

최소 응력을 갖는 필렛의 형상설계

김 호룡\*, 이 장용\*\*

Optimal Shape of Fillet for Minimum Stress

Ho-Ryong Kim\* and Jang-Yong Yi

Abstract

In this study, an optimal shape design was performed on a fillet model which is subject to surface traction through minimizing the maximum stress of the fillet.

A 2-dimensional quadratic isoparametric element with 8 nodes was used in stress analysis for finite element method, and Hooke-Jeeves direct search algorithm was adopted for optimization.

From the resulting optimal shape, it was found that the maximum von Mises stress on the boundary of fillet was reduced by 36%, compared to other paper in which the cross sectional area of fillet was minimized.

In conclusion, a real optimal fillet shape could be obtained in the viewpoint of yielding, and more practical fillet design could be accomplished.

b : Design variable vector  
 m : Characteristic function  
 U : Object function  
 V(x) : Design velocity field  
 $\Gamma_i$  : Boundary of fillet  
 $\epsilon''$  : Strain tensor

$\lambda$  : Adjoint variable  
 $\sigma''$  : Stress tensor  
 $\phi$  : Inequality constraint  
 $\Psi$  : Equality constraint  
 $\Psi'$  : Variation of functional

\* 연세대학교 기계공학과 부교수 (총신회원)

\*\* 연세대학교 기계공학과 대학원

## 1. 서 론

형상 최적화(shape optimization)는 근래에 2차원이나 3차원 연속체 설계에 중요한 위치를 차지하기 시작하고 있으며, 유한요소법의 개발과 디지털 컴퓨터의 발달로 보다 효율적인 형상설계에 관심이 집중되고 있다.

구조물의 형상을 설계변수로 나타내는 문제를 최초로 다룬 것은 1973년 Zienkiewicz와 Cambell(1)이었으며, 유한요소법을 이용하여 절점(nodal point)의 위치를 설계변수로 취급하였다. 1975년 Francavilla, Ramakrishnan, Zienkiewicz(2)는 유한요소법을 이용하여 응력 집중 계수(stress concentration factor)를 최소화하기 위한 필렛의 최적설계를 하였다.

이들은 최적화 방법으로는 DFP(David-Fletcher-Powell) variable metric technique를 사용했으며, 응력의 설계변수에 대한 미분을 유한차분 근사법(Finite difference approximation)을 사용해서 구하였다. 1977년 Bhavikatti와 Ramakrishnan(3)은 인장응력이 걸리는 부재의 필렛 최적설계에서 Zienkiewicz, Campbell(1)의 방법과 Francavilla, Ramakrishnan, Zienkiewicz(2)의 방법을 개선하였다. 이들은 필렛의 형상을 결정짓기 위해 다항식을 사용했으며 다항식의 계수를 설계변수로 채택하였다. 또한 형상의 응력계산을 위해서는 유한요소법을 이용하였다.

한편, Chun, Haug(4)는 1979년 최적화 기법으로 GPM(Gradient Projection Method)를 사용하여 2차원 탄성체의 무게를 최소화하기 위한 형상 최적화를 했으며 이때의 구속조건은 경계에서의 von Mises 항복응력과 전단응력 분포였다.

1988년 윤대석(5)은 인장응력이 걸리는 부재에서의 필렛 단면적 최소화를 위한 필렛 형상설계를 하였고 이때 최적화 방법으로는 GPM을 사용하였다. 그런데, 필렛 설계에 있어서 필렛 경계부에서의 응력이 설계의 대상이 되므로 본 논문에서는 필렛에서의 최대응력을 최소화하여 실제에 근접한 형상설계를 수행하였다.

이때 목적함수인 응력의 설계변수에 대한 변화를 즉 도함수를 해석적으로 구하기가 어려우므로 최적화 방법으로는 GPM 대신 직접탐색법(Direct Search Met

hod)의 하나인 Hooke-Jeeves방법(6)을 이용하였다.

필렛의 응력해석을 위해서는 요소당 절점수가 8개인 유한요소법을 사용했고 필렛의 경계부분에서 선택된 절점들의 응력값을 취하여 그 중 최대응력을 최소화시키는 최적설계를 수행하였다.

