

# 수치해석적 응력 적분 방법

이 승 래\*

## 1. 서론

응력 변형율의 관계가 시간에 대한 미분의 형태로 나타나는 비선형 탄소성 혹은 점탄소성 재질을 갖는 구조물이나 지반의 거동 문제를 유한 요소법 등의 방법을 이용하여 해결하려고 하는 경우 주어진 외력에 의한 새로운 응력이나 응력 경화 현상을 표현하는 여러 재료 상수값들을 구하기 위해서는 적분을 요하게 되며 일반적으로 수치해석적 방법에 의해 수행된다. 이러한 수치해석적 적분방법은 보다 정확한 결과를 얻기 위하여 알고리즘 자체의 정확성과 안정성이 요구된다. 정확성은 수치해석적 적분 방법이 적용될 수 있는 step size에 관계없이 거의 동일한 결과치를 얻을 수 있느냐 하는 것을 말하고 안정성은 큰 step size에서도 수렴된 결과치를 얻을 수 있느냐 하는 것을 의미한다. 그뿐만 아니라 비교적 복잡하고도 그 대상영역이 큰 문제를 해석하고자 할 때는 수렴속도 또한 빠른 해석방법이 바람직하게 된다. 따라서 본 기사에서는 여러 가지 가능한 수치해석 적분 방법을 소개하고 그들의 장단점을 논하고자 한다.

## 2. 알고리즘

일반적으로 수치해석적 방법을 이용하여 응력적분을 구하는 방법은 explicit한 방법과 implicit한

방법으로 나뉘어질 수 있다. Explicit한 방법은 기지의 값들을 이용하여 incremental한 방법으로 결과를 얻을 수 있으며 implicit한 방법은 구하고자 하는 미지의 값들이 이용되므로 대개 Iteration방법을 이용하여 결과를 얻을 수 있게 된다.

### 2.1 Explicit 알고리즘

일반적으로 explicit 알고리즘에서 사용되는 응력을 구하는 식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}^n - \Delta \phi C^e : \partial Q / \partial \sigma$$

여기서  $Q$ 는 plastic potential,  $\Delta \phi$ 는 consistency parameter이며  $\Delta \phi$ 와  $\partial Q / \partial \sigma$ 는 통상 trial stress ( $\sigma_{n+1}^n$ )의 궤도(trajecory)가 yield surface와 만나는 점으로부터 계산된다. Owen과 Hinton[1]은 이러한 방법에 더 많은 step을 적용시킴으로써 좀 더 나은 개선책을 강구하였으나 Prevost[2]에 의하면 이러한 알고리즘은 간단하게 적용할 수 있다는 장점이 있는 반면 first-order accuracy를 갖게되고 conditionally stable한 단점을 지니게된다.

### 2.2 Implicit 알고리즘

좀더 효율적이고도 정확하게 응력을 구할 수 있는 방법이 implicit한 방법을 이용하는 소위 일컬

\* 정회원 한국과학기술원 토목공학과 조교수

어지는 return mapping 알고리즘들이다. 이러한 부류의 알고리즘은 처음 Wilkins[3]에 의해 von Mises 소성이론에 적용된 radial return mapping 알고리즘으로 부터 시작되어 Krieg와 Key[4], Ortiz와 Pinsky[5], Simo와 Taylor[6]등에 의하여 개선 확장되어 나갔다. 이 중 Ortiz와 Pinsky에 의해 제안된 closest point projection 알고리즘은 임의의 불록한 파괴면에 적용 가능하도록 확장되었다.

이 알고리즘은 단순히 Newton의 방법을 적용함으로써 trial 상태에서부터 파괴면에 가장 가까운 점을 찾아내는 방법이며 normality condition이 final unknown iteration에 대해 적용되는 implicit한 방법 이므로 unconditionally stable한 알고리즘이다. 그러나 이 방법은 plastic flow 방향으로의 gradient, 파괴면에 수직되는 단위벡터, 탄소성 매트릭스 등을 산정하는 것이 필요하므로 매우 복잡한 형태로 나타나는 소성 모델의 경우 계산과정이 매우 복잡하게 된다.

이러한 단점을 보완하기 위하여 Ortiz와 Simo [7]는 operator splitting methodology를 이용한 cutting plane 알고리즘을 제안하여 plastic flow 방향으로의 gradient를 산정할 필요성을 지양함으로써 closest point projection 알고리즘의 단점을 보완하였으나 이와같은 방법은 constrained optimization 방법에 속하게 되며 초기값을 기준으로 normality condition이 적용되므로 conditionally stable하게 될 뿐아니라 closest point projection 알고리즘에서와 같이 consistent tangent operator를 closed form의 형태로 나타낼 수 없다는 단점이 있다.

### 3. 결론

위에 기술한 여러 알고리즘은 많은 연구자들에 의해 여러가지 소성 모델에 적용되어 사용되어 오고 있으며 이중 특히 closest point projection 알고리즘은 그방법의 장점들로 인하여 선호도가 증가되고 있으며 이 알고리즘의 여러 소성모델(von Mises [6], Drucker-Prager[8], Critical state[9], CAP model [10], etc)에 적용하여 얻어지는 정확성 및 안정성(특히 빠른 수렴정도)은 여러 연구자들에 의해 밝혀지고 있다.

1. Owen, D.R.J. and Hinton, E.(1980), *Finite Elements in Plasticity: Theory and Practice*, Pineridge Press Limited, Swansea, U.K.
2. Prevost, J.H.(1987), "Modelling the Behaviour of Geomaterials", *Geotechnical modelling and Applications*, S.M. Sayed(Editor), Gulf Publishing Company, Houston, Chapter 2.
3. Wilkins, M.L.(1964), "Calculation of Elastic - Plastic Flow", *Methods of Computational Physics*, Academic Press, Vol. 3, New York.
4. Krieg, R.D. and Key, S.W.(1976), "Implementation of a Time-Dependent Plasticity Theory into Structural Computer Programs", *Constitutive Equations in Viscoplasticity: Computational and Engineering Aspects*, ASME, AMD-20, New York.
5. Ortiz, M. and Pinsky, P.M.(1981), "Global Analysis Methods for the Solution of Elastoplastic and Viscoplastic Dynamic Problems", *Report UCB/SESM, No. 81/08*, Department of Civil Engineering, University of California, Berkeley.
6. Simo, J.C. and Taylor, R.L.(1985), "Consistent Tangent Operators for Rate-Independent Elastoplasticity", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 48, pp. 101 - 118.
7. Ortiz, M. and Simo, J.C.(1986), "An Analysis of a New Class of Integration Algorithms for Elastoplastic Constitutive Relations", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 23, pp. 353 - 366.
8. Borja, R.I. and Lee, S.R.(1989). "Numerical Simulation of Excavation in Elastoplastic Soils", *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol. 13, pp. 231 - 249.
9. Borja, R.I. and Lee, S.R.(1990), "Cam-Clay Plasticity, Part I : Implicit Integration of Elastoplastic Constitutive Relations", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 78, pp. 49 - 72.
10. Simo, J.C., Ju, J.W., Pister, K.S. and Taylor, R.L. (1988), "Assessment of CAP Model : Consistent Return Algorithms and Rate-Dependent Extension", *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol. 114, No. 2, pp. 191 - 218.