

## 자동차용 고무재의 응력해석 및 피로파손

### Stress Analysis and Fatigue Failure of Rubber in Automobile

이 강 용\*    백 운 천\*\*  
K. Y. Lee,    W. C. Baik

#### 1. 머리 말

고무재료는 강재에 비해 큰 탄성변형을 할 수 있고 충격 흡수능력이 뛰어나므로 자동차에서도 진동문제 및 승차감을 향상시키기 위하여 엔진 마운트, Suspension Bushing 등을 비롯한 여러 곳에 사용되고 있다. 여기에 이용되는 고무재의 요구조건으로는 i) 피로수명이 충분히 길것, ii) 열 및 산화에 강할 것, iii) 소음이 없을 것 등이다.

이러한 요구조건이 복합적으로 충족되기 위해서는 고무재에 대한 기본적인 해석이 선행되어야 할 것이다. 그러나 고무재는 비선형 문제에서 일반적으로 구분되는 재료 거동의 비선형성, 큰 변형으로 인한 해석상의 비선형성 등을 모두 포함하게 되므로 파손 및 파괴 등의 해석에 강재와는 다른 접근방법을 사용해야 한다. 유감스럽게도 우리나라에서는 아직 이러한 연구가 미흡한 것 같다. 이 글에서는 i) 변의 요구조건을 기준으로 고무재의 기본적인 역학적 특성 및 해석방법을 소개하고자 한다.

#### 2. 변형률 에너지

Fig. 1에서는 고무재의 대표적인 힘-인장관계 곡선을 보여주고 있다.

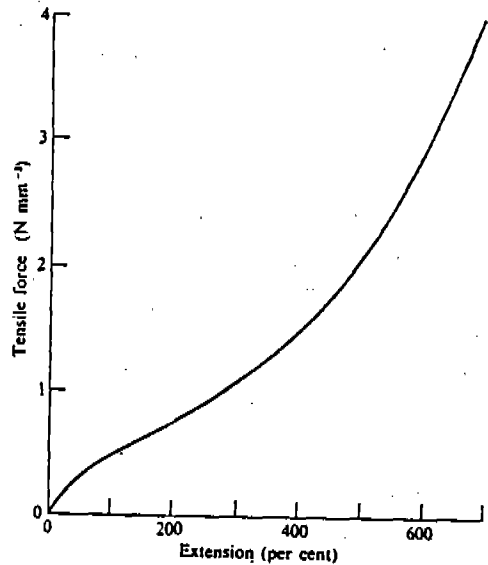


Fig. 1 Typical force-extension curve for vulcanized rubber

이와 같이 큰 탄성변형을 하고, 비선형 거동을 하는 Hyper-elastic 재료는 응력 성분간에 Coupling 현상이 일어나므로 응력-변형률간의 관계식을 직접 표시하기가 곤란하므로 변형률 에너지  $W$ 를 이용하여 표시한다.

고무재의 거동에 관한 초기 이론은 통계학적으로 이루어졌다.<sup>1)</sup> 고무가 큰 변형을 할 수 있는 것은 그 기본적인 구조가 Fig. 2와 같은

\* 정회원, 연세대학교 기계공학과 교수

\*\* 연세대학교 대학원 기계공학과

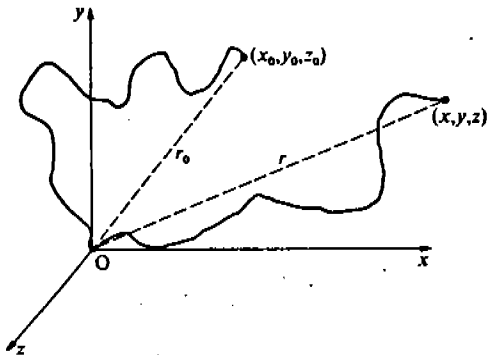


Fig.2 The affine deformation of chains

사슬로 이루어져 있어서 이것이 쉽게 펼쳐지기 때문이며, 이들이 그들과 같이 얽혀서 고무를 이룬다고 생각하면 작은 변형을 가정하였을 때 변형률 에너지함수는 통계학적으로 "Gaussian Network Theory"라고 불리우는 다음 식으로 표시된다.

$$W = (1/2) G(I_1 - 3) \tag{1}$$

여기서  $G$ 는 강재의 전단계수에 해당하는 재료상수이며,  $I_1$ 은 일차 변형률 불변량이다.

이 식은 압축하중이나 작은 인장에 대해서는 잘 맞지만, 단순인장의 경우 변형이 50%를 넘어가면 실험값과의 오차가 커지게 된다.