설계변수로는 변하는 경계위에서 절점들의 Y좌표값들로 주었고 각 절점은 선형함수로 연결하였다. 각 설계변수에 대한 구속조건을 주었으며 최적설계는 유한요소 프로그램과 Hooke-Jeeves 최적화 방법을 연결해서 반복적으로 수행하였다. 최적형상에서의 필렛의 최대 von Mises 응력은 기존 논문에서 발표된 면적을 최소화한 형상에서의 최대응력보다 약 36% 감소시켜 응력을 최소화하는 점에서 최적형상을 현저히 개선시켰으며 보다 실제적인 필렛설계에 접근하였다.

본 논문에서 개발된 프로그램의 전체 흐름도는 Fig. 1과 같다.

## 2. 설계민감도를 이용한 최적화 기법

최적화 기법인 GPM은 제한식을 가지고 있는 비선형 문제의 최소값을 찾는 데 응용되며, 이 방법은 비선형 문제의 해의 추적과정에서 계속적인 수렴의 향상을 위하여 1계 도함수를 사용하여야 한다.

따라서 GPM을 사용하기 위해서는 목적함수나 구속조건 1계도함수를 반드시 구하여야 한다. 설계민감도 해석(design sensitivity analysis)이란 이와같이 설계변수 변화에 대하여 목적함수나 구속조건 1계도함수를 구하는 것으로서 평형방정식의 변분화, 물질미분 개념, adjoint변수방법이 필요하다.

윤(5)은 필렛 최적 설계에서 목적함수로서 필렛의 단면적을 주었으며, 구속조건은 각 요소의 von Mises 응력값이 된다. 윤(5)의 목적함수와 구속조건은 다음과 같다.

$$\text{목적함수 } \Psi_0 = \int \int_{\Omega} d\Omega \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{구속조건 } \Psi_k &= \int \int_{\Omega} \frac{\sigma^- \sigma_a}{\sigma^a} m_k d\Omega \leq 0 \quad k=1, \\ &\dots, n \end{aligned} \quad (2)$$

여기서  $\sigma^a$ 는 허용응력,  $\sigma^-$ 는 von Mises 응력이다.  $m_k$ 는 특성함수로서 영역  $\Omega$ 에서는 일정한 값, 즉 체

적의 역수  $(\iint_{\Omega} d\Omega)^{-1}$ 로 나타나며 영역 밖에서는 0이 된다.

구속조건을 물질미분해서 얻은 매개방정식(adjoint equation)은 다음과 같다.

$$a(\lambda, \bar{\lambda}) = \iint_{\Omega} \left[ \sum_{i,j=1}^2 g_{\sigma_{ij}}(Z) \sigma^{ij}(\bar{\lambda}) \right] m_k d\Omega \quad (3)$$

$$\left[ g = \frac{\sigma - \sigma_a}{\sigma^a} \right]$$

식(3)의 오른쪽 항은 adjoint load이며  $\lambda$ 는 adjoint 변수이다.

목적함수와 구속조건을 설계민감도를 구하면 다음과 같다.

$$\Psi'_0 = \int_{\Gamma_1} [V^T_n] d\Gamma \quad (4)$$

$$\Psi'_k = - \int_{\Gamma_1} \left[ \sum_{i,j=1}^2 \sigma^{ij}(Z) \varepsilon^{ij}(\lambda^k) \right] (V^T_n) d\Gamma$$

$$+ \bar{m}_k \int_{\Gamma_k} \left[ g(Z) - \Psi_k \right] (V^T_n) d\Gamma \quad (5)$$

$\sigma^{ij}(z)$ 와  $\varepsilon^{ij}(\lambda^k)$ 는 경계  $\Gamma^1$ 에서의 변위  $z$ 에 의한 응력과 adjoint변수  $\lambda$ 에 의한 변형율을 나타낸다.

이와같이 1계도함수를 구하기 위해서는 복잡한 수학적이론을 도입하여 설계민감도 식을 유도하여야 한다.

