

비선형 회전 스프링 요소를 갖는 공간 프레임의 구조의 비선형 해석에 관한 연구

A Study on the Nonlinear Analysis of Spatial Frame Structures with Nonlinear Rotational Spring Elements

이 병 채*, 박 문 식**
B. C. Lee M. S. Park

ABSTRACT

Three dimensional frame structures with such nonlinearities as large displacements, medium rotations, plastic hinges and local defects are efficiently analyzed by introducing the nonlinear rotational spring. Formulations are based on the incremental updated Lagrangian descriptions and the virtual work principle. Axial displacement and twisted angle in beam elements are interpolated linearly, while bending displacements are approximated by the Hermite polynomials. The modified arc length method is used as a solution method. The moment - angle of rotation relationship obtained analytically or experimentally can be easily incorporated into the solution procedure. Several examples tested show that the present method can be used efficiently in analyzing nonlinear frame structures with plastic hinges or local defects.

Key Words

기 호 설 명

Spatial Beam Structure (공간 프레임 구조물)
 Nonlinear Analysis (비선형 해석)
 Geometric Nonlinearity (기하학적 비선형성)
 Local Buckling (국부 좌굴)
 Full Newton-Raphson Method (FNR, 전 뉴턴-랩슨축자법)
 Arc-Length Method (일정 원호 축자법)
 Incremental Updated Lagrangian Formulation (중분 개정 라그랑지언 수식화)

b : 보요소의 바이 모멘트
 tC_{ijrs} : 상태 't'에서 물성계수 텐서
 $t\epsilon_{ij}$: 상태 't'에서 Green 변형률중분의 선형성분
 e_y, e_z : 보요소 단면의 전단중심점 좌표
 $[e]$: 보요소 단면의 전단중심과 도심간의 변환 행렬
 f_x, f_y, f_z : 단면의 힘 합력의 각 성분
 $t\eta_{ij}$: 상태 't'에서 Green 변형률중분의 비선형성분
 $[K_L], [K_{NL}]$: 선형성분과 비선형성분의 요소

* 정회원, 한국과학기술원 기계공학과

** 한국과학기술원 기계공학과

- 강성행렬
- λ : 하중인자
- m_x, m_y, m_z : 단면의 모멘트 합력의 각 성분
- N_u, N_v, N_w, N_θ : 절점변위의 삼간함수
- P_0 : 외부하중값의 기준치
- $\Delta P, \Delta T, \Delta m$: 절점 하중의 축방향, 비틀림방향 굽힘방향의 증분
- $\theta_x, \theta_y, \theta_z$: 요소의 참고축 회전변위의 각 성분
- $\{R\}, \{F\}$: 요소의 절점 외부하중과 절점 내부하중 벡터
- s : Arc -Length
- $t; S_{ij}$: 상태 't'에서의 2nd Piola-Ki-ochhoff 응력 텐서량
- $t; \tau_{ij}$: 상태 't'에서의 Cauchy 응력 텐서량
- $\{T\}$: 국부좌표계와 전체좌표계간의 변환 행렬
- u_i : 상태 't'에서 't + Δt '로 가는 변위증분의 i성분
- U_i : 상태 't'에서의 변위의 i성분
- u_x, u_y, u_z : 요소의 참고축 변위의 각 성분
- $\{u\}, \{v\}, \{w\}, \{\theta\}$: 축방향, 굽힘방향들, 비틀림방향의 절점변위 벡터
- $\{U\}$: 요소의 증분 절점변위 벡터
- ω : 열린 얇은 벽두께의 보요소단면의 주변좌표
- ξ : 국부좌표계의 무차원 축방향 좌표
- x, y, z : 요소의 국부좌표계
- X_i : 상태 't'에서의 전체좌표계

1. 서 론

근래에 이르러 프레임 구조의 비선형 거동 해석에 많은 노력이 경주되고 있고 유한요소법을 이용한 해석의 경우 이제에는 그 방법이 정립되는 단계에 와있다.¹⁻⁴⁾ 그러나, 지금까지 이러한 해석은 주로 구조 전체의 좌굴 거동 해석에 초점이 맞추어져 있었기 때문에 자동차, 항공기 등의 구조의 비선형 해석에서 중요한 단면의 국부좌굴의 영향을 고려하기 힘

들었다. 소성인지의 방법으로 이러한 문제를 접근하기 위한 시도도 있었으나 국부좌굴이 일어난 후의 구조 변형거동을 구하기는 힘들었다.^{5,6)}

본 논문에서는 일반적 단면현상을 가진 보 구조의 비선형 해석을 효율적으로 수행할 수 있는 방법을 기존의 방법 중에서 선택하고 여기에 국부좌굴 효과를 고려할 수 있는 비선형 회전 스프링요소를 첨가하여 프레임 구조의 복잡한 비선형 거동을 비교적 정확히 해석할 수 있는 프로그램을 개발하고 이를 실제 문제에 적용하여 그 효용성을 보인다.

유한요소 수식화는 연속체에 대한 개정된 라그랑지언 (Updated Lagrangian) 증분 원리를 이용하여 수행하였으며^{9,10)} 이를 일반적 단면현상을 가진 보에 적용하였다. 편의상 각 보요소의 회전은 그렇게 크지 않은 것으로 가정하였다. 수치해석의 효율향상을 위해 내부 힘합력벡터의 계산방법을 단순화 하였다.¹⁴⁾ 또한 구조물의 좌굴 후 거동을 해석할 수 있도록 일정 원호 축차법(Arc -Length Method)과 Newton-Raphson 축차법을 병용하였으며^{11,12)} 하중증분과 원호의 길이는 자동 조절하는 알고리즘을 채택하여 효율성을 높였다.¹³⁾

2. 유한요소의 수식화 및 수치해법

2.1 증분형의 개정 라그랑지언 수식화

비선형성을 고려한 연속체의 변형거동 수식화에 대해서는 Washizu⁹⁾ 및 Bathe¹⁰⁾의 증분 개정 라그랑지언 수식화(Incremental Updated Lagrangian Formulation)를 이용하였다. 수식화 과정에서 사용되는 좌표계는 Fig.1과 같다. 여기서 대문자 X는 고정된 전체 좌표계이고 소문자 x는 연속체에 부착된 국부좌표계이다. 또한 좌측 상점자는 관심이 되는 양이 측정된 상태를 나타내고 좌측 하점자는 그 측정된 양을 참조해서 나타낼 기준상태를 가르킨다. 개정 라그랑지언 수식화에서 모든 양을 기술하는 기준좌표계는 상태 't'의 것으로 한다. 또한 유한요소 해석에서는

먼저 국부좌표계에 대하여 평형방정식을 만든 다음 전체좌표계로 변환하는 방법을 쓰고 있다.