Mooney<sup>2)</sup>는 큰 변형상태에서의 오차를 보정하기 위하여, 고무가 비압축성이며 단순 전단에서는 Hooke 법칙을 따른다는 가정하에 다음과 같은 변형률 에너지함수를 제안하였다.

$$W = C_1(I_1 - 3) + C_2(I_2 - 3) \tag{2}$$

여기서  $C_1, C_2$ 는 재료에 따라 결정되는 실험상수이며,  $I_2$ 는 2차 변형률 불변량이다.

이 식은 단순인장의 경우에는 비교적 잘 맞지만, 단순 압축상태에 대해서는  $C_2$  값이 거의 0이 되므로 압축과 인장에 대해서는 서로 다른 상수를 적용해야 한다는 단점이 있다.

Rivlin<sup>3)</sup>은 이 식을 더욱 일반화하여 변형률 에너지를 변형률 불변량의 멱급수로 다음과 같이 표시하였다.

$$W = \sum_{i,j,k=0}^{\infty} C_{ijk}(I_1 - 3)^i(I_2 - 3)^j(I_3 - 3)^k \tag{3}$$

여기서  $C_{ijk}$ 는 실험상수이며,  $I_3$ 는 3차 변형률 불변량이다.

비압축성 재료에 대해서는  $I_3$ 가 일정한 값을 갖게 되므로 위 식은 다음과 같이 표현된다.

$$W = \sum_{i,j=0}^{\infty} C_{ij}(I_1 - 3)^i(I_2 - 3)^j \tag{4}$$

이 식은  $i, j$ 의 범위를 적절히 선택하면 큰 변형상태도 잘 표현할 수 있다.

이 외에도 큰 변형률 상태에서의 오차를 보정하기 위해 지수 및 로그함수, 변형률의 멱급수 등으로 변형률 에너지를 표현하려는 연구가 수행되었다. 그러나 지난 수십년간의 연구에도 불구하고 초기 통계학적 이론에 비해 큰 진전은 없으며, 이론과 실험값의 차이에 대한 물리적 원인도 잘 알려져 있지 않은 실정이다. 따라서 사용하는 재료의 특성 및 하중상태에 따라 적절한 변형률 에너지함수를 선택하여 사용해야 할 것이다.

### 3. 응력 해석

재료의 변형이 커지게 되면 물체의 형상이 계속 변하여 강제운동의 영향이 증가하게 되므로 수치적분에서 체적적분을 처리하는데 문제가 발생하게 된다. 따라서 새로운 응력, 변형률 텐서를 정의하여 기지의 체적에 대한 적분으로 바꾸어야 한다.<sup>4,5)</sup>

일반적으로 많이 이용되며 서로 공액을 이루는 응력, 변형률 텐서중의 하나로 2nd Piola-Kirchhoff 응력텐서와 Green-Lagrangian 변형률 텐서가 있다. 시간 0일때의 기하학적 형상에 대한 시간  $t$ 에서의 2nd Piola-Kirchhoff 응력텐서  ${}^0S$ 는 다음과 같이 정의된다.

$${}^0S_{ij} = ({}^0\rho/\rho^t) {}^0\chi_{i,m} {}^t\tau_{mn} {}^0\chi_{j,n} \tag{5}$$

여기서 점자는 시간을 나타내며  $\rho$ 는 밀도,  $\chi_i$ 는 Cartesian 좌표,  $\tau_{mn}$ 은 Cauchy 응력을 나타낸다. Fig.3에서는 2차원 상태에서 표면적  $dS$ 에 외력  $dT$ 가 작용할 때의 2nd Piola-Kirchhoff 응력텐서와 Cauchy 응력텐서를 보여주고 있다.

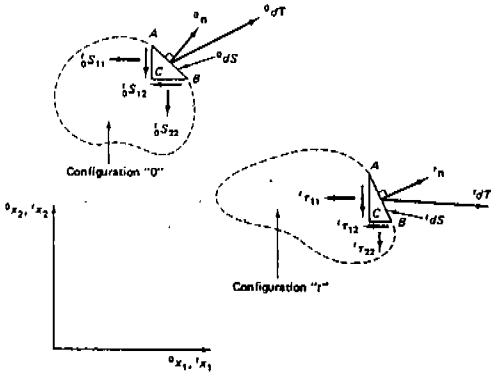


Fig.3 Second Piola-Kirchhoff and Cauchy stresses in 2-D action

이와 공액을 이루는 Green-Lagrangian 변형률 텐서  ${}^t_0 \epsilon_{ij}$ 는 다음과 같이 정의된다.

$${}^t_0 \epsilon_{ij} = \frac{1}{2} ({}^t_0 U_{i,j} + {}^t_0 U_{j,i} + {}^t_0 U_{k,i} {}^t_0 U_{k,j}) \quad (6)$$

여기서  $U$ 는 변위를 나타낸다.