설계변수는 변하는 경계위에서 절점들의 y좌표값이고 목적함수가 면적인 경우에, 설계변수에 대한 1계도함수를 명백히 구할 수가 있으나 본 연구에서는 목적함수가 최대 von Mises응력이므로 설계변수에 대한 미분을 명백히 구할 수가 없다. 따라서 본 논문에서는 수식형성의 복잡성을 배제하고, 목적함수의 설계변수에 대한 도함수를 구할 필요가 없는 최적화 기법의 직접탐색법인 Hooke-Jeeves방법을 사용하여 최적화를 수행하였다.

### 3. 수치해석의 결과 및 검토

본 논문에서 다룬 최적설계의 모델은 인장응력하에 있는 필렛으로서 Fig. 2와 같다. 경계 $\Gamma^1$ (A-B)이 설계변수  $b$ 로 표시되며(Fig. 3), 경계 $\Gamma^1$  위의 각 절점들은 직선으로 연결된다.

설계변수  $b_0$ 와  $b_{n+1}$ 은 고정되며(Fig. 3) 전체형상은  $X_1, X_2$ 축을 중심으로 각각 대칭이다.

본 논문의 목적은 경계 $\Gamma^1$ 에서 선택한 점(Fig. 4)들

의 Von Mises응력을 각각 구해서 그것들 중 최대값을 최소화시키는 것이며, 경계에서의 응력값들은 각 요소의 가우스점에서 구한  $\sigma_{x_1x_1}, \sigma_{x_2x_2}, \sigma_{x_1x_2}$ 를 외삽시켜서 구했다. 최적화의 목적함수는 식(6)으로 표시되어지며 식(7), (8)은 기하학적 구속조건이다.

$$\text{최소화 : } U = [ (\sigma_{x_1x_1})^2 + (\sigma_{x_2x_2})^2 + 3(\sigma_{x_1x_2})^2 - \sigma_{x_1x_1} \sigma_{x_2x_2} ]^{1/2} \quad (6)$$

$$\Phi_i = b_i - 4.5 \geq 0 \quad (i=1, \dots, m) \quad (7)$$

$$\Phi_j = 9 - b_j \geq 0 \quad (j=m+1, \dots, n) \quad (8)$$

Fig. 5는 초기 필렛의 형상을 나타내며, Table 1은 필렛 경계면의 세점에서 구한 von Mises응력값이다. 이때 YS1은 왼쪽 모서리의 응력이고 YS3는 오른쪽 모서리의 응력이며 YS2는 그 중간값이다. Fig. 6은 필렛의 최적형상이며, 각 요소의 von Mises응력값은 Table 2와 같다. 초기 설계변수와 최적설계변수와의 비교는 Table 3과 같으며 Table 4는 초기 형상과 최적형상에서의 최대 von Mises응력과 그 감소율을 표시한다.

Fig. 7-(a)는 본 연구에서 구한 최적 형상이며 같은 모델에 대해서 윤[5]이 구한 면적을 최소화한 최적형상은 Fig. 7-(b)와 같다.

면적을 최소화시킨 최적형상의 경우 불규칙 형상(Fig. 7-(b))이 발생하였으며, 불규칙 형상 부위에서 응력 집중이 발생하였다. 이러한 불규칙 형상을 제거하기 위하여 설계변수를 1/2로 줄여 유연한 형상을 얻은 결과가 Fig. 8이다. Table 5는 Fig. 8에 따른 필렛 경계에서의 von Mises응력이다. Table 6은 본 연구에서 구한 최적 형상의 최대 von Mises응력과 Fig. 8의 윤[5]의 결과와 비교한 값이다.

Fig. 9에서는 본 논문에서 구한 최적형상(설계변수 9)의 필렛 경계 부위  $\Gamma^1$ ( $X_1$ 축 좌표 9.0-15.5inch)에서의 von Mises응력값과 (case 1), 최적형상을 B-spline곡선으로 유연하게 연결했을 경우 (case 2), 경계  $\Gamma^1$ 부분을 1/4원호로 연결한 경우 (case 3)와 윤[5]이 구한 최적 형상(Fig. 8)의 von Mises 응력(case 4)을 비교하였다.

