

개선된 Degenerated 쉘 유한요소의 비선형 해석

Nonlinear Analysis of Improved Degenerated Shell Finite Element

최	창	근*
Choi,	Chang	Koon
유	승	운**
Yoo,	Seung	Woon

요 약

본 연구에서는 개선된 degenerated 쉘 유한요소의 탄소성 및 기하학적 비선형 해석에의 적용성을 고찰하였다. 본 연구의 개선된 degenerated 쉘요소는 shear locking 해결에 우수한 결과를 보인 가정된 전단변형도를 대치사용하고, membrane locking 현상을 제거하기 위해 평면내 변형도의 구성시 감차적분을 행하며, 쉘요소 자체의 거동을 보완하기 위해 비적합변위형을 선택적으로 추가하였다. 본 요소는 shear/membrane locking이 발생하지 않으며, 전달가능한 거짓 영에너지모드도 나타나지 않는다. 소성변형 정형화에서는 적층모델을 사용하며, 재료는 von Mises항복조건을 따른다고 가정한다. 유한변형을 고려한 기하학적 비선형 방정식을 total Lagrangian 수식화를 사용하여 정형화하였고, 비선형방정식은 하중제어 및 변위제어법을 사용한 Newton-Raphson 반복법으로 반복 계산한다. 여러 예제해석을 통하여 본 개선된 degenerated 쉘 유한요소의 정확도를 고찰하였다.

Abstract

The paper is concerned with the elasto-plastic and geometrically nonlinear analysis of shell structures using an improved degenerated shell element. In the formulation of the element stiffness, the combined use of three different techniques was made. They are ; 1) an enhanced interpolation of transverse shear strains in the natural coordinate system to overcome the shear locking problem ; 2) the reduced integration technique in in-plane strains to avoid the membrane locking behavior ; and 3) selective addition of the nonconforming displacement modes to improve the element performances. This element is free of serious shear/membrane locking problems and undesirable compatible/commutable spurious kinematic deformation modes. In the formulation for plastic deformation, the concept of a layered element model is used and the material is assumed von Mises yield

* 정회원, 회장, 한국과학기술원 토목공학과 교수

** 정회원, 한국과학기술원 토목공학과 박사과정

이 논문에 대한 토론은 1990년 12월 31일까지 본 학회에 보내주시면 1991년 6월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

criterion. An incremental total Lagrangian formulation is presented which allows the calculation of arbitrarily large displacements and rotations. The resulting non-linear equilibrium equations are solved by the Newton-Raphson method combined with load or displacement increment. The versatility and accuracy of this improved degenerated shell element are demonstrated by solving several numerical examples.

1. 서론

쉘 구조는 그 자체의 구조력학적 효율성과 미학적 특성때문에 여러 분야의 공학적 구조에 가장 많이 사용되는 구조형태 중의 하나이다. 이러한 구조형태의 해석은 선형뿐만아니라, 구조의 안전성과 경제성등의 이유로 비선형해석이 점차 요구되고 있다. Ahmad²⁾등이 처음 제안한 degenerated 쉘유한요소 접근방법은 수학적으로 증명되고 비선형 해석에로의 확대가 용이하고³⁾, 그 효율성도 양호하기때문에 이 접근방법에 의한 쉘 유한요소 개발연구는 많은 연구자들에 의해 계속 수행되고 있다. 그러나 많은 연구결과 이 degenerated 쉘 유한요소는 다소 두꺼운 쉘의 경우에만 우수한 결과를 주는 것으로 알려졌다. 즉 쉘의 두께가 감소함에 따라 수렴성이 떨어지고, 매우 얇은 경우에는 사용요소수에 상관없이 정확한 해에 수렴하지 못하는 현상이 발생한다. 이와같은 바람직하지 못한 현상을 locking현상이라고 하는데, 이는 원래의 degenerated 쉘요소가 휨거동에 영향을 미치지않고 미소한 막변형도(membrane strain)와 전단변형도(transverse shear strain)을 나타낼 수 없기 때문이다.⁴⁾ 이와같은 문제점을 해결하기 위하여 많은 기법들이 적용되어 왔다.

본 연구에서 사용된 개선된 degenerated 쉘요소는 shear locking현상을 제거하기위해 가장 효과적인 가정된 전단변형도장(shear strain fields)를 대치 사용하고, 막변형도에 감차 적분기법을 사용함으로써 membrane locking현상을 제거하며, 쉘요소 전체의 거동을 유연하게 하기위해 비적합변위형을 선택적으로 추가한다.¹³⁾ 이와같은 개선된 degenerated 쉘요소는 쉘의 선형해석에서 수치시험을 한 결과 shear 또는 membrane locking현상이 완전히 제거되며, 전달가능한 거짓 영에너지모드(commutable

spurious zero energy mode)도 발생하지 않으며 수렴성이 양호하였다.¹³⁾

본연구에서는 이와같이 선형해석부분에서 우수한 결과를 보여준 개선된 degenerated 쉘유한요소를 쉘의 재료적 비선형해석과 기하학적 비선형해석에로 그 적용범위를 확장한다. 쉘의 기하학적 비선형 거동을 total Lagrangian수식화를 사용하고, 비선형 수치해석은 Newton-Raphson 반복해법을 사용하여 쉘의 비선형 해석을 행한다.