이런 응력, 변형률 텐서는 강제운동의 영향을 받지 않으며, 재료의 변형에만 관계하는 특성을 갖는다. 또, 이들은 서로 "energetically conjugate"를 이루고 있으므로 가상일(Virtual Work)  $\delta W$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$\delta W = \int_{0_v} {}^t S_{ij} \delta {}^t_0 \epsilon_{ij} {}^0 dV \quad (7)$$

여기서  $\delta \epsilon$ 는 가상적인 변형률(Virtual Strain)을 나타낸다.

따라서 응력은 다음과 같다.

$${}^t_0 S_{ij} = \frac{\partial W}{\partial {}^t_0 \epsilon_{ij}} \quad (8)$$

$\Delta t$  시간에 대한 평형 방정식은 Total Lagrangian Formulation을 이용하면 다음과 같이 표현된다.

$$\int_{0_v} {}^{t+\Delta t} S_{ij} \delta {}^{t+\Delta t} \epsilon_{ij} {}^0 dV = {}^{t+\Delta t} R \quad (9)$$

여기서  $R$ 은 외력에 의한 가상일(External Virtual Work)이다.

응력해석은 이 식을 기본으로 이루어지게 된다. Fig.4에서는 위 식을 이용하여 양단이 강재에 접착되어 압축하중과 전단하중을 동시에 받는 얇은 고무재에 대해 내부 주응력분포차를 구한 결과를 보여주고 있다.

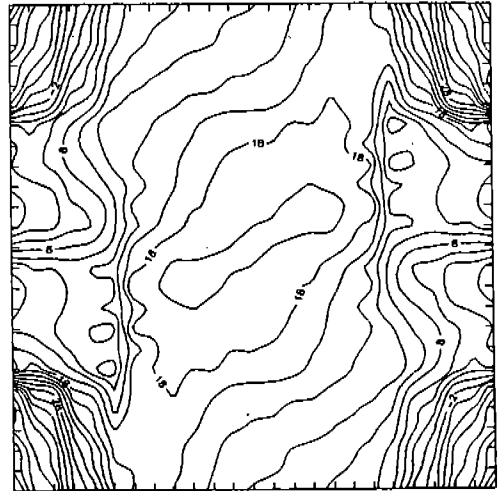


Fig.4 Distribution of principal stress differences in a rubber sheet

그러나 위에서 정의된 응력텐서는 물리적인 의미가 모호하므로, 운동학적 변환을 통해 궁극적으로 Cauchy 응력을 구해야 한다.

해를 구할 때는 재료가 비선형이므로 직접 구할 수는 없고, 기지의 평형상태를 기준으로 선형화 하여 근사해를 찾아야 한다. 이 과정에서는 Newton-Raphson 방법 등을 이용하여 충분히 반복함으로써 해가 수렴하도록 하는 것이 중요하다.

#### 4. 피로 파괴

고무재에서 균열 생성은 다른 재료에서와 마찬가지로 탄소덩어리, 기포, 강제함유물 등 재료의 비균질성이 주된 원인이 된다. 그러나 이들의 크기가 매우 작은 경우에는 균열 생성에 거의 영향을 주지 못한다.

재료가 균질하다고 가정하면, 균열은 외부 표면에서 최대 인장을 받는 점에 수직하게 발생한다. 자동차에 주로 사용되는 고무재와 같이 양단이 강재에 접착되는 경우, 표면에서 응력의 접선방향 성분  $\sigma_H$ , 수직성분  $\sigma_v$  간의 상대적 크기와 변형의 정도에 따라 균열 생성부위가 달라진다. 재료가 원통형이고 압축 피로하중을 받는다고 가정하면 균열 생성은 다음과 같이 구분할 수 있다.<sup>9)</sup>

1)  $\sigma_H > \sigma_v$ ; 팽창부의 중앙에서 원주방향 응력성분이 최대 인장이 되므로, 이 표면에서 균열이 발생하여 내부로 진전한다.

2)  $\sigma_H < \sigma_v$ ; 강제와의 접촉부에서 수직 응력성분이 최대 인장이 되므로, 이 부근에서 균열이 발생하여 팽창부위를 제거하려는 방향으로 균열이 진전한다.

3) 압축 변형량이 커질수록 강제와의 접촉부위에서 균열이 발생할 확률이 높아진다.

일반적인 파괴 경향은 2)의 경우가 많다. Fig. 5에서는 2) 경우에 대한 파괴모형을 보여 주고 있다. 또한 균열 성장의 궤적은 'Surface Strain Analysis'를 통해 예측할 수도 있다.