본 논문에서 구한 최적 형상(Fig. 6)에서는 유한요소가 심하게 찌그러지는 현상이 발생하였다. 이런 현상이 발생하는 이유는 사각형 형태의 유한요소가 사용

되고  $X_2$ 축과 평행인 설계변수  $b_1, b_2, \dots, b_n$ 을 따라 유한요소가 형성되었기 때문이다. 요소가 심하게 찌그러질 경우에는 경계에서의 응력값이 부정확하게 되며, 이런 문제를 해결하기 위해서 자동격자생성(automeshing)에 대한 연구가 필요하다. 한편, 유한요소법(F. E. M.)을 이용한 수치계산에서 기억용량을 감소시키고 계산 시간을 단축시키기 위해서는 F. E. M. 대신 B. E. M. (Boundary Element Method)을 적용할 수 있다. 또한 본 논문에서는 단순 인장만 받는 필렛을 고려했으나 보다 폭넓은 응용을 위하여 굽힘과 비틀림을 함께 받는 필렛에 대한 연구가 진행되고 있다.

#### 4. 결 론

1. 본 논문에서 택한 모델에서는 목적함수의 설계민감도 값을 계산하기 어려웠으나 최적화 기법으로 설계민감도 값이 필요한 GPM 대신 그것을 구할 필요가 없는 Hooke-Jeeves방법을 이용함으로써 설계민감도를 구하지 않고 최적화를 수행할 수 있었다.

2. 최적설계의 목적을 응력 최소화에 둔으로서, 보다 실제적인 설계에 접근하여, 필렛 경계부위의 최대 von Mises 응력값을 GPM을 이용하여 면적최소화를 수행한 경우보다 36% 감소시킨 최적 형상을 찾았다.

3. 각 설계 변수로 표시된 절점을 곡선으로 연결함으로써 F. E. M.의 사용에 따른 직선 형상과 달리 실제 가공이 가능한 형상(NC공작기계)을 구하였다.

#### Reference

1. O. C. Zienkiewicz and J. S. Campbell, "Shape Optimization and Sequential Linear Programming", in Optimum Structural Design, John Wiley, London, pp.109-126, 1973.
2. A. Francavilla, C. V. Ramakrishnan, and O. C. Zienkiewicz, "Optimization of Shape to Minimize Stress Concentration", Journal of Strain Analysis, 12, No. 2, 6. 1975.
3. S. S. Bhavikatti and C. V. Ramakrishnan, "Optimum Design of Fillets in Flat and Round Tension Bars", ASME Paper 77-DET-45, 5. 1977.
4. Y. W. Chun and E. J. Haug, "Shape Optimal Design of an Elastic Body of Revolution", Preprint No. 3526, ASCE Annual Meeting, Boston, 5. 1979.
5. 윤대석, "설계 민감도 해석을 이용한 필렛의 최적 형상 설계에 관한 연구, 연세대학교 기계공학과 대학원 논문, 1988.
6. J. N. Siddall, "Optimal Engineering Design", Marcel Dekker, 1982.
7. E. J. Haug, K. K. Choi and V. Komkov, "Design Sensitivity Analysis of Structural Systems", Academic Press, New York, 1985.