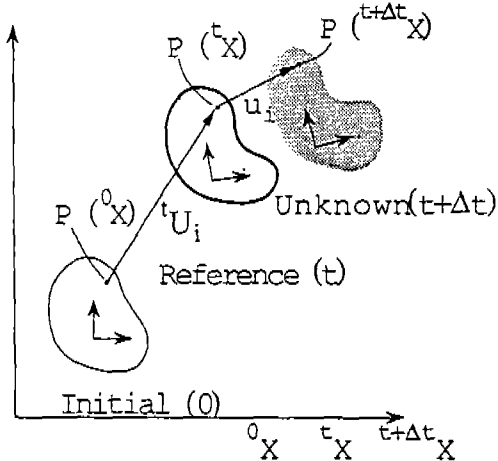


Fig.1 Lagrangian Coordinate System

가상일의 원리를 상태 't + Δt'에서 나타내면

$$\int_{V^{t+\Delta t}} \tau_{ij}^{t+\Delta t} \delta_t \epsilon_{ij}^{t+\Delta t} dV = {}^{t+\Delta t}R \quad (1)$$

로 쓸 수 있다. 여기서 왼쪽항은 내부응력에 의한 가상일이고 오른쪽항은 체적력과 표면력에 의한 가상일이며 τ_{ij} 는 Cauchy 응력텐서이고 ϵ_{ij} 는 선형변형률텐서이다. 또, δ 는 가상변위에 상응하는 상태변수의 가상 변화량을 나타낸다. 식(1)은 미지의 상태의 영역에서 적분을 해야 하기 때문에 계산할 수가 없다. 따라서 식(1)의 왼쪽항을 2nd Piola-Kirchhoff 응력텐서 S_{ij} 와 Green 변형률텐서 ϵ_{ij} 를 사용하여 다음과 같이 기지 상태의 영역에 대한 적분으로 한다.¹⁰⁾

$$\int_V {}^{t+\Delta t}S_{ij} \delta_t \epsilon_{ij} dV = {}^{t+\Delta t}R \quad (2)$$

이 식을 증분량에 관한 식으로 바꾸기위해서 2nd P-K 응력텐서 S_{ij} 와 Green 변형률텐서 ϵ_{ij} 를 증분형으로 분리하고 식(2)에 대입하면 다음과 같이 표시된다.

$$\int_V {}^tC_{ijrs} \epsilon_{rs} \delta_t \epsilon_{ij} dV + \int_V {}^t\tau_{ij} \delta_t \eta_{ij} dV =$$

$${}^{t+\Delta t}R - \int_V {}^t\tau_{ij} \delta_t \epsilon_{ij} dV \quad (3)$$

여기서 좌측 상첨자가 없는 상태변수들은 증분량을 나타내며 C_{ijrs} 는 물성계수 텐서, ϵ_{ij} , η_{ij} 는 각각 Green 변형률텐서의 선형 항과 비선형 항을 나타낸다. 증분해석을 할 경우 2차 이상의 고차항은 아주 작은 양이므로 무시하였다. 만약 외부하중이 변형에 관계없이 일정한 경우에 변위를 u , 체적력을 f^B , 표면력을 f^S 라 하면 식(3)의 R은 다음과 같이 표현된다.

$${}^{t+\Delta t}R = \int_S {}^{t+\Delta t}f_k^S \delta_t u_k dS + \int_V {}^{t+\Delta t}f_k^B \delta_t u_k dV \quad (4)$$

식(3)과 (4)는 고정된 전체 카테시안 좌표계(Cartesian Coordinate System)에서 기술한 것이다. 그러나 보구조물의 해석에 있어서는 상태 't'에서의 국부좌표계도 증분의 축차적 수렴과정 동안 변하지 않고 고정되어 있는 카테시안 좌표계이므로 요소에 대한 국부좌표계에서도 똑같이 성립한다.¹⁴⁾

2.2 보요소의 유한요소화 과정

일반적인 단면현상을 갖는 보요소를 Fig.2에 표시하였다. 그림에서 C는 단면좌표의 원점으로 도심(Centroid)을 T는 임의의 참고점으로 전단중심(Shear Center or Torsion Center)을, D는 주변좌표의 원점(Origin of Principal Sectorial Coordinate)을, P는 보요소의 임의의 점을 나타내고 y, z 좌표축은 상태 't'에서의 보요소에 대한 국부단면좌표계를 단면주축(Principal Axis of Cross Section)에 일치시킨 것이다. 보요소의 임의의 점P에 대한 변위의 증분을 점C, T, D등의 참조점에서의 변위증분으로 표시하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.¹⁵⁾

$$\begin{aligned} u_1 &= u_{xC} - y\theta_{zT} + z\theta_{yT} + \omega\theta_x \\ u_2 &= u_{yT} - (z - e_z)\theta_x \\ u_3 &= u_{zT} + (y - e_y)\theta_x \end{aligned} \quad (5)$$

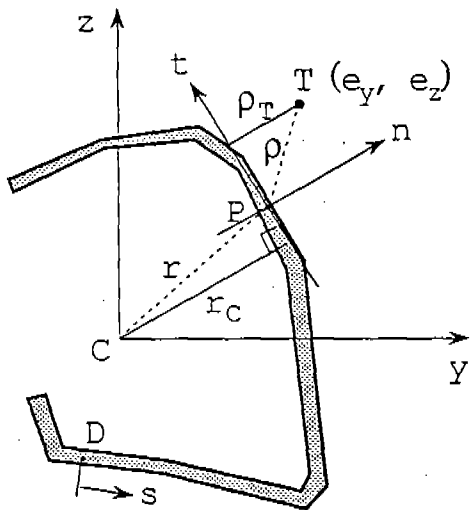


Fig. 2 Beam Element Section

여기서 Warping 효과에 의한 축방향의 변위를 고려하기 위한 양 ω 는 단면좌표 s 의 함수로서 Fig. 2에 표시되어 있는 T점과 P점의 접선과의 수직거리 ρ_T 를 사용하면 다음과 같다.

$$\omega = \omega(y, z) = \omega(s) = \omega_T - \omega_0 \quad (6)$$

$$\omega_T = \int_{0(D)} \rho_T ds, \quad \omega_0 = \frac{1}{A} \int_A \omega_T dA$$

여기서 A는 보요소의 단면적이다. 변위와 변형률의 관계는 Green 변형률 텐서에 식(5)를 대입하고 극부좌표계에 대해서 선형성분을 나누고 비선형 부분에서 영향이 적은 고차항들을 무시하고 표기하면 다음과 같다.⁷⁾

$$e_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x} = u'_{xC} - y u''_{zT} - z u''_{yT} + \omega \theta'_x$$

$$e_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} - z + e_z \right) \theta'_x$$

$$e_{13} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \omega}{\partial z} + y + e_y \right) \theta'_x$$

$$\begin{aligned} \eta_{11} &\equiv \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_2}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x} \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} [u'^2_{yT} + u'^2_{zT} + 2(y - e_y) u'_{zT} \theta'_x - 2(z - e_z) u'_{yT} \theta'_x + \{ (z - e_z)^2 + (y - e_y)^2 \} \theta'^2_x] \end{aligned}$$

$$\eta_{12} \equiv \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_1}{\partial y} \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_3}{\partial y} \frac{\partial u_3}{\partial x} \right] \quad (7)$$

$$= \frac{1}{2} [u'_{zT} \theta'_x - u'_{yT} u'_{xC} + (y - e_y) \theta'_x \theta'_x + z u'_{yT} u'_{zT}]$$

$$\begin{aligned} \eta_{13} &\equiv \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_1}{\partial z} \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial z} \frac{\partial u_2}{\partial x} \right] \\ &= \frac{1}{2} [-u'_{yT} \theta'_x - u'_{zT} u'_{xC} + (z - e_z) \theta'_x \theta'_x + y u'_{zT} u'_{yT}] \end{aligned}$$