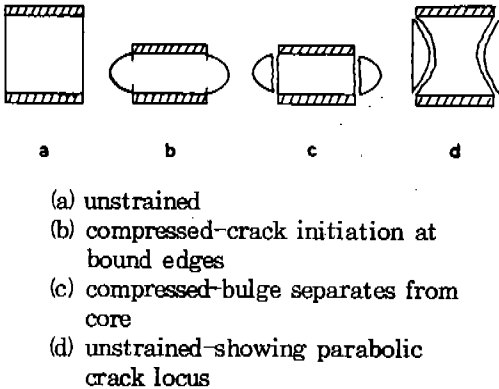


Fig. 5 Typical stages of crack growth in compression

일단 균열이 생성되면 고무재의 파괴특성을 나타내는 매개변수로 tearing energy를 이용한다. Tearing energy  $T$ 는 변형을 에너지방출률을 나타내며, 변위  $l$ 이 고정된 상태에서 다음과 같이 정의된다.<sup>2)</sup>

$$T = - \left( \frac{\partial U}{\partial A} \right)_l \quad (10)$$

여기서  $U$ 는 저장된 탄성에너지이고  $A$ 는 균열 표면적이다.

$T$ 가 균열성장에 필요한 최소값  $T_0$ 보다 커지면 균열성장이 일어나며, 피로균열 성장률은  $T$ 의 함수로 다음과 같이 표시된다.

$$\frac{dc}{dN} = f(T) \quad (11)$$

여기서  $c$ 는 균열길이,  $N$ 은 cycle수이다.

이 관계식은 재료에 따라 일정한 형태를 주는 물성치로 알려져 있으며, 균열이 진전함에 따라  $T$ 값도 점차 증가하다가 임계값  $T_c$ 에 이르면 파괴가 일어나게 된다.

고무재의 피로 및 파괴, 마모특성을 향상시키기 위하여 강화재로 Carbon Black(CB)을 많이 이용한다. 그러나 CB가 첨가된 고무재는 변형률로 인해 결정화 현상이 일어나므로 피로하중 하에서 발산되어 손실되는 에너지가 많아진다. 이와 같이 에너지 손실이 많은 재료나 비탄성거동을 하는 재료에 대해서는 tearing energy 대신에 다른 매개변수로 파괴역학에서 많이 이용하는  $J$ 적분을 사용해야 한다.<sup>8)</sup>

## 5. 기능 파손

자동차에 사용되는 고무재료는 그 요구수명이 자동차의 수명 이상이어야 하며, 그 기간 동안 요구조건을 충분히 만족해야 한다. 따라서 이러한 재료의 경우 파괴가 일어나지 않더라도 성능이 어느 수준 이하로 저하되면 수명이 다한 것으로 판단하게 된다(Functional Failure).

고무재를 사용하는 가장 큰 목적이 완충작용이므로, 수명판단은 일반적으로 스프링 상수를 기준으로 하게 된다. 고무재의 스프링 상수에 대해서는 KS M 6604 방진고무 시험방법에서 정적, 동적 스프링상수 측정방법을 규정하고 있다.

수명판단의 범위는 경제성과 승차감 등을 고려해야 하므로, 엄격한 해석과 실험을 통해서 각 제품에 맞는 기준을 설정해야 할 것이다.

## 6. 맺음 말

고무재료의 해석에 관한 기본적인 이론 및 피로파손에 대하여 간단히 기술하였다. 결론적으로 고무는 성형이 비교적 용이하고 특성이 독특하여 응용 범위가 넓은 반면 해석이 상당히 까다롭다고 하겠다.

외국에서는 이에 대한 연구가 이미 오래전에 이루어졌지만, 우리나라에서는 아직 미흡한것 같다. 따라서 이 부분에 관심을 갖고 많은 연구가 이루어지기를 바란다.

### 참 고 문 헌

1. Treloar, L. R. G., The physics of rubber elasticity, Clarendon Press, Oxford, 1975.
2. Mooney, M., J. Appl. Physics, Vol.11, p.582, 1940.
3. Rivlin, R. S., "Large elastic deformations", Rheology—Theory and application, Vol.1, pp.351-385, 1956.
4. Bathe, K. J., Finite element procedures in engineering analysis, Prentice-Hall Press, New Jersey, 1982.
5. Zienkiewicz, O. C., The finite element method, 3rd ed., McGraw-Hill Press, London, 1977.
6. Stevenson, A., "A fracture mechanics study on the fatigue of rubber in compression", Int. J. Fracture, Vol.23, pp.47-59, 1983.
7. Doley, M. J., "How elastomers fail in fatigue", Machine Design, Vol.10, pp. 135-139, 1988.
8. Lee, R. F. and Donovan, J. A., "J-integral and crack opening displacement as crack initiation criteria in rubber", Rubber Chemistry and Technology, Vol.59, pp.787-799, 1986.