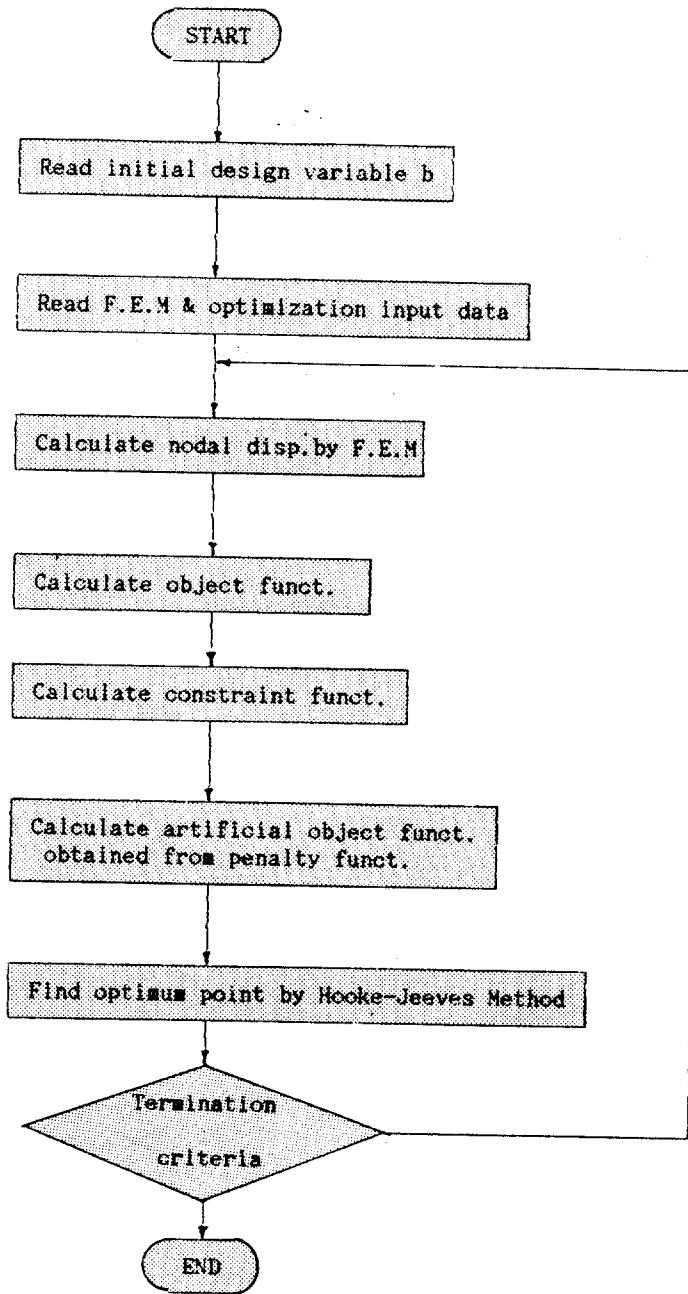


Fig.1 Flow chart of developed program

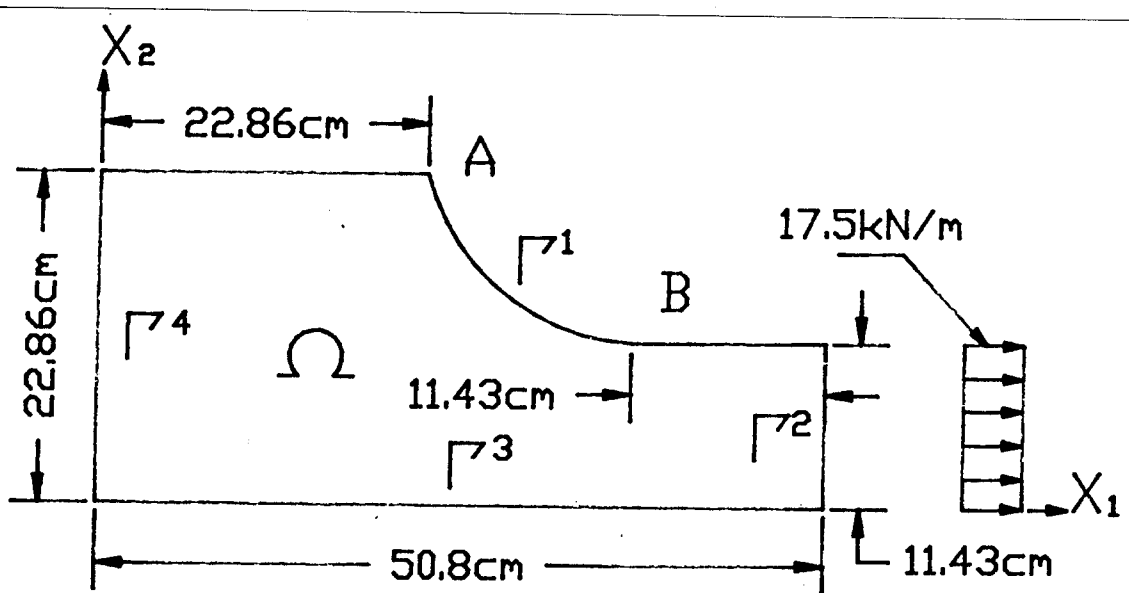


Fig. 2 Fillet model

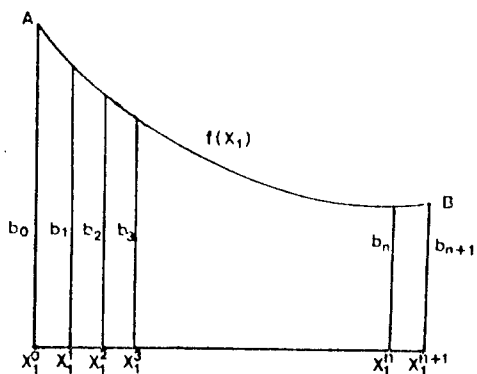


Fig. 3 Representation of fillet by design variables

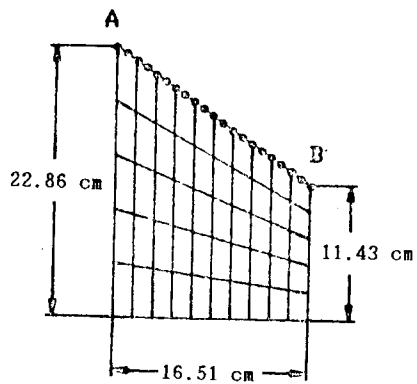


Fig. 4 Selected points on the boundary of fillet

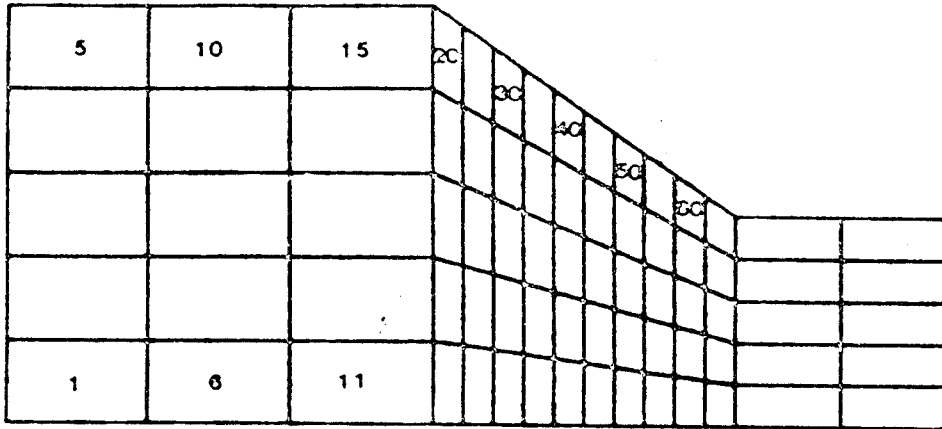


Fig.5 Initial fillet shape

Table 1. Von mises stress on the boundary of initial fillet

Element No.	YS1	YS2	YS3
20	62.9625	95.1676	127.3730
25	127.3730	160.0384	192.7040
30	192.7040	220.9015	249.0989
35	249.0989	276.8974	304.2819
40	304.2819	333.0051	361.7283
45	361.7283	393.9263	426.1244
50	426.1244	465.2491	504.3738
55	504.3738	560.6181	616.8625
60	616.8625	760.6141	904.3657
65	904.3657	1167.8579	1431.3494