개정 라그랑지언 수식화를 이용한 유한요소 해석에서는 Cauchy 응력텐서를 포함한 적분을 수행해야 하는데 그러기 위해서는 강성행렬이나 내부힘벡터를 구할 때마다 Cauchy 응력텐서를 계산해야 하는 어려움이 있다. 그러나 보요소의 경우는 단면형상이 변형에 의해 변하지 않는다면 다음과 같이 응력을 계산하지 않고도 응력합력을 바로 계산할 수 있으므로 복잡한 과정의 Cauchy 응력텐서를 계산하지 않아도 된다.¹⁴⁾

$$\begin{aligned} \int \tau'_{11} dA &= f'_{xC} \\ \int \tau'_{12} dA &= f'_{yC} \\ \int \tau'_{13} dA &= f'_{zC} \\ \int \tau'_{11} z dA &= m'_{yC} \\ - \int \tau'_{11} y dA &= m'_{zC} \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \int \left[\tau'_{13} \left(y - e_y + \frac{\partial \omega}{\partial z} \right) - \tau'_{12} \left(z - e_z - \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) \right] dA &= \\ T'_{sv} + T'_{T\omega} &= m'_{xT} \end{aligned}$$

$$- \int \tau'_{11} \omega dA = b$$

연속체에 대한 평형방정식(3)을 유한요소방정식으로 만들기 위하여 다음과 같이 참고점 C, T에 대한 변위를 삼간한다.

$$\begin{aligned} u_{xC} &= \langle N_u(\xi) \rangle \{u\} \{u\} = \langle u_A, u_B \rangle_C \\ u_{yT} &= \langle N_v(\xi) \rangle \{v\} \{v\} = \langle v_A, \theta_{zA}, v_B, \theta_{zB} \rangle_T \\ u_{zT} &= \langle N_w(\xi) \rangle \{w\} \{w\} = \langle w_A, \theta_{yA}, w_B, \theta_{yB} \rangle_T \\ \theta_x &= \langle N_\theta(\xi) \rangle \{\theta\} \{\theta\} = \langle \theta_{xA}, \theta'_{xA}, \theta_{xB}, \theta'_{xB} \rangle_T \end{aligned} \quad (9)$$

여기서 괄호 < >는 열벡터의 전치행렬을 표시하고 하첨자 C와 T는 변위를 재는 참조점으로써 Fig. 2에 표시된 바와 같이 각각 단면의 도심과 전단중심을 표시한다. 본 논문에서는 축방향으로는 선형 삼간하고 굽힘방향

이고 식(12)는

$$m_i \delta_i \theta_i = {}^{tAD}R - {}^t m_i \delta_i \theta_i \quad (13)$$

이다. 모멘트의 증분은 스프링의 강성행렬을 이용하면 변위의 증분으로 부터 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$m_i = k_i \theta_i$$

요소의 절점변위와 접선강성행렬(Tangent Stiffness Matrix) [K]로 나타내면 다음과 같다.

$$[\bar{K}]\{\bar{\theta}\} = \{\bar{R}\} - \{\bar{M}\} \quad (14)$$

증분해법에서 미소증분에 대한 회전변위의 상호 중첩효과는 무시된다고 가정하면 [K] 및 {M}를 간단하게 구할 수 있다. 위의 식(14)는 스프링이 속해있는 부재의 국부좌표계에 대해서 기술한 것이므로 전체좌표계에 대해서 좌표변환하여 표시하여야 한다. 스프링요소의 강성행렬은 다음과 같이 표시된다.

$$[\bar{K}] = \begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 & -k_x & 0 & 0 \\ & k_y & 0 & 0 & -k_y & 0 \\ & & k_z & 0 & 0 & -k_z \\ S & & & k_x & 0 & 0 \\ & Y & & & k_y & 0 \\ & & M & & & k_z \end{bmatrix} \quad (15)$$

2.4 좌표변환

식(10)은 보요소의 참고점 C, T들의 국부좌표계로 기술이 되어 있으므로 전체구조에 대한 평형방정식을 만들기 위해서는 모든 요소가 공유할 수 있는 전체좌표계에 대해서 표시해야 한다. 먼저 서로 다른 부재가 연결 부분에 도집점 C를 공통으로 하여 연결되어 있다고 가정하면 T점에 대한 절점변위를 C점의 절점변위로 변환해야 한다.¹⁶⁾ 즉,

$$\{\bar{U}\} = [e]\{\bar{U}\}_C \quad (16)$$

$$\{\bar{F}\} = [e]^{-T}\{\bar{F}\}_C$$

이다. 여기서, [e]는 본 논문에서 기술하고있는 참조점에 대한 절점변위와 C점에 대한 절점변위 간의 변환행렬이다. 또한 현재상태 't

에서의 국부좌표계를 전체좌표계로 변환해야 하며 이 때는 국부좌표계 축의 방향여현(Direction Cosine)을 이용하여 벡터변환을 한다. 즉,

$$\{\bar{U}\}_C = [T]\{U\} \quad (17)$$

$$\{\bar{F}\}_C = [T]^{-T}\{F\}$$

이다. 여기서, [T]는 국부좌표계와 전체좌표계간의 변환행렬이다. 그러면 요소 강성행렬과 내부 힘벡터는 다음과 같이 전체좌표계에 대해서 기술된다.

$$([K_L] + [K_{NL}])\{U\} = \{R\} - \{F\} \quad (18)$$

여기서 [K]와 {F}는 다음과 같다.

$$[K] = [T]^T [e]^T [\bar{K}] [e] [T]$$

$$\{F\} = [T]^T [e]^T \{\bar{F}\}$$

2.5 형상의 수정 및 내부응력합의 증분 계산

현재상태 't'에서 평형방정식의 반복계산이 끝나면 그 증분량 만큼의 변위를 현재상태에 더해 줌으로써 다음 반복계산을 할 수 있도록 해 주어야 한다. 이때 회전변위에 대한 증분량은 단순한 벡터변환으로 표시되지 않으므로 오일러 각(Euler Angle)을 사용하여야 한다. 절점변위의 증분을 이용한 다음상태의 결정은 국부좌표계의 방향여현과 요소와 길이, 회전등을 포함한다.