2. Degenerated 쉘유한요소

본 연구의 곡면 쉘요소의 정형화에는 어떠한 특별한 쉘이론에 구애됨이 없이 다음과 같은 기본적인 가정만을 바탕으로 한다. 첫째는 변형전에 중립곡면에 수직인 직선면은 변형후에도 직선을 유지한다. 이 가정은 많은 연구자들이 선형뿐만아니라 비선형해석에서도 많이 사용되어 왔다.³⁾ 둘째는 중립면에 수직인 응력성분은 없다고 생각한다. Degenerated 쉘요소에서 각각의 절점에서는

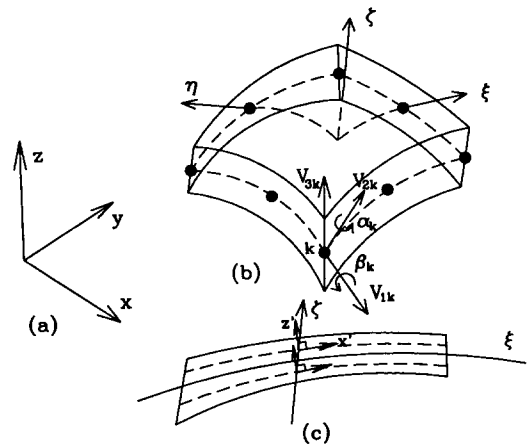


그림 1. Degenerated 쉘 요소에서의 좌표계. (a) 전체좌표계 (b) 절점 및 곡면좌표계 (c) 곡부좌표계

3개의 이동변위(u, v, w)와 2개의 회전변위(α, β)를 갖는다. 이동변위와 회전변위는 각각 독립적으로 생각하기 때문에 전단변형이 허용된다.

2.1 쉘요소의 형상화

Degenerated 쉘요소의 정형화에는 그림1과 같이 전체좌표계, 절점좌표계, 곡면좌표계 및 국부좌표계 등을 함께 사용한다. 쉘의 기하학적형상은 중립면의 절점좌표와 중립면에 수직인 벡터들을 사용하여 표시할 수 있다. 요소 내부의 직교좌표계는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n N_k(\xi, \eta) \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{bmatrix}_{mid} + \sum_{k=1}^n N_k(\xi, \eta) \zeta \frac{h_k}{2} \begin{bmatrix} \bar{v}_{3k} \\ -\bar{v}_{3k} \\ -\bar{v}_{3k} \end{bmatrix} \quad (1)$$

여기서 n 은 절점수이며 $N_k(\xi, \eta)$ 는 중립면의 형상함수, h_k 는 k 절점의 쉘두께이며, ξ, η, ζ 는 고려하는 점의 곡면좌표이며, $v_3 = x_{top} - x_{bot}$ 으로 정의되며, \bar{v}_3 은 v_3 의 단위벡터이다. 또한 요소의 변위장은 중립면에 위치한 각각의 절점에서의 변위자유도와 쉘의 중립면의 각각의 절점에서 정의되는 절점좌표계에 관한 회전자유도등 모두 5개의 절점자유도로써 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n N_k(\xi, \eta) \begin{bmatrix} u_k \\ v_k \\ w_k \end{bmatrix}_{k_{mid}} + \sum_{k=1}^n N_k(\xi, \eta) \zeta b_k \quad (2)$$

여기서 b_k 는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$b_k = \frac{h_k}{2} (\bar{v}'_3 - \bar{v}_3) \quad (3)$$

위의 식에서 \bar{v}'_3 벡터는 v_3 의 변형된 후의 상태를 나타낸다. 만약 v_2 벡터축으로 α 회전변위가 발생하

고, v_1 벡터축으로 β 회전변위가 발생하면서 v_3 벡터가 v'_3 벡터로 변형한다면 b_k 는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$b_k = \frac{h_k}{2} [\sin \cos\beta v_1 + \sin\beta v_2 + (\cos\alpha \cos\beta - 1) v_3] \quad (4)$$

2.2 유한요소 방정식

비선형해석에서의 비선형효과는 응력과 변형도의 기준좌표에 대한 표현관계와 고차항의 고려에 의한 비선형효과로써 기준좌표의 선택에 따라 두가지로 나누어진다. 즉, 초기모양을 기준으로하는 total Lagrangian 수식과 증분시 시작할 때의 모양을 기준으로 하는 updated Lagrangian 수식으로 구분된다. 본 연구에서는 total Lagrangian 수식을 이용하였다. 쉘두께방향(즉 z 방향)으로 응력이 0이라는 가정을 간단히 수용하기 위해서는 변형도항을 국부좌표계로 표현하는 것이 편리하다. 본 연구에서는 total Lagrangian 수식화에서 Green-Lagrangian 변형도와 Piola-Kirchhoff 응력을 사용한다. 미소 증분응력과 미소 증분변형도 관계는 재료성질 행렬 D^* 로써 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\delta\sigma = D^* \delta\varepsilon \quad (5)$$

여기서

$$\sigma = [\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}]^T \quad (6)$$

$$\varepsilon = [\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}]^T \quad (7)$$

국부좌표계에 의한 Green-Lagrangian 변형도는 다음과 같이 표현 가능하다.

$$\varepsilon = \varepsilon^0 + \varepsilon^L \quad (8)$$

여기서 ε^0 는 선형부분이고 ε^L 은 비선형부분이며, 각각의 경우는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\epsilon^0 = \begin{bmatrix} u', x \\ v', y \\ u'y + v', x \\ u', z + w', x \end{bmatrix}$$

$$\epsilon^L = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} [(u', x)^2 + (v', x)^2 + (w', x)^2] \\ \frac{1}{2} [(u', y)^2 + (v', y)^2 + (w', y)^2] \\ u', x \quad u', y + v', x \quad v', y + w', x \quad w', y \\ u', x \quad u', z + v', x \quad v', z + w', x \quad w', z \\ u', y \quad u', z + v', y \quad v', z + w', y \quad w', z \end{bmatrix} \quad (9)$$

