설계 감도 해석(Design Sensitivity Analysis)

양 영 순*

구조물을 설계할 때 설계자는 종래의 경험을 바탕으로 하여 각 설계 변수들의 치수 및 형태를 결정한 후 구조해석을 행하여 그 구조물의 기능 및 안전도 여부를 평가한다. 만일 해석결과와 허용규정치를 만족하지 않는 경우 또는 과다하게 만족하는 경우 보다 좋은 방향으로 설계변수를 변경해야 한다. 설계자가 많은 경험을 가지고 있다 하더라도 그 방향을 계통적으로 찾기는 매우 어려우며 수많은 반복 계산이 요구된다.

이러한 설계변경을 효율적으로 하기 위해서는 각 설계변수를 변화가 구조적 성능에 미치는 경향을 정량화하는 설계 감도해석을 행할 필요가 있다. 하지만, 대부분의 구조적 성능을 나타내는 함수는 설계변수에 대해 음함수의 형태로 표시되므로, 이를 양함수의 형태로 표시해야하며, 이는 수학적으로 설계변수에 대한 구조적 성능의 전미분(total derivative)를 계산하는 과정이다.

이러한 감도해석은 gradient를 이용한 최적설계기법 사용시 최적해로 향하는 설계변경 방향을 결정하는데 사용된다. 이는 최적설계시 가장 중요한 부분이며, 많은 노력과 시간이 소요된다. 또한 감도해석은 근사해석, 해석적 모델의 개선, 설계방향의 평가, 신뢰성 해석 등에도 적용되어 왔다.

이산계 모델링에서 설계변수 벡터를 b, 구조적 성능을 나타내는 함수를 ψ라 할때, ψ의 변분은 b의 변분의 형태로 다음과 같이 표시된다.

$$\triangle\psi = \{\frac{d\psi}{db}\}^T\{\delta b\} + \frac{1}{2}\{\delta b\}^T[\frac{d^2\psi}{db\,db}]\{\delta b\} + \qquad (1)$$

여기서 $\{\frac{d\psi}{db}\}$는 1차 감도 벡터이고, $[\frac{d^2\psi}{db\,db}]$는 2차 감도 행렬이다. 그런데, ψ는 b와 상태 변수 z(b)의 함수로 일반적으로 표시된다. 즉,

$$\psi = \psi(b,\ z(b)) \qquad (2)$$

그리고 상태 방정식은 다음과 같다.

$$K(b)\cdot z(b) = F(b) \qquad (3)$$

여기서 $K(b)$는 강성 행렬이고, $F(b)$는 하중 벡터이다.

일반적으로 감도계산에는 다음과 같은 방법이 있다.

1) 유한차분법

유한차분 근사에 의해 ψ의 미분을 직접 구하는 가장 단순한 방법이지만, 각 설계변수의 증분에 의해 구조해석을 다시 해야하므로 많은 계산 시간이 소요되고, 증분량의 불확실성으로 인해 정확도가 떨어진다. 하지만 대상 함수가 반복과정에 의해 계산될때 이점이 있어 Haftka[1]등에 의해 정확도를 높이는 개선된 유한차분법에 대한 연구가 행해졌다.

* 정회원, 서울대학교 조선공학과 조교수

2) 해석적 방법

Haug와 Arora[2]에 의해 개발된 직접 미분법, 보조 변수법 그리고 Chon[3]에 의한 strain energy 법등이 있다. (2), (3)식을 미분하면

$$K\frac{dz}{db}=\frac{dF}{db}-\frac{\partial K}{\partial b}z\equiv H \qquad (4)$$

$$\frac{d\psi}{db}=\frac{\partial\psi}{\partial b}+\frac{\partial\psi^T}{\partial z}\frac{dz}{db} \qquad (5)$$

– 직접미분법(설계 공간법)

(4)식에서 $\frac{dz}{db_k}$ 를 각 설계변수 b_k에 대하여 구하여(5)식에 대입하여 구한다. 이 방법은 설계변수의 수가 증가하면 계산량이 증가한다.

– 보조 변수법(상태 공간법)

다음 식을 만족하는 보조 변수 벡터 $\boldsymbol{\lambda}$를 도입한다.

$$K\boldsymbol{\lambda}=\frac{\partial\psi}{\partial z} \qquad (6)$$

그러면 (5)식은

$$\frac{d\psi}{db}=\frac{\partial\psi}{\partial b}+\boldsymbol{\lambda}^T H \qquad (7)$$

이 방법은 (6)식을 각 ψ에 대해 계산해야 하므로 ψ의 수가 증가하면 계산량이 증가한다. 그러므로, 직접 미분법과 보조 변수법은 설계변수와 구조적 성능을 나타내는 대상 함수의 수에 따라 적절히 선택되어야 한다.