식(8)과 같이 응력모델을 사용하면 요소 내부응력 벡터를 구할 수 있다. 그런데 변위증분에 대한 내부응력합의 증분을 정확히 계산하기 위해서는 Cauchy 응력 텐서를 구해서 영역에 대해서 적분을 해야한다. 본 논문에서는 증분의 양이 작다는 가정 하에서 평형조건을 만족하도록 보의 단순이론으로 부터 내부응력합의 증분을 바로 계산하였다.^{14,17)} 보요소의 내부힘 벡터는 다음과 같다.

$$\{\bar{F}\} = \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} {}^t f_{xC} k_1 \\ {}^t m_{xC} \\ 1 \end{array} \right\} k_2 \\ - \left\{ \begin{array}{l} {}^t m_{yC} \\ 1 \end{array} \right\} k_3 \\ \left\{ \begin{array}{l} {}^t m_{xT} k_4 \\ - \frac{{}^t b_T}{1} \end{array} \right\} k_4 \end{array} \right\} \quad (19)$$

여기서도 식(11)과 똑같은 지표들을 사용하여 다음과 같은 표기법을 이용했다.

$$\{ \psi_k \} = \int_0^1 \psi \{ N_i^{(i)} \} d\xi$$

스프링요소의 점선 강성행렬과 내부힘 벡터의 요소의 모멘트 회전각 관계가 주어지면 쉽게 계산할 수 있으며 이 관계는 소성이론에 의한 해석적인 방법, 실험에 의한 경험식 등을 이용할 수 있으며 부재의 실험결과를 직접 적용할 수도 있다. Fig. 4에 요소의 모멘트회전각 관계를 도식적으로 그렸는데 이를 이용하여 상태 't'에서의 변위를 알고 있다면 그때의 하중과 기울기를 쉽게 구할 수 있다. 스프링요소의 내부힘 벡터는 다음과 같다.

$$\{ \bar{F} \} = \begin{Bmatrix} m_{xA} \\ m_{yA} \\ m_{zA} \\ m_{xB} \\ m_{yB} \\ m_{zB} \end{Bmatrix} \quad (20)$$

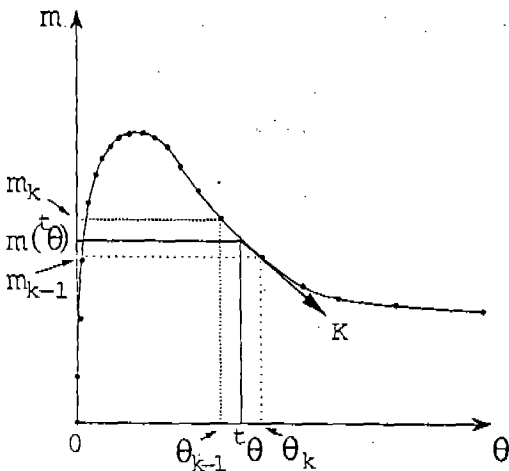


Fig. 4 Typical Experiment-Angle Data

2.6 비선형 유한요소 해석을 위한 수치해법

식(3)에 유한요소법을 적용하면 유한차원의 비선형식을 얻을 수 있고 이를 축차적으로 풀

어 't + Δt'에서의 평형상태를 구한다. 이때 상태 't'에서 't + Δt'에 이르는 상태변수들의 변화를 증분으로 표현했고 한 증분내에서 평형을 만족시키기 위해 수행하는 반복과정을 축차라 하였다. 어떤 증분에서의 변위증분량을 u로, 한 증분내에서 i번째 축차까지의 변위증분량을 u⁽ⁱ⁾로, i번째 축차에서의 축차에 의한 변위 수정량을 Δu⁽ⁱ⁾로 표현하면 다음과 같은 i번째 축차과정에 대한 평형방정식과 전술한 변위간의 상호관계를 얻을 수 있다.

$$\{ K^{(i)} \} \Delta u^{(i)} = {}^{t+\Delta t}R - {}^{t+\Delta t}F^{(i-1)} \quad (21)$$

$${}^{t+\Delta t}U^{(i)} = \{ U + u^{(i)} \}$$

$$u^{(i)} = \sum_{j=1}^i \Delta u^{(j)}$$

여기서, 괄호안의 오른쪽 상첨자는 현재의 축차횟수를 나타내며 식(21)의 오른쪽 항이 거의 0이 되거나 Δu⁽ⁱ⁾의 크기가 거의 0이 될때까지 반복한다. 만약 구조물에 작용하는 하중이 비례하중이라면 하중인자 λ를 도입하여 전술한 변위의 기술방법과 같이 i번째 축차까지의 하중인자 증분량을 λ⁽ⁱ⁾, i번째 축차에서의 축차에 의한 수정량을 Δλ⁽ⁱ⁾로 표현하면 식(21)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\{ K^{(i)} \} \Delta u^{(i)} - \Delta \lambda^{(i)} P_0 = {}^{t+\Delta t} \lambda^{(i-1)} P_0 - {}^{t+\Delta t} F^{(i-1)} \quad (22)$$

여기서 P₀는 비례하중을 표시하는 기준 하중 벡터이다. 계산상의 편의와 효율을 위해 변위 수정량 Δu⁽ⁱ⁾를 다음과 같이 두 성분으로 나눈다.

$$\Delta u^{(i)} = \Delta u^I \Delta \lambda^{(i)} + \Delta u^{II(i)}$$

$$\Delta u^I = \{ K^{-1} \} P_0 \quad (23)$$

$$\Delta u^{II(i)} = \{ K^{-1} \} [{}^{t+\Delta t} \lambda^{(i-1)} P_0 - {}^{t+\Delta t} F^{(i-1)}]$$

각각의 양에 대한 도식적인 표시는 u ⊕ λ 공간에서 Fig. 5와 같이 표시된다.

위의 식(22), (23)은 유한요소모델의 총 자유도 수를 D라 하면 (D + 1)개의 미지수를 갖는 D개의 방정식이 된다. 여기서 Arc-Length에 관한 다음과 같은 방정식을 추가시키면 수

정량을 구할 수 있게 된다.¹²⁾

$$\kappa \lambda^{(i)2} + u^{(i)T} u^{(i)} = s^2 \quad (24)$$

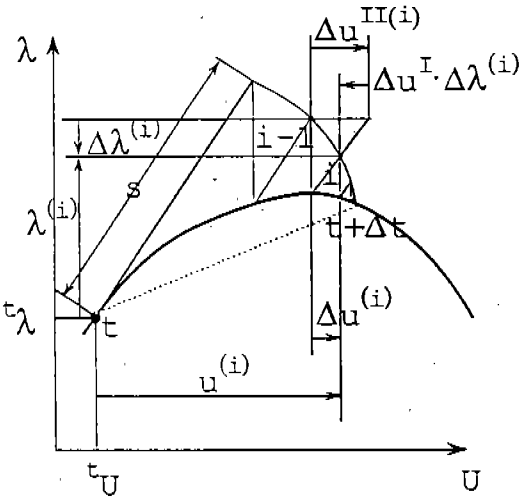


Fig.5 Geometrical Interpretation of the Arc-length Method

여기서 s 는 Arc-Length이며 κ 는 Arc-Length를 재는데 있어서의 하중인자에 대한 scaling parameter 이다.