또한, Green-Lagrangian 변형도는 변위의 미분항으로 나타낼 수 있다. 즉, E 를 다음과 같이 정의하자.

$$E = [E_x, E_y, E_z]^T \quad (10)$$

여기서

$$E_x = [u', x, v', x, w', x]^T \quad (11a)$$

$$E_y = [u', y, v', y, w', y]^T \quad (11b)$$

$$E_z = [u', z, v', z, w', z]^T \quad (11c)$$

그러면

$$\epsilon^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} E = HE \quad (12)$$

$$\epsilon^L = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} E_x^T & 0 & 0 \\ 0 & E_y^T & 0 \\ E_y^T & E_x^T & 0 \\ E_z^T & 0 & E_x^T \\ 0 & E_z^T & E_y^T \end{bmatrix} E = \frac{1}{2} AE \quad (13)$$

여기서 H 는 일정한 상수행렬이며, A 는 변위자유도 u 에 종속함수이다.

위의 Green-Lagrangian 변형도의 선형, 비선형 부분에 대해 변분을 취하면 다음과 같다.

$$d\epsilon = d\epsilon^0 + d\epsilon^L = H dE + A dE \quad (14)$$

여기서 dE 는 다음과 같다.

$$dE = G du \quad (15)$$

그러므로 변형도의 변분은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$d\epsilon = B du \quad (16)$$

여기서 B 는 다음과 같다.

$$B = B^0 + B^L = [H + A] G \quad (17)$$

2.3 증분 변형 방정식

정적상태에서 평형방정식(equation of static equilibrium)은 다음과 같이 나타낼 수 있다."

$$\psi = R - \int_V B^T \sigma dV = R - P \quad (18)$$

여기서 잔여치 ψ 는 절점평형하에 가정된 변위장을 만족시키기 위한 절점력으로 볼 수 있으며, R 는 외력에 의한 절점력이다. 위의 식은 변위벡터 u 에 대해 직접적으로 풀 수 없으므로 위의 평형방정식을 증분형태로 표시한다. 위의 식에 변분을 취하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} d\psi &= dR - \int_V dB^T \sigma dV \\ &= dR - \int_V B^T d\sigma dV - \int_V G^T dA^T \sigma dV - \\ &\quad - \int_V dG^T [H + A]^T \sigma dV \end{aligned} \quad (19)$$

여기서

$$\int_V B^T d\sigma dV = \int_V B^T DB dV du = K_0 du \quad (20)$$

$$\int_V G^T dA^T \sigma dV = \int_V G^T SG dV du = K_{\sigma 1} du \quad (21)$$

$$\int_V dG^T [H+G]\sigma dV = K_{\sigma 2} du \quad (22)$$

$$S = \begin{bmatrix} \sigma_x I & \tau_{xy} I & \tau_{xz} I \\ \tau_{xy} I & \sigma_y I & \tau_{yz} I \\ \tau_{xz} I & \tau_{yz} I & 0 \end{bmatrix}, \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (23)$$

그러므로 평형방정식 (18)의 증분 평형방정식은 다음과 같이 표현 가능하다.

$$dp = dR - [K_0 + K_{\sigma 1} + K_{\sigma 2}] du = dR - K du \quad (24)$$

3. 감차 적분방법

요소의 강성행렬 계산시 감차적분시 사용은 과도한 전단 및 막에너지의 발생을 억제시키는 효과를 가져다 준다.⁷⁾ 예를들어 2차요소(quadratic element)의 정상적분임점인 $\xi = \sqrt{0.6}$ 에서 평가되는 전단 및 막 변형도는 과도한반면에 감차적분점인 $\xi = \sqrt{1/3}$ 에서는 다소 올바른 전단 및 막 변형도의 평가가 가능하다. 따라서 휨거동에 영향을 미치지 않고 비소한 막 변형도와 전단 변형도를 나타낼 수 없기때문에 발생하는 shear와 membrane locking 현상을 감차적분방법의 사용으로 일부 해결하였다.

이와같은 감차적분의 사용은 요소의 정확도를 증가시키면서 강성행렬의 계산시간을 감소시키는 두가지 효과를 가져다준다. 그러나 감차적분방법의 사용은 또 다른 문제를 발생시킨다. 8절점요소의 경우에는 감차적분방법의 사용에도 불구하고 shear locking 현상이 존재하고, 4절점요소와 9절점요소에서는 감차적분으로 인해 전달가능한 거짓 영에너지모드가 발생되어 해석결과를 무용화시킬 위험성을 초래한다. 따라서 전달가능한 거짓 영에너지모드의 발생을 억제하기위해 일률적인 감차적분 대신에 선택적으로 감차적분을 행하는 방법도 제안되었다. 또 다른 방법으로서 감차적분을 행함으로써 발생하는 전달가능한 거짓 영에너지모드를 안정화시키는 방법이 있다. 이 방법은 전체 강성행렬에 대해 감차적분을 행하고 이것에 거짓 영에너지

모드를 억제시키는 행렬을 더함으로써 강성행렬에 전달가능한 거짓 영에너지모드의 발생을 배제시키는 것이다.