– Strain energy 법 –

Castigliano 정리를 기초로 하여 감도 계수를 구한다. 구조물의 strain energy의 절점하중에 대한 미분을 유한차분법에 의해 구하므로 많은 계산량이 요구되나, 필요한 정보가 strain energy 분포뿐이므로 기존의 FEM 프로그램을 거의 그대로 이용할 수 있다.

구조설계시 일반적으로 감도 계산을 필요로 하는 구조적 성능은 정적하중에 의해 유발되는 변위, 응력 등과 같은 정적 응답, 고유 진동수 및 고유벡터 등이 있으며 이들은 최적설계시 제한조건으로 주로 사용되는 항이며, 정상상태 응답, 과도 응답에 대한 감도해석에 대한 연구도 많이 행해지고 있다. 그리고 최적설계시 상수로 취급한 물리량들의 변화에 따른 목적함수와 설계변수들의 최적값에 대한 감도 계산에 대한 연구도 진행중이다. 흔히 상수로 취급되는 인자들은 하중, 재료의 특성 등이며 이들의 변화는 목적함수와 제한조건에 동시에 영향을 주므로 목적함수의 최적값에 대한 감도 계산을 제한조건의 단위변화에 대한 목적함수의 변화율을 나타내는 Lagrange승수의 도입으로 계산되어 진다. 하지만 최적 설계변수들에 대한 감도 계산은 Lagrange 승수 외에 설계변수들에 대한 목적함수와 제한조건의 2차 감도 계산을 필요로 한다. 2차 감도 계산은(1)식의 우변 두번째 항까지 계산을 필요로 하며 상기의 경우 외에도 대상 함수가 비선형성이 클 때 보다 정확히 근사 시킬 수 있으며, 최적설계시 제한조건이 있는 문제를 제한조건이 없는 문제로 치환하여 설계할 때 효율성 증가 시켜준다.

감도해석 방법은 정식화 과정에 따라, 앞에서 설명한 이산화 모델링을 전제로 한 이산화감도해석법과 구조물을 구성하는 부재 요소들을 연속체로 취급하여 변분법을 이용하여 정식화한 연속체 감도해석법으로 구분할 수 있다. 이 두 방법의 계산과정에서 차이점은 전자는 설계변수들에 대한 강성행렬의 직접 미분이 필요하다. 이때 강성 행렬이 설계변수에 비례하는 경우는 상수항의 행렬로 구성되나, 비선형인 경우는 일반적으로 유한차분법으로 계산한다. 이에 반해 후자는 변분 계산시 shape function을 직접 사용하여 수치 적분함으로서 강성행렬을 직접 미분할 필요가 없다. 그리고 연속체 감도해석법은 이산화모델링을 전제로 하지 않았으므로 그 응용 범위가 넓고 기존의 범용 프로그램과의 연결시 일반용을 가질 수 있다고 할 수 있다.

그리고 설계변수들의 종류에 따라 단면적, 두께, 재료의 성질 등을 설계변수로 하는 치수 감도해석과 구조물의 길이, 위치, 영역 등이 설계변수가 되는 형상 감도해석이 있다. 치수 감도해석은 앞에서 설명한 내용들이며, 형상 감도해석은 이산화해석법을 사용할 경우 형상의 변화에 따라 요소의

형태가 변화하므로 적용하기가 곤란하고, 연속체 역학의 material derivative와 domain method가 사용된다. 이러한 형상 감도해석은 형상최적설계의 기초연구가 된다. 지금까지 형상 최적설계의 주된 연구는 구멍의 형태, 기계의 요소의 형상과 같은 경계 영역의 문제이었으며, 최적설계의 주요 인자 중의 하나인 layout에 대한 연구는 미비한 상황이므로 이에 대한 관심을 높일 필요가 있다.

구조설계의 최종 목표를 최적 구조설계라 한다면 설계 감도해석은 최적설계의 가장 중요한 부분을 차지하므로 이에 대해 보다 더 정확하고 효율적으로 계산하는 방법에 대한 연구가 필요하다.

참 고 문 헌

1. R.T. Haftka, "Sensitivity Calculations for Iteratively Solved Problems," International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 21, 1985.
2. J.S. Arora and E.J. Haug, "Methods of Design Sensitivity Analysis in Structrual Optimization," AIAA Journal, Vol. 17, Sept. 1979.
3. C.T. Chon, "Design Sensitivity Analysis via Strain Energy Distribution," AIAA Journal, Vol. 22, April 1984.
4. H.M. Adelman and R.T. Haftka, "Sensitivity Analysis of Descrete Structural System," AIAA Journal, Vol 25, May 1986.