식(22)과 (23)을 식(24)에 대입하면 다음과 같은 방정식이 얻어진다.

$$a \Delta \lambda^{(i)2} + b \Delta \lambda^{(i)} + c = 0 \quad (25)$$

$$s = \Delta \lambda^{(i)} \sqrt{a}$$

여기서

$$a = \kappa + \Delta u^{iT} \Delta u^I$$

$$b = 2(u^{(i-1)} + \Delta u^{II(i)})^T \Delta u^I + 2\kappa \lambda^{(i-1)}$$

$$c = (u^{(i-1)T} u^{(i-1)} - s^2) + (\Delta u^{II(i)} + 2u^{(i-1)T} \Delta u^{II(i)} + \kappa \lambda^{(i-1)2})$$

이다. 식(25)로부터 축차과정의 하중인자 수정량 $\Delta \lambda^{(i)}$ 를 구한 후 식(23)에 대입 $\Delta u^{(i)}$ 를 구하면 한번의 축차가 끝난다. 본 논문에서는 $\Delta \lambda^{(i)}$ 를 선택하는데 다음과 같은 방법을 택하였다.¹²⁾

(a) 만약 $\Delta \lambda$ 가 복소수이면 한 단계전의 평형상태로부터 전 뉴턴-랩슨 축차법으로 증분해석한다.

(b) 두개의 실근인 $\Delta \lambda$ 가 얻어지면 다음과 같은 계산에서 얻어지는 δ 가 큰 값이 되는 $\Delta \lambda$ 를 선택한다.

$$\delta_{1,2} = u^{(i-1)T} u_{1,2}^{(i)}, \text{ if } i \neq 1 \quad (26)$$

$$= u^{(0)T} u_{1,2}^{(1)}, \text{ if } i = 1$$

여기서, $u_{1,2}^{(i)} = [{}^{+}\Delta u^{(i-1)} + (\Delta u^I \Delta \lambda_{1,2}^{(i)} + \Delta u^{II(i)})] - {}^t u$ 이다.

그리고 증분해석을 효율적으로 하기위해 매 증분단계마다 Arc-Length를 조정했는데 그 방법은 다음과 같다.

$$s_{new} = \sqrt{\frac{N_0}{N}} s_{old} \quad (27)$$

여기서, N_0 는 첫번째 증분에서의 축차횟수이고 N 는 바로 전 단계 증분에서의 축차횟수를 나타낸다.

3. 해석결과 및 고찰

수식화의 정확도와 수치해법의 효율성등을 검사하기 위해서 기존의 해석결과와 실험치를 문헌에서 참고하여 본 논문의 해석 결과와 비교하였다.

Fig.6에 표시한 구조에 대해서¹³⁾ William이 실험하고 해석적으로 구한 결과와 부재당 4개의 요소를 사용하여 현재의 알고리즘에 의해 계산된 하중작용점의 수직방향 변위를 비교하여 Fig.7에 표시하였다. 부재의 단면은 균일하며 직사각형으로 0.753" x 0.243"이며 탄성계수는 10.138×10^6 psi, 기준하중은 100 lb 이다. 본 논문의 수치해가 문헌의 결과와 잘 일치하고 있다.

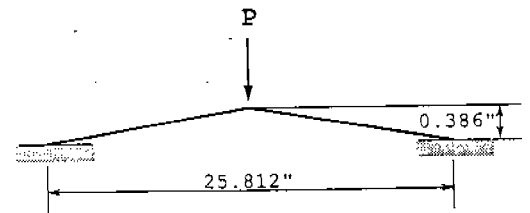


Fig.6 William Toggle Frame

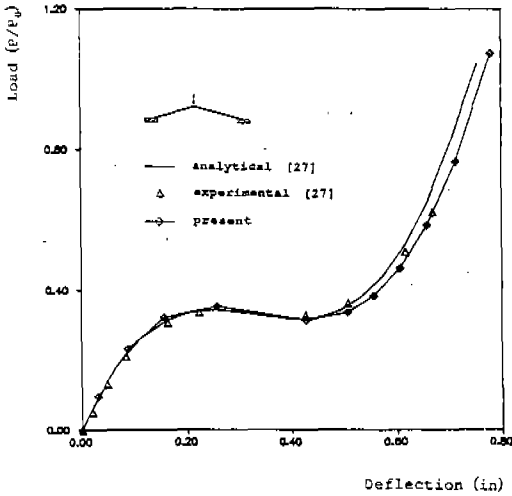


Fig.7 Analysis of the William Toggle Frame

또 하나의 순수한 기하학적 비선형성만을 고려한 모델에 의한 해석결과의 비교로서 Fig. 8과 같은 육각 프레임 구조물을 문헌의 자료와 같이 입력하여 해석해 보았다. 중앙정점에 집중하중이 작용하고 왼쪽 모서리점을 제외한 각 지지점이 수평방향으로 병진운동을 자유로이 할 수 있도록 된 구조물을 부재당 3개의 요소를 사용하여 해석한 결과를 Fig.9에 표시하였다. 부재의 단면은 균일하며 한 변이 0.7" 인 정사각형이며 탄성계수는 4.393×10^5 psi 이고 전단계수는 1.590×10^5 psi,

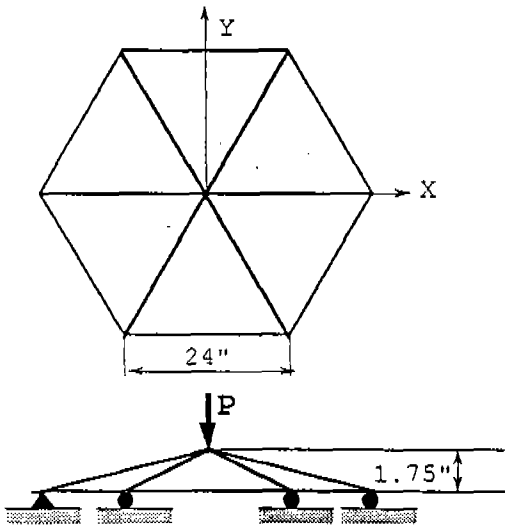


Fig.8 Hexagonal Frame

기준하중은 100 lb 이다. 결과는 KuoMo-Hsiao¹⁷⁾의 것보다는 실험치와 더 잘 일치하고 있다. 이 문제는 접선 강성행렬이 동시에 여러개의 음의 고유치(Simultaneous Multiple Negative Eigen Value)를 갖는¹⁷⁾ 문제로 알려져 있다.