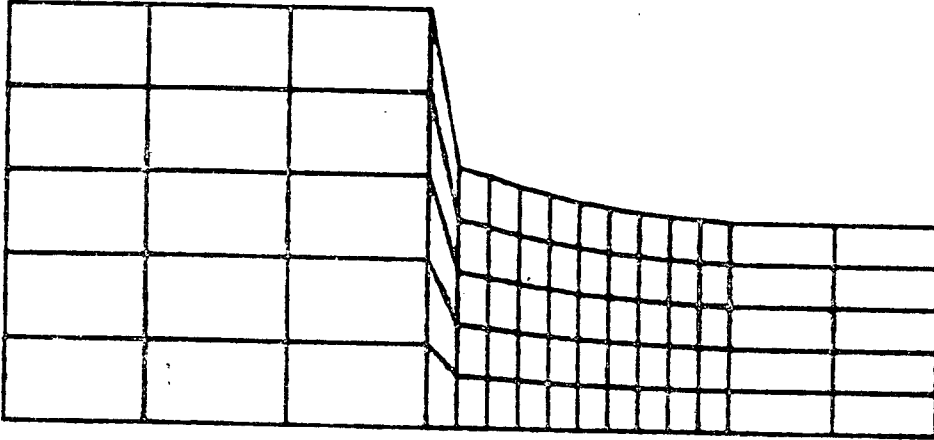


Fig.6 Optimum fillet shape

Table 2. Von mises stress on the boundary of optimum fillet

Element No.	YS1	YS2	YS3
20	364.4441	613.5255	862.6069
25	862.6069	861.2493	859.8910
30	859.8910	861.2300	862.5690
35	862.5690	854.8434	847.1178
40	847.1178	849.6358	852.1544
45	852.1544	850.5955	849.0366
50	849.0366	851.5125	853.9891
55	853.9891	857.9308	861.8719
60	861.8719	852.2613	842.6514
65	842.6514	852.6253	848.8105



Table 3. Comparison of initial and optimum design variables

No. of design variable	Initial fillet(cm)	Optimum fillet(cm)
b1	22.717	14.1685
b2	20.574	13.6923
b3	19.431	13.1446
b4	18.288	12.7398
b5	17.145	12.3826
b6	16.002	12.0986
b7	14.859	11.8587
b8	13.716	11.6682
b9	12.573	11.5491

Table 4. Comparison of maximum von mises stress

	Initial fillet	Optimum fillet
Maximum Von Mises stress(kPa)	1431.3522	862.5345
Reduction ratio	39.7 %	

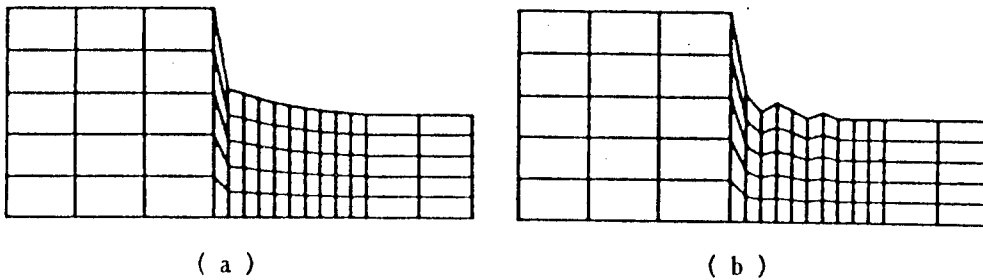


Fig.7 Comparison of optimum fillet

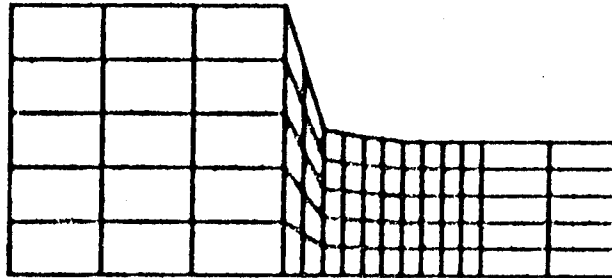


Fig.8 Optium fillet of reference [5]

Table.5 Von mises stress on the bound of optimum fillet of Fig.8

Element No.	YS1	YS2	YS3
20	11.4547	132.3756	253.2965
25	253.2965	801.0594	1348.8226
30	1348.8226	1242.4840	1136.1461
35	1136.1461	1063.2037	990.2613
40	990.2613	958.1744	926.0869
45	926.0869	938.6699	951.2535
50	951.2535	898.8167	846.3801
55	846.3801	823.0820	799.7846
60	799.7846	789.1729	778.5611
65	778.5611	772.4406	766.3201