4. 비적합 변위형의 추가

일반 등매개변수요소가 부정확한 값을 주는 가장 큰 원인 중의 하나가 단순한 응력 분포를 제대로 나타내지 못하기 때문이다. Wilson⁸⁾ 등은 2차원 문제에서 비적합변위형(nonconforming displacement mode)를 추가함으로써 요소내에서 발생하는 과도한 변형에너지를 제거하고, 요소의 억제된 거동을 유연하게 하였다. 이와같은 비적합변위형의 추가는 Cochet와 Dhatt⁹⁾에 의해 2차원 비선형 소성문제에 적용되었다. 또한 Choi와 Schnobrich¹⁰⁾는 이 개념을 등매개변수 쉘요소에 적용하여 원래의 요소의 거동을 개선하였으며, 8절점 요소에 추가 적용가능한 다음과 같은 비적합변위 형상함수를 제안하였다.

$$\begin{aligned} \bar{N}_1 &= \xi(1-\xi^2), \quad \bar{N}_2 = \eta(1-\eta^2), \quad \bar{N}_3 = \xi\eta(1-\xi^2) \\ \bar{N}_4 &= \xi\eta(1-\eta^2), \quad \bar{N}_5 = (1-\xi^2)(1-\eta^2) \end{aligned} \quad (25)$$

비적합 변위형의 추가는 원래의 요소의 거동을 개선 시키지만 추가적인 계산시간을 요하게 되므로 요소의 거동을 크게 저하 시키지않는 범위 내에서 비적합 변위형의 추가를 최소화 하는 것이 바람직하다. 추가된 회전변위자유도는 추가된 평면내의 이동변위자유도에 의해 대략 나타낼 수 있으므로 본 요소에서는 회전변위자유도에는 비적합 변위형을 추가 하지 않는다. 위의 비적합 변위형을 원래의 변위장에 추가하여 요소의 변위장을 간단히 표현하면 다음과 같다.

$$U = \sum N_i u_i + \sum \bar{N}_j \bar{u}_j \quad (26)$$

여기서 $u = [u, v, w, \alpha, \beta]$, $\bar{u} = [\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, 0, 0]$ 이다.

위의 식에서 \bar{u} 는 실제적인 변위기 보다는 추가적 비적합 변위형에 대한 크기로 생각할 수 있다. 추가된 \bar{u} 는 역시 요소의 변형에너지를 최소화함으로써 구할 수 있다. 비적합 변위형이 추가로 원래의

평형관계식은 다음과 같이 확장된다.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \bar{\mathbf{u}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \end{bmatrix} \quad (27)$$

여기서 \mathbf{u} 는 절점 자유도이고 $\bar{\mathbf{u}}$ 는 추가된 비적합 변위형의 크기이며, $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$ 는 서로 대응되는 하중성분이다.

비적합 변위형의 추가로 확장된 강성행렬은 정적 응축 (static condensation) 기법을 사용하면 원래와 같은 차수로 줄어들게 된다.

$$\mathbf{K}'\mathbf{u} = \bar{\mathbf{F}}_1 \quad (28)$$

여기서

$$\mathbf{K}' = \mathbf{K}_{11} - \mathbf{K}_{12} \mathbf{K}_{22}^{-1} \mathbf{K}_{21} \quad (29a)$$

$$\bar{\mathbf{F}}_1 = \mathbf{F}_1 - \mathbf{K}_{12} \mathbf{K}_{22}^{-1} \mathbf{F}_2 \quad (29b)$$

$$\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{K}_{22}^{-1} \mathbf{F}_2 - \mathbf{K}_{22}^{-1} \mathbf{K}_{21} \mathbf{u} \quad (29c)$$

5. 가정된 전단 변형도장

본 연구에서는 degenerated 쉘요소에 발생하는 shear locking 현상을 가정된 전단변형도장으로 대체 사용함으로써 극복한다. Shear locking 현상을 제거하기 위해서는 얇은 쉘에서 전단변형도 $\gamma_{\xi\xi}$ 와 $\gamma_{\eta\xi}$ 는 영에 가까워져야 한다. 위와 같은 기법의 사용은 4절점요소에서 Bathe와 Dvorkin¹¹⁾이 처음 사용했고, 고차 절점요소에서 Huang와 Hinton¹²⁾이 사용하였다. 본 연구에서는 shear locking 현상을 제거하기 위해 Huang와 Hinton이 제시한 방법을 수정하여 사용한다.

본 연구에서는 비적합변위형중 $\bar{\mathbf{N}}_5$ 모드 즉 bubble mode가 이동변위에 추가된 상태를 본 degenerated 쉘요소의 기본형으로 생각하므로 가정된 전단변형도 $\tilde{\gamma}_{\xi\xi}$ 와 $\tilde{\gamma}_{\eta\xi}$ 는 적어도 다음과 같은 다항식을 이루어야 한다.¹³⁾

$$\tilde{\gamma}_{\xi\xi} = a_1 + a_2\xi + a_3\eta + a_4\xi\eta + a_5\eta^2 + a_6\xi\eta^2 \quad (30a)$$

$$\tilde{\gamma}_{\eta\xi} = b_1 + b_2\xi + b_3\eta + b_4\xi\eta + b_5\xi^2 + b_6\xi^2\eta \quad (30b)$$

위의 가정된 전단변형도 다항식의 미지항을 구하기 위해 6개의 요소내의 적분 선택점이 필요하게 된다. $\tilde{\gamma}_{\xi\xi}$ 와 $\tilde{\gamma}_{\eta\xi}$ 의 적분 선택점은 그림2와 같이 각각 상이하고, 다음과 같이 보간된다.

$$\tilde{\gamma}_{\xi\xi} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 P_i(\eta) Q_j(\xi) \gamma_{\xi\xi}^{ij} \quad (31a)$$

$$\tilde{\gamma}_{\eta\xi} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 P_i(\xi) Q_j(\eta) \gamma_{\eta\xi}^{ij} \quad (31b)$$

여기서

$$P_1(x) = \frac{x}{2b} \left(\frac{x}{b} + 1 \right), P_2(x) = 1 - \frac{x}{b}, P_3(x) = \left(\frac{x}{b} \right)^2, P_4(x) = \frac{x}{2b} \left(\frac{x}{b} - 1 \right)$$

$a=1/\sqrt{3}$, $b=1$ 이며 적분 선택점 위치는 그림2와 같다.