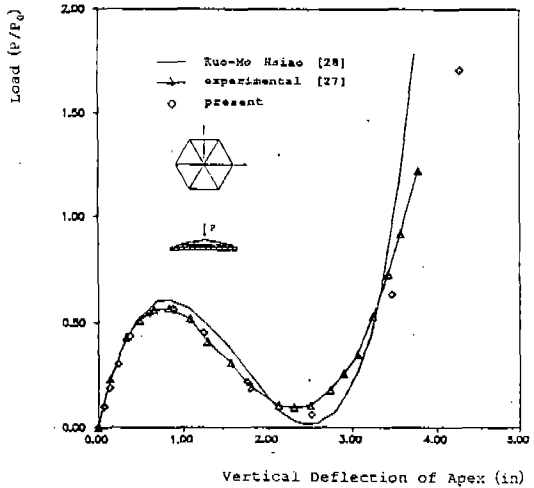


Fig.9 Analysis of the Hexagonal Frame

비선형 회전 스프링요소를 구조에 첨가시킴으로써 국부좌굴의 현상을 해석하기 위하여 Fig.10과 같은 외팔보를 4개의 유한요소로 모델링하여 해석하였다. 그림과 같은 단면을 갖는 부재의 모멘트 각도의 곡선은 Fig. 11과 같이 알려져 있는 자료를 입력하였다. 이 곡선은 국부좌굴 거동에 대한 탄성영역의 효과와 소성영역의 효과를 모두 내포하고 있는 것으로서 외팔보의 실험치로 부터 보요소에 대한 선형탄성부분과 기하학적 비선형부분을 제거한 것이다. 부재의 단면은 Fig.11 우측상단에 표시하였고 전 길이에 걸쳐 균일하며 단면 2 차모멘트 $I_y = 4.090 \times 10^4 \text{ mm}^4$ 이고 탄성계수는 $2.10 \times 10^4 \text{ kgf/mm}^2$ 이고 전단계수는 $0.79 \times 10^4 \text{ kgf/mm}^2$ 이며 기준하중은 100 kgf이다. 이 외팔보의 지지점에 한개의 스프링요소를 넣고 네개의 보요소로 모델링하여 해석하고 그 결과를 실험치와 비교하여 Fig.12에 표시하였다. 좌굴후 영역(Post Buckling Range)까지 비교적 잘 일치하고 있다.

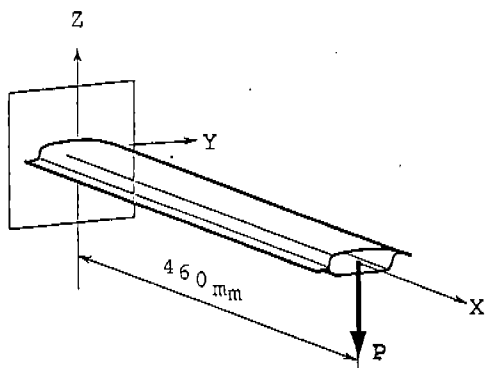


Fig.10. Cantilever Beam

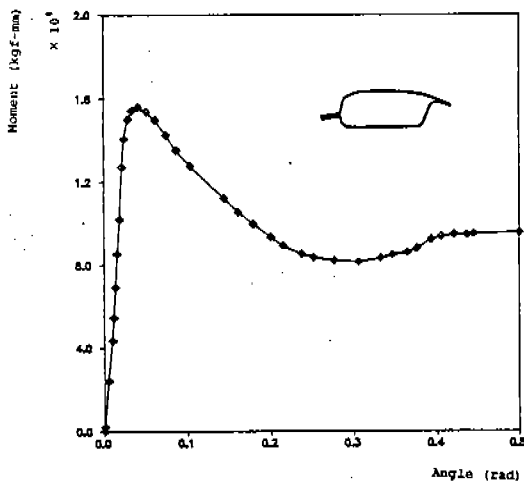


Fig.11 Moment-Angle Data of Cantilever

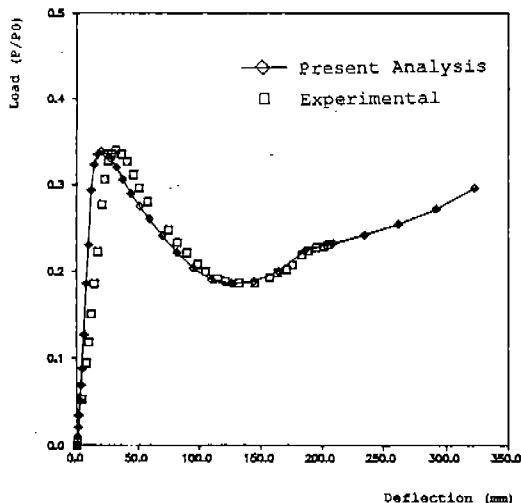


Fig.12 Force-Displacement Curve of Cantilever

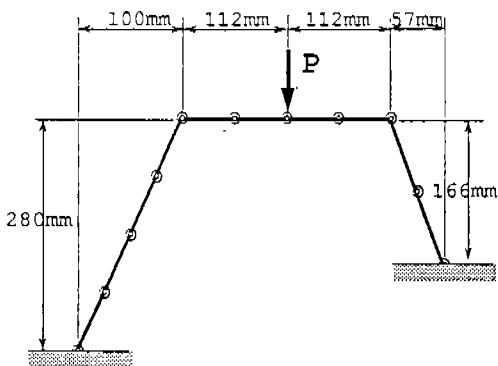


Fig.13 Portal Frame Structure

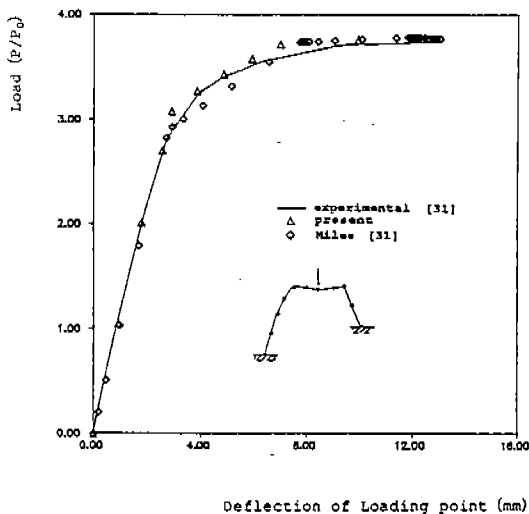


Fig.14 Deflection of the Portal Frame

또한 기존의 소성힌지법(Plastic Hinge Method)과 비교하기 위하여 중실단면을 갖는 부재로 구성 되어있는 Fig.13 과 같은 포탈 프레임 구조물을 해석 하였다. 각 부재의 단면은 균일하며 한 변이 9.539mm인 정사각형이고 탄성계수는 202 GPa, 전단계수는 101 GPa이며 기준하중은 1kN 이다. 스프링요소의 모멘트 각도 곡선은 문헌¹⁹⁾의 전소성모멘트(Fully Plastic Moment)를 이용하였다. 지지부의 소성힌지 모우먼트는 96 Nm 이고 그밖의 부분에서의 소성힌지 모우먼트는 113 Nm 이다. 10개의 보요소를 사용했으며 각각의 절점마다에 스프링요소를 첨가하였다. 구조에 스프링요소를 첨가한 형상이 Fig.13에서 작은

원으로 표시되었고 그 결과는 Miles 에 의한 결과와¹⁹⁾ 함께 Fig.14에 표시되어 있다. 실험치는 곡선을 이루는 반면 컴퓨터 프로그램 해석결과는 구간선형(Piecewise linear)으로 나타나 있다. 구간 선형 거동에서 직선의 기울기가 바뀌는 점은 새로운 스프링요소가 전소성모멘트에 도달하는 점과 같으며 전소성 모멘트에 도달한 후에는 회전각에 상관없이 모멘트가 일정한 것으로 하였기 때문에 구간선형 거동을 보이는 것이다.

