056	2.060	0.7684	215.6	188.2	90.97

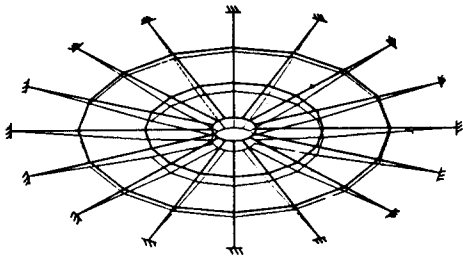


Fig. 8 Equilibrated Shape of Circular Cable Net

Fig. 8은 자중과 절점하중에 의한 평형형태를 나타낸 것이다. 또한 Table 3은 대표적인 절점에서 각하중 증분과 변위반복에 의한 평형형태로 수렴과정을 나타내고 있다.

6. 결론

본 논문에서는 케이블 구조물에 대한 정적해석과정을 표현하였다. 유연성 반복과정을 통해 등분하중에 의한 평형형태를 결정하고 그에 따른 부재의 분할 기하형태와 초기 부재력을 결정 함으로써 복잡한 형태의 구조물 해석에서 필요한 번거로운 입력데이터의 준비과정을 생략할 수 있었다. 이어서 전체구조물의 해석은 Newton-Raphson 반복법과 하중증분법을 병용한 비선형 유한요소법을 이용하였으며 해석결과는 기존의 해석결과와 잘 일치하였다.

본 논문에서 사용된 해석방법은 초기기하형태를 결정하기 어려운 복잡한 형태의 케이블 넷구조, 케이블과 막의 합성구조에서 매우 유용하리라 사료된다.

참 고 문 헌

- O'Brien, W.T., "General Solution of Suspended Cable Problem," J. Structural Division, ASCE, Vol. 93, No. S11, Feb. 1967, pp. 1-26.
- Peyrot, A.H. and Goulois, A.M., "Analysis of Cable Structures," Computer & Structures Vol. 10, No. 5, 1979, pp. 805-813.
- Peyrot, A.H. and Goulois, A.M., "Analysis Transmission Lines," J. Structural Division, ASCE, Vol. 104, No. ST5, May 1978, pp. 763-779.
- Jayaraman, H.B. and Kundson, W.C., "A Curved Element for the Analysis of Structure," Computer & Structures, Vol. 14, No. 3, 1981, pp. 325-333.
- Saafan, S.A., "Theoretical Analysis of Suspension Roofs," J. Structural Division, ASCE, Vol. 96, No. ST2, 1970, pp. 393-405.
- Gambhir, M.L. and Bachelor, B., "A Finite Element for 3-D Prestressed Cable Nets," Int. J.

- Num. Meth. Engng., Vol. 11, 1977, pp. 1699-1718.
7. Leonard, J.W., "Nonlinear Dynamics of Curved Elements," J. Engng. Mech. Div., ASCE, Vol. 99, 1973, pp. 616-621.
8. Leonard, J.W., "Incremental Response of 3-D Cable J. Engng. Mech. Div., ASCE, Vol. 99, 1973, pp. 621-629.
9. Campbell, D.B., "Unbalanced Tensions in Transmission Lines," J. Structural Division, ASCE, Vol. 96, No. ST10, Oct. 1970. pp. 2189-2207.
10. Cook, R.D., CONCEPT AND APPLICATION OF FINITE ELEMENT, Wiley, New York, 1978.
11. Leonard, J.W., TENSION STRUCTURES, McGRAW-HILL Book Co., New York, 1989.
12. 황보석, 서삼열, 권택진, "비선형 이론을 이용한 케이블 네트의 형태안정", 한국전산구조공학회논문집 3권1집; 59~64(1990)
- (접수일자: 1990. 8. 1)