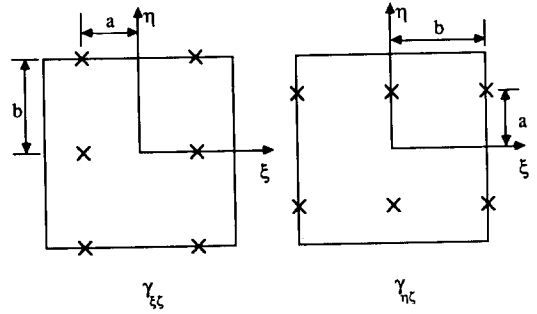


그림2. 전단변형도장의 보간점

6. 개선된 degenerated 쉘유한요소

앞에서 언급한 것처럼 감차적분방법과 비적합 변위형의 추가로 가정된 전단변형도의 대체 사용은 각각의 경우 요소의 거동을 개선 시킨다는 것과 각각의 한계는 잘 알려져있다.^{7) 10) 12)} 본 연구에서는 각각의 한계를 배제하고, 각각의 장점을 보완 결합한 개선된 degenerated 쉘 요소를 구성한다. 본 연구의 개선된 degenerated 쉘요소의 기본작상은 shear locking해결에 우수한 결과를 보인 가정된 전단변형도를 사용하고, membrane locking현상을 제거하기 위해 평면내 변형도의 구성시 감차적분을 행하며, 쉘요소자체의 거동을 보완하기 위해 비적

표1. 수치적분 방법

ELEMENT	STIFFNESS	CONFORMING		NONCONFORMING				
		N ₁ -N ₈	N ₅		N ₁ , N ₂		N ₃ , N ₄	
			u, v, w, α, β	ū	v̄	w̄	ū v̄ w̄	ū v̄ w̄
QSR	IN-PLANE	2×2	-	-	-	-	-	
	TRANSVERSE SHEAR	2×2	-	-	-	-	-	
Type I	IN-PLANE	2×2	2×2	2×2	2×2	3×3	3×3	
	TRANSVERSE SHEAR	2×3/3×2	3×3	3×3	2×3/ 3×2	3×3	3×3	
Type II	IN-PLANE	2×2	2×2	2×2	2×2	3×3	-	
	TRANSVERSE SHEAR	2×3/3×2	3×3	3×3	3×3/ 3×2	3×3	-	

합 변위형을 선택적으로 추가하는 것이다.¹³⁾ 또한 지금까지의 결합된 요소가 선형부분에 국한된 것을 비선형부분으로 확대 적용시킨다.

위에서 언급한 것의 효과적인 결합을 위하여 전체 요소의 강성을 평면내 부분(in-plane part)과 전단 부분(transverse shear part)으로 나눈다. 평면내 부분에는 막(membrane)과 굽힘(bending)의 효과가 포함되어 있다. 전단 변형도 수치 적분시 shear locking 현상을 피하기 위해 적분위치를 선택된 위치에서 2×3/3×2 적분을 행하고, 평면내 부분은 감차 적분(2×2)을 행하며, 모든 부분에 대해 비적합 변위형을 선택적으로 추가한다(표1). 그러므로 증분 Green Lagrangian 변형도 텐서중 전단 변형도에 관한 항을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$d\tilde{\epsilon}_{\eta\xi} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 P_i(\eta) Q_j(\xi) d\epsilon_{\xi\xi}^{ij} \quad (33a)$$

$$d\tilde{\epsilon}_{\eta\xi} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 P_i(\xi) Q_j(\eta) d\epsilon_{\eta\xi}^{ij} \quad (33b)$$

그러므로 증분 변위 미분치와 증분 변위와의 관계는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$d\mathbf{E} = \mathbf{G} d\mathbf{u}_r = \sum \begin{bmatrix} \mathbf{G}_f \\ \tilde{\mathbf{G}}_s \end{bmatrix} d\mathbf{u} + \sum \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{G}}_f \\ \bar{\mathbf{G}}_s \end{bmatrix} d\bar{\mathbf{u}}$$

여기서 $d\mathbf{u} = [d\mathbf{u}, d\mathbf{v}, d\mathbf{w}, d\alpha, d\beta]$, $d\bar{\mathbf{u}} = [d\bar{\mathbf{u}}, d\bar{\mathbf{v}}, d\bar{\mathbf{w}}, \mathbf{0}, \mathbf{0}]$ 이다. \mathbf{G}_f 는 증분 평면내 변위 미분치와 증분 변위 관계행렬이며, $\tilde{\mathbf{G}}_s$ 대치된 증분 전단 변위 미분치와 증분 변위 관계행렬이고, $\bar{\mathbf{G}}_f$ 와 $\bar{\mathbf{G}}_s$ 는 증분 비적합 변위형의 변위 미분치와 증분 비적합 변위형의 변위와의 관계행렬이다.

개선된 degenerated 셀 요소는 비적합모드의 추가형식에 따라 2가지로 구분하였다. 즉 이동 변위 (u, v, w)에 5개의 비적합 변위형(N₁, N₂, N₃, N₄, N₅)을 추가하는 Type I 과 동 변위에 3개의 비적합 변위형(N₁, N₂, N₃)을 추가하는 Type II 로 구분하였다.