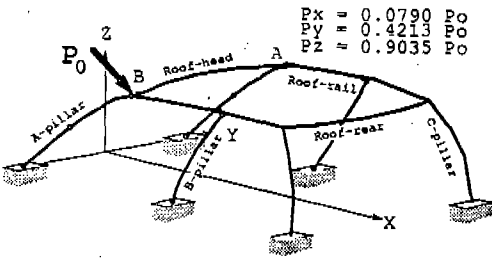


Fig. 15 Root Model of car

자동차의 구조해석에 응용한 예로서는 Fig. 15와 같은 자동차의 지붕부분을 보요소와 회전 스프링요소로 이루어지고 그 지지부가 고정되어있는 프레임 구조로 모델링하고 주어진 하중에 대해서 해석해 보았다. 먼저 스프링요소 없이 기하학적인 비선형성만을 고려하여 해석하고 그 결과를 스프링요소를 첨가하여 해석한 결과와 비교하여 보았다. 스프링요소는 각 부재에 대해서 실험하여 얻어진 모멘트 각도 곡선을 이용하였다. 스프링요소 없이 해석한 결과를 그 변형된 형상과 왼쪽(B점)모서리의 변위를 Fig.16과 Fig.17에 표시하였다. 다음으로 Fig.18과 같은 실험으로부터 얻어진 부재들의 모멘트 각도의 자료를 이용하여 14개의 스프링요소를 첨가하고 해석한 후 그 변형된 형상과 하중작용점의 변위성분을 탄성해석의 결과와 비교하여 Fig.19와 Fig.20에 표시하였다. 한편 자동차의 프레임 부재는 대부분, 단면의 주축방향과 국부좌굴현상의 주방향이 일치하지 않기 때문에 비선형 스프링요소로 모델링할때, 강성행렬과 내부힘의 합력벡터를 구하는데 있어

서 그 방향차를 고려해 주어야 한다. 이를 고려한 해석과 고려하지 않은 해석을 구별하기 위해 p-axis offset 이라는 용어를 도입하였고 이를 고려한 경우 구조의 강성이 약간 감소했음을 알 수 있다. 그림에서 보는 바와 같이 하중이 2,000 kgf 에서 하중의 작용지점의 변위가 탄성해석인 경우에는 약 20mm 정도 이나 스프링요소를 넣어서 해석한 경우에는 약 100mm 정도이었고 이는 자동차 안전규격의 허용변위가 125mm임을 고려하면 타당한 결과로 볼 수 있다. 이 해석결과를 실제 설계에 응용하기 위해서는 실험과 해석을 병행하여 결과의 상관관계를 구하는 과정이 필요하다.

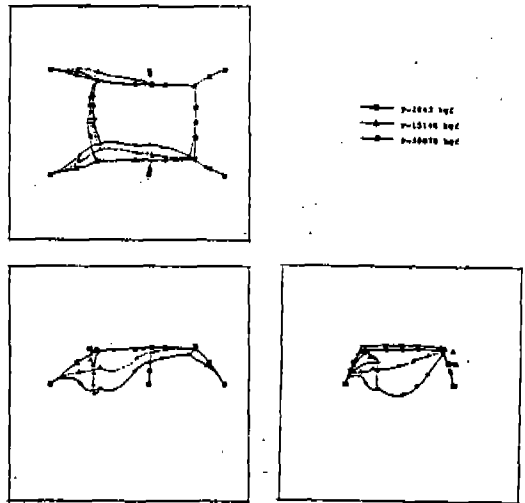
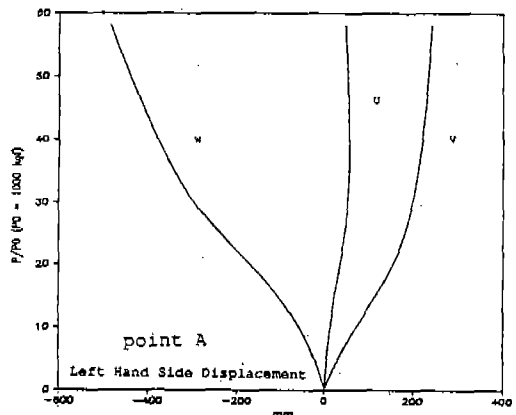


Fig. 16 Deformed Shape of the Car with no Spring Elements



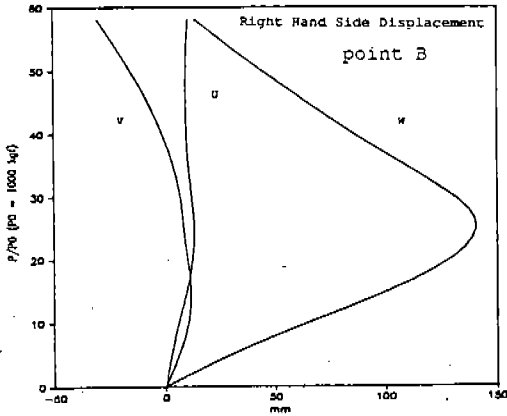


Fig. 17 Corner Displacement with no Spring Elements

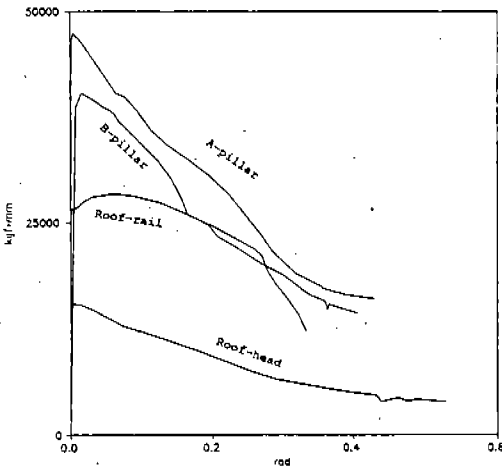


Fig. 18 Experiment-Angle Curves

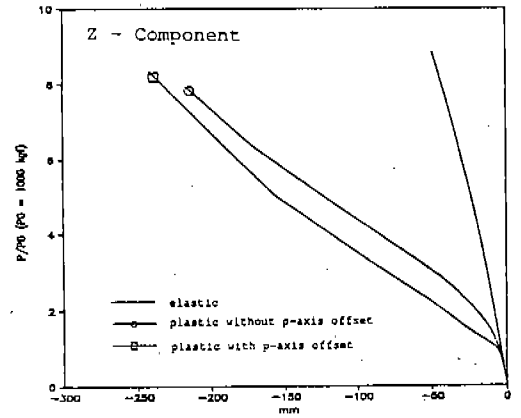
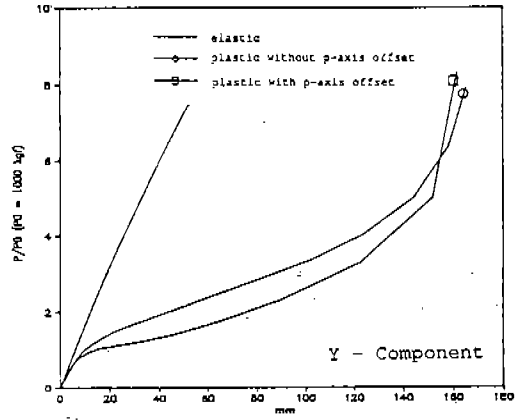


Fig. 20 Y and Z Components of the Loading Point Displacement

4. 결 론

연속체에 대한 고정 라그랑지언 증분 변분 원리를 이용하고 비교적 간단한 보요소와 회전 스프링요소를 사용한 유한요소 수식화는 대변위가 발생하는 프레임 구조물의 해석에 적합한 것으로 생각된다.