Table 6. Comparison of maximum von mises stress

	present	Ref.[5]
Maximum von Mises stress(kPa)	862.5345	1348.615
Reduction Ratio	36 %	

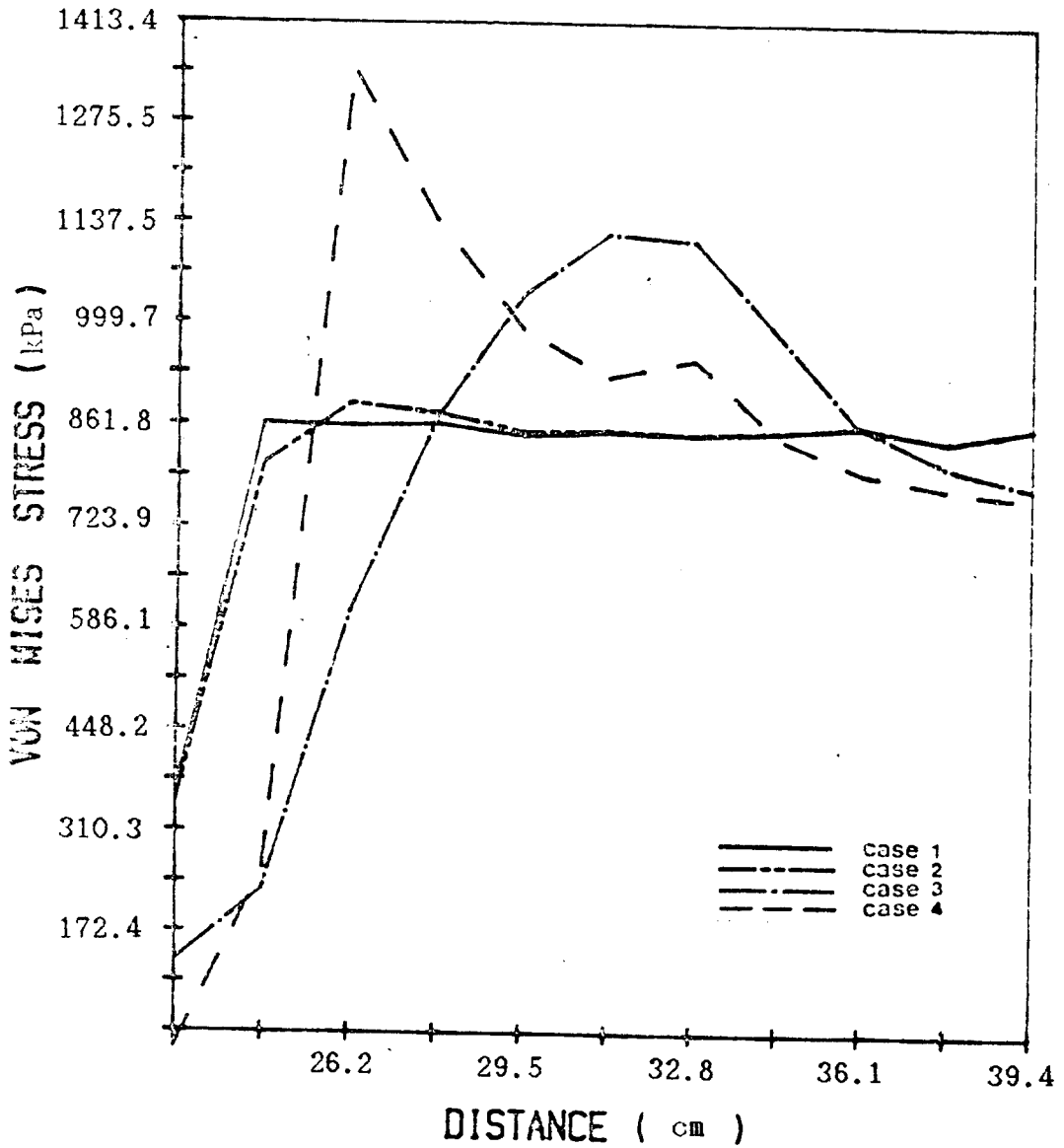


Fig. 9 Comparison of von mises stress of various optimal shapes