7. 수치 해석

본 연구에서 제시한 개선된 degenerated 셀 요소의 비선형 거동을 알아보기 위해 여러 예제 시험을 하였다. 비교를 위하여 8절점 등대개요소를 감차적분한 경우를 QSR⁷⁾로 표시한다. 비선형 해석시에는 Newton-Raphson 반복법을 사용하였으며, 극한점이 있는 경우에는 비선형 평형경로 수치해석은 변위제어법을 사용하였으며, 수렴의 판정은 총 변위의 Euclidian Norm 대 증분된 변위의 Euclidian Norm

의 비가 1.0×10^{-3} 보다 작을 때 수렴하였다고 판정하였다.

선형탄성해석(linear elastic analysis)

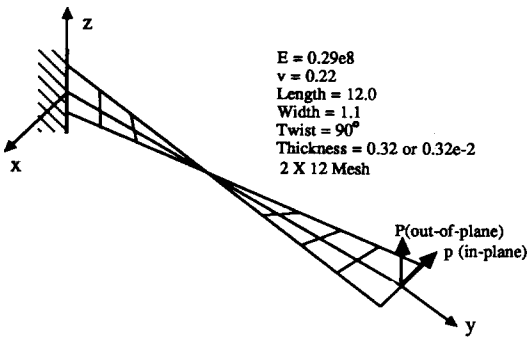


그림3. 면내하중과 면외하중을 받는 비틀린보

그림3은 평면내 하중과 평면외 하중이 작용하는 비틀린 캔틸레버로써 와핑 찌그러짐(warping distortion) 문제를 내포하고 있다. 본 요소는 와핑 찌그러짐 문제에서 양호한 결과를 줌을 표2, 3에서

표2. 비틀린보의 변위 결과치(normalized results : thickness=0.32)

Formulation	Element	In-Plane	Out-of-Plane
Degenerated Shell*	9-Node R	1.00	1.00
	9-Node S	0.99	0.99
	9-Node N	0.98	0.98
Resultant Stress Degenerated Shell*	9-Node R	1.41	1.36
This study	Type I	1.00	1.01
	Type II	1.00	1.00
Beam Theory		0.5424×10^{-2}	0.1754×10^{-2}

Node: * Ref.T. Belyschko et al.(1989); (3×13) mesh
 R Reduced integration(2×2)
 N Normal integration(3×3)
 S Selective integration
 3×3 for in-plane stiffness
 2×2 for shear stiffness

표3. 비틀린보의 변위 결과치(normalized results : thickness=0.0032)

Formulation	Element	In-Plane	Out-of-Plane
Degenerated Shell*	9-Node R	1.01	1.00
	9-Node S	0.02	0.03
	9-Node N	0.01	0.01
Resultant Stress Degenerated Shell*	9-Node R	1.39	1.72
This study	Type I	1.00	1.01
	Type II	0.99	1.00
Beam Theory		0.5256×10^{-2}	0.1294×10^{-2}

Node; * Ref.T.Belyschko et al.(1989); (3×13) mesh
 R Reduced integration(2×2)
 N Normal integration(3×3)
 S Selective integration
 3×3 for in-plane stiffness
 2×2 for shear stiffness

볼 수 있다. 기존의 곡면 쉘요소중에는 본 문제를 만족시키지 못하는 경우도 있다.¹⁹⁾ 캔틸레버의 두께가 각각 0.32, 0.0032의 경우에 대해 해석하였다. 본 비틀린 캔틸레버에서 두께가 0.0032의 경우에 membrane 현상이 심하게 발생하는 예제이다. 즉 표4에서 보는 바와 같이 막변형도부분에 감차적분을 행하지않은 요소에는 매우 심한 membrane locking 현상이 발생하였다. 본 요소에서는 membrane locking 현상이 발생하지 않음을 볼 수 있다.

기하학적 비선형해석(geometrically nonlinear analysis)

평판 스트립(plate strip)

그림4와 같이 무한히 긴 단순 지지된 평판 스트립이 분포하중을 받는 것을 기하학적 비선형해석을 하였다. 대칭성에 의해 단위길이 평판스트립의 반을 5개의 쉘요소로 모델링하였다. 그림4는 분포하중대 평판스트립의 중심에서의 처짐 관계를 나타낸 것이다. 본 요소에 의한 결과는 Hughes와 Liu⁴⁾의 해와 해석해와 비교할 때 좋은 결과를 보인다.

얇은 원형 아아치(shallow circular arch)

그림5과 같이 정점에서 집중하중을 받는 양단이 고정된 얇은 원형 아아치를 해석하였다. 대칭성에

의해 아아치의 반을 8개의 쉘요소로 모델링하였다. 본문제는 snap-through 현상을 일으키므로 변위 제어법을 사용하여 해석하였다. 그림5에서는 보요소를 사용한 Surana¹⁵⁾와 QSR와 비교하였다. 극소점 이하에서 Surana해와 다소 차이를 보여주고 있다.