보요소의 유한요소화는 변형을 변위의 관계에서 몇개의 고차항을 무시하였으나 축방향과 굽힘방향들, 그리고 비틀림방향의 중첩항을 고려하므로써 여러가지 하중형태에 대해서도 정확한 해석을 할 수 있게 하였다. 또한 증실축의 경우 뿐만이 아니라 일반적인 단면형상을 갖는 요소에 대해서 수식을 전개하므로써 해석의 범위를 넓혔다.

단면에 작용하는 굽힘 모멘트에 의한 국부 좌굴현상이나 그밖의 국부적인 비선형성을 고

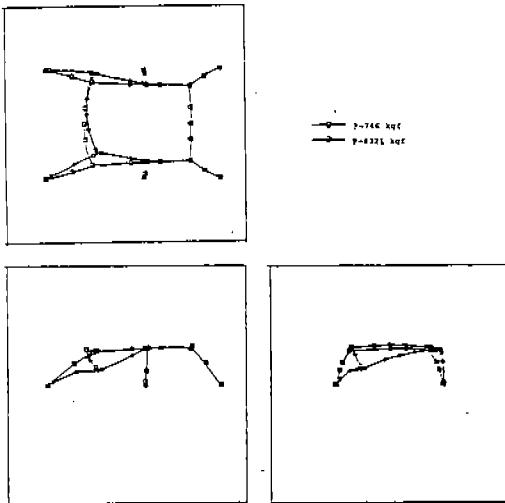


Fig. 19 Deformed Shape of the Car with Spring Elements

려하기 위하여 사용한 비선형 회전 스프링 요소는 복잡한 비선형 현상을 실용적으로 해결할 수 있는 도구로 생각되며 실험과 병행하여 사용할 경우 해석의 정밀도도 별로감소하지 않을 것이다. 이러한 스프링요소는 국부 좌굴의 예상지점에 놓을 수 있으며 그 스프링요소에 극한 값에 가까운 모멘트가 걸리지 않으면 전체구조의 강성에 거의 영향을 주지 않으므로 여러개의 스프링을 설치하여 구조의 국부좌굴 여부와 좌굴 후의 변형 거동을 예측할 수 있다. 그러나 스프링요소의 강성에 다축 굽힘의 영향, 축력에 의한 축방향 응력의 영향을 고려하는 것과, 그리고 해중(Unloading)이 될때의 제산등의 연구가 더 필요하다.

수치해법은 일원원호법을 사용하고 그 길이를 자동적으로 결정하는 알고리즘을 채택했기 때문에 극한점을 잘 극복하였으며 좌굴후 영역에서도 정확히 해석할 수 있었다. 그러나 초기에 수렴이 되는 적절한 하중치를 결정하는 것과 증분해석시 하중인자를 구하는데 있어서 불안정 요인이 발생했을 경우의 문제를 잘 극복하기 위해서는 개선해야 할 점이 있다.

REFERENCES

1. Bathe, K.J. et al., "Large Displacement Analysis of Three - Dimensional Beam Structures," Int. J. for Numerical Method in Engineering, Vol.14, pp.961-986, 1979.
2. Rosen, A. & Rando, O., "Numerical Model of the Nonlinear Behavior of Curved Rods," Computers and Structures Vol.22, No.5, 785-799, 1986.
3. 구정서, 이병채, 광병만, "평면 프레임 구조물의 유한요소 비선형 해석을 위한 효율적인 수치해석 방법에 관한 연구", 大韓機械學會論文集 第12卷, 第4號, 631~641, 1988.
4. 이상태, "공간 프레임 구조물의 유한요소 비선형 해석", M. S. Thesis of KAIST, 1988.
5. Yukio Ueda & Tetsuya Yao, "The Plastic Node Method: A New Method of Plastic Analysis," Computer Method in Applied Mechanics and Engineering, Vol.34, 1089-1104, 1982.
6. McIvor, I.K., Wineman, A.S. and Wang, H.C., "Plastic Collapse of General Frames," Int. J. Solids Structures, Vol.13, 197-210, 1977.
7. Yang, Y.B. & McGuire, W., "Stiffness Matrix for Geometric Nonlinear Analysis," J. of Structural Engineering, A.S.C.E., Vol.112, No.4, April, 1986.
8. Blanford, G.E. & Glass, G.C., "Static/Dynamic Analysis of Locally Buckled Frames," J. of Structural Engineering, A.S.C.E., Vol.113, No.2, Feb., 1987.
9. Washizu, K., *Variational Method in Elasticity and Plasticity*. 3rd ed., Pergamon Press, 1982.
10. Bathe, K.J., *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*. Prentice Hall, Inc., 1982.
11. Crisfield, M.A., "An Arc-Length Method Including Line Searches and Accelerations," Int. J. for Numerical Method in Engineering, Vol.19, 1269-1289, 1983.
12. Forde, B.W.R. & Stiemer, S.F., "Improved Arc Length Orthogonality Method for Nonlinear Finite Element Analysis," Computers and Structures, Vol.27, No.5, 625-6630, 1987.
13. Bellini, P.X. & Chulya, A., "An Improved Automatic Incremental Algorithm for the Efficient Solution of Nonlinear Finite Element Equations," Computers and Structures, Vol.26, No.1//2, 99-110, 1987.
14. Gattass, M. & Abel, J.F., "Equilibrium Considerations of the Updated Lagrangian Formulation of Beam - Columns with Natural Concepts," Int. J. for Numerical Method and Engineering, Vol.24,

- 2119-2141, 1987.
15. Rajasekaran, S., *Theory of Beam Columns*, Ch. 12, Vol.2 by W.F. Chen and T. Atsuta, McGraw-Hill, 1977.
 16. Chen, Bo - Zhen & Yu Ren Hu, "The Torsional Stiffness matrix of a Thin - Walled Beam and its Application to Beam under Combined Loading," *Computers and Structures*, Vol.28, No.3, pp.421-431, 1988.
 17. Meek, J.L. & Tan, H.S., "Geometrically Nonlinear Analysis of Space Frames by an Incremental Iterative Technique," *Computer Method in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.47, 261-282, 1984.
 18. Papadrakakis, M., "Post - Buckling Analysis of Spatial Structures by Vector Iteration Methods," *Computers and Structures*, Vol.14, No.5-6, pp.393-402, 1981.
 19. Miles, J.C., "The Determination of Collapse Load and Energy Absorbing Properties of Thin Walled Beam Structures Using Matrix Method of Analysis" *Int. J. mech. Sci.* Pergamon Press, Vol.18, pp. 399-405, 1976.