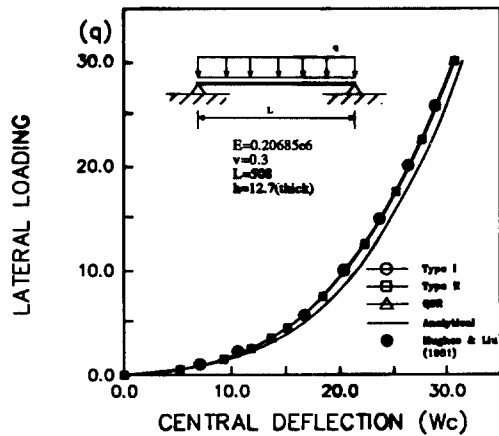


그림4. 평판 스트립의 하중-변위곡선

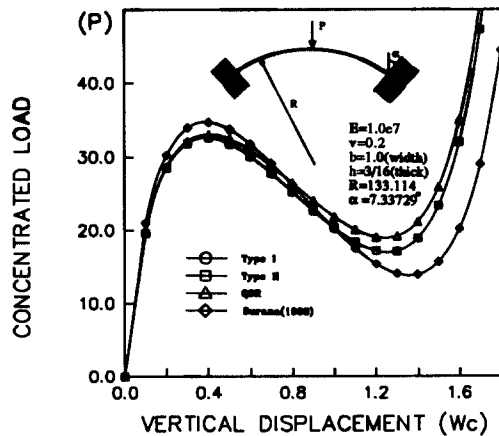


그림5. 얇은 원형아아치의 하중-변위곡선

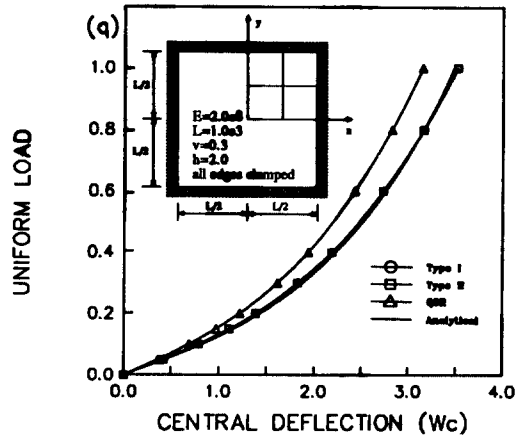


그림6. 정사각형 평판의 하중-변위곡선

사각형 평판(square plate)

그림6에서 보는 바와 같이 등분포하중을 받는 사면이 고정된 사각형 평판을 해석한다. 대칭성에 의해 평판의 1/4을 모델링하였다. 평판 중심의 처짐과 등분포하중의 크기와와의 관계를 그림5에 나타내었다.

원통형 쉘(cylindrical shell)

그림7과 같이 집중하중을 받는 원통형 쉘을 해석하였다. 원통형쉘의 길이 방향의 가장 자리는 힌지

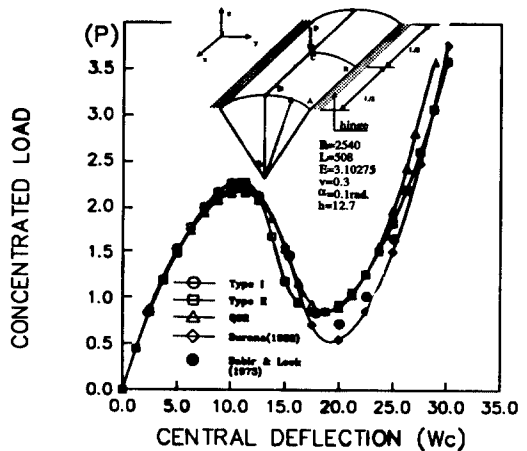


그림7. 원통형 쉘의 하중-변위곡선

로 지지되어 있고, 곡면 가장자리는 자유지지되어 있다. 대칭성에 의해 1/4을 4×4로 모델링하였다. 본 문제도 snap-through 현상을 일으키므로 변위 제어법에 사용하여 해석하였다. 그림7에서 보는 바와 같이 극소점 이하에서는 Surana⁶⁾의 해보다는 Sabira 와 Lock¹⁶⁾의 해에 가깝다.

재료 비선형해석(materially nonlinear analysis)

재료 비선형해석에는 von Mises 항복조건을 만족하는 탄소성재료에 대해서 적층모델(layer model)을 사용하여 해석한다.

사각형 평판(square plate)

등분포하중을 받는 사면이 단순지지된 사각형 평판을 비선형해석한다. 해석에 사용된 평판의 형상과 탄소성 재료특성등은 그림7과 같다. 대칭성에 의해 평판의 1/4만을 4×4로 모델링 하였다. 본 해석에서는 평판의 두께방향으로는 5개의 균일한 층을 사용하였으며, 해석한 결과는 그림8과 같다. 해석 결과를 Hinton과 Owen¹⁷⁾의 결과와 비교시 매우 정확히 일치함을 볼 수 있다.

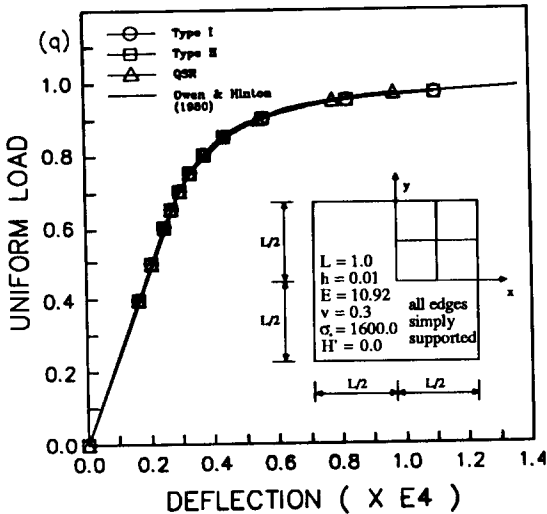


그림8. 평판의 탄소성 비선형유한요소해석

원통형 쉘(cylindrical shell)

자체의 자중이 작용하는 원통형 쉘의 탄소성 비선형해석을 하였다. 해석에 사용된 원통형 쉘의

형상과 탄소성재료특성등은 그림8과 같다. 본 경우에는 쉘의 두께방향으로 4개의 균일한 층을 사용하였다. Martin과 Owen¹⁸⁾의 참고문헌과 비교시 상당 밀을 만한 해석결과를 그림9에서 보여주고 있다.

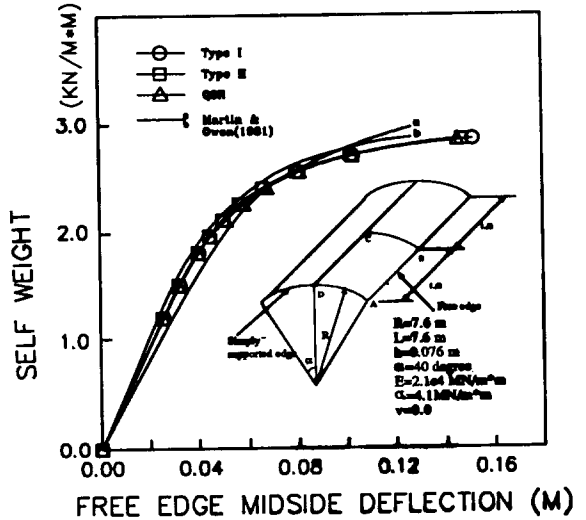


그림9. 원통형 쉘의 비선형유한요소해석

8. 결론

본 연구에서 사용한 개선된 degenerated 쉘유한 요소는 가정된 전단변형도장의 대치사용, 감차적분과 비적합변위형의 선택적 추가등의 장점을 상호 보완적으로 혼합사용하여 선형해석에서 우수한 결과를 주었다. 본 연구에서는 선형해석에서 우수한 결과를 준 개선된 degenerated 쉘유한요소를 쉘의 재료적 비선형해석과 기하학적 비선형해석으로 확대 적용시켰다. 쉘의 기하학적 비선형거동은 total Lagrangian 수식화를 사용하였고, 비선형방정식은 하중제어 및 변위제어법을 사용한 Newton-Raphson 반복법으로 반복계산하였다. 여러 수치해석결과 본 개선된 degenerated 쉘유한요소는 비선형해석 영역에서도 양호한 결과를 준다.

참 고 문 헌

1. Zienkiewicz, O.C., *The Finite Element Metho.*

- 3rd Ed, McGraw-Hill, 1977.
2. Ahmad, S., Irons, B.M. and Zienkiewicz, O.C., Analysis of thick and thin shell structures by curved elements, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 2, 419-451(1970).
 3. Parisch, H., Nonlinear analysis of shells using isoparametric elements, *Nonlinear Finite Element Analysis of Plates and Shells*, T.J.R. Hughes et al.(Eds), AMD-Vol. 48 1981.
 4. Ramm, E. and Matzenmiller, A., Large deformation shell analyses based on the degenerated concept, *Finite Element Methods for Plate and Shell Structures*, T.J.R. Hughes and E.Hinton (Eds), Pineridge Press, 1986.
 5. Stolarski, H. and Belytschko, T., Shear and membrane locking in curved C(0) elements, *Comp. Meth. App. Mech. Eng.*, 41, 279-296, (1983).
 6. Surana, K.S., Geometrically nonlinear formulation for the curved shell elements, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 19, 581-615(1983).
 7. Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L. and Too, J.M., Reduced integration techniques in general analysis of plates and shells, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 3, 275-290(1971).
 8. Wilson, E.L., Taylor, R.L., Doherty, W.P. and Ghaboussi, J., Incompatible displacement models, *In Numerical and Computer Methods in Structural Mechanics*, S.T. Fenves et al.(Eds), Academic Press, 1973.
 9. Cochet, J.F. and Dhatt, G.S., Plasticity analysis by a nonconforming plane element, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 12 561-566(1978)
 10. Choi, C.K. and Schnobrich, W.C., Use of nonconforming modes in finite element analysis of shells, *J. Eng. Mech. Div., ASCE*, 101, 447-464(1975).
 11. Dvorkin, E.N. and Bathe, K.J., A continuum mechanics based four-node shell element for general nonlinear analysis, *Engineering Computation*, 1, 77-88(1984).
 12. Huang, H.C. and Hinton, E., A new nine node degenerated shell element with enhanced membrane and shear interpolation, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 22, 73-92(1986).
 13. Choi, C.K. and Yoo, S.W., Combined use of multiple improvement techniques in degenerated shell element, *Submitted to Computers and Structures*.
 14. Hughes, T.J.R. and Liu, W.K., Nonlinear finite element analysis of shell : Part I, 3-D shells, *Comp. Meth. App. Mech. Eng.*, 26, 331-362(1981).
 15. Surana, K.S. and Sorem, R.M., Geometrically non-linear formulation for three dimensional curved beam elements with large rotations, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 28, 43-73(1989).
 16. Sabir, A.B. and Lock, A.C., The application of finite elements to the large deflection geometrically non-linear behavior of cylindrical shells, *Variational Methods in Engineering*, C.A. Brebbia et al.(Eds), Southampton University Press, 1973.
 17. Owen, D.R.J. and Hinton, E. *Finite Elements Plasticity : theory and practice*, Pineridge Press, 1980.
 18. Martin, R.A.F. and Owen, D.R.J, Elastoplastic and geometrically nonlinear thin shell analysis by the semiloof element, *Computers and Structures*, 13, 505-513(1981).
 19. Belytschko, T., Wong, B.L. and Stolarski, H., Assumed strain Stabilization procedure for the 9-node Lagrangian shell elements, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 28, 385-414(1989).

〈접수일자 : 1990. 4. 3〉