傳達매트릭스法에 있어서 解의 收斂特性에 關한 硏究

金 永 植

釜山水産大學校

(1990년 7월 31일 접수)

A Study on the Convergence Characteristics for the Solution of Transfer Matrix Method

Yeong-Sik KIM

National Fisheries University of Pusan

(Received July 31, 1990)

In this paper, it has been analysed that the stability and the effectivity of the solution using traditional transfer matrix method and the frontal transfer matrix method. And applying the false-position method to these, the convergence characteristics of the solution has been also analysed.

As a result, the frontal transfer matrix method is superior to traditional transfer matrix method in the stability and the accuracy of the solution in high frequency region but in the economical efficiency and the effectivity of the calculation, traditional transfer matrix method is more desiable. Also, it is clear that ω-Det curve using the frontal transfer matrix method is discontinuous.

緖 論

振動問題, 특히 系의 固有振動數를 구하는 問題에 있어서 狀態變數의 逐次傳達에 개념을 둔 傳達매트릭스法이 유력한 수단으로 사용되어져 왔다[1,2,3]. 이 방법의 마지막 단계는 振動數行列式의 값을 0으로 하는 解를 찾는 것으로, 실제 이 방법의 적용에 있어서는 電子計算機에 의해 일련의 施行값에 대한 振動數行列式의 값을 구해 그 近似解를 찾는 것이다. 최근 이러한 많은 施行錯誤課程을 배제하기 위해 傳達메트릭스法에 Newton-Raphson의 방법[4]이라든지 또는 線形內挿法[5]과 같은 數値解析的 방법을 적용하여 그 近似解를 구하고자하는 연구들이 시도되었다[6,7,8]. 傳達매트릭스法에 이러한 數値解析的 방법을 적용함에 있어서는 解의 收斂特性이 중요한 문제가 된다.

한편, 이러한 傳達매트릭스法에 의한 計算에 있어서, 특히 回轉軸과 같이 긴 構造物의 高次振動數 計算의 경우는, 최종 傳達매트릭스 要素의 값들 사이에 극단적인 不均衡이 발생하게 되어 解를 구할 수 없게 된다든지 또는 誤差가 增加한다든지하는 缺點들이 지적되어 왔다. 이러한 缺點들을 보완하기 위한 연구의 일환으로서 中間支持條件이 존재할 경우 既知의 狀態變數를 消去해 가는, 즉 部分매트릭스의 逐次 reduction의 개념에 근거를 둔 Frontal 傳達매트릭스法이 제시되었다[9].

본 연구에서는 從來의 傳達매트릭스法과 Frontal 傳達매트릭스法에 의한 計算의 安定性과 效率性을 검토하고 또 이 두 방법에 線形內挿法을 적용시켜 解를 추적하는 電算프로그램을 작성하여 각 방법에 의한 解의 收斂特性을 分析하였다.

Table 1. Solutions using two methods under each boundary condition *(rad/s)*

Boundary condition	Theory		Transfer matrix		Frontal method	
	1st	2nd	1st	2nd	1st	2nd
Fixed	22.37	61.67	22.15	61.05	22.15	61.05
Simply supported	9.87	39.48	9.77	39.08	9.77	39.08
Fixed-simply supported	15.42	49.97	15.26	49.46	15.26	49.46
Fixed-free	3.52	22.03	3.55	22.26	3.55	22.26

數値計算

數値計算은 길이 線密度$1m$, $10kg/m$, 굽힘剛性 $10Nm^2$의 보를 대상으로 하였고 전체길이를 50 等分하여 分解된 點에 質量을 集中시켰다. 數値計算의 電算프로그램은 Fortran에 의해 倍精度變數로써 작성하였다. 또한 兩端의 境界條件은 入力데이타로 처리하고 매트릭스 演算초기에 左端의 境界條件을 고려하여 불필요한 演算을 배제시킴으로써 전체적으로 [4×4]×[4×2]의 매트릭스 演算이 되게 하였다. 數値計算에 사용된 計算機는 16비트 IBM-PC AT였다.

結果 및 考察

Table 1은 각 境界條件下에서 두 방법에 의한 2次까지의 解를, Table 2는 一端固定-他端自由의 경우 20次까지의 解를 古典的인 微分方程式에 의한 嚴密解와 비교하여 나타낸 것이다. 각 境界條件下에서 2次까지의 傳達매트릭스法에 의한 解와 Frontal 傳達매트릭스法에 의한 解는 잘 일치하며 嚴密解와는 약간의 차이를 보이고 있다. 또 一端固定-他端自由의 경우 두 방법에 의한 計算結果가 9次까지는 잘 일치하지만 13次이상이되면 傳達매트릭스法에 의한 計算이 불안정해져 解를 구할 수 없게 된다.

Table 3은 一端固定-他端自由의 경우 高次 振動數 領域에서의 두 방법에 의한 施行값과 振動數行列式의 값의 일부를 나타낸 것이다. Frontal 傳達매트릭스法에 의한 振動數行列式의 計算結果는 施行값에 관계없이 指數의 次數가 거의 일정하지만 傳達매트릭스法에 의한 計算結果는 施行값이 커질수록 指數의 次數가 급속히 증가함을 알 수 있다. 이것은 傳達매트릭스法이 매트릭스 곱셈演算인데 비하여, Frontal 傳達매트릭스法은 部分매트릭스의 逐次 reduction인 결과이다. 따라서 傳達매트릭스法에 의한 計算은 施行값이 커

Table 2. Comparison of the solutions using each method under the boundary condition of one end fixed other end free *(rad/s)*

Mode number	Theory	Transfer matrix	Frontal method
1	3.52	3.55	3.55
2	22.03	22.26	22.26
3	61.70	62.35	62.35
4	120.91	122.21	122.21
5	199.85	202.06	202.26
9	713.08	721.51	721.51
10	890.73	901.47	901.42
11	1088.12	1101.94	1101.36
12	1305.26	1336.74	1321.32
13	1542.13	—	1561.29
14	1798.74	—	1821.24
19	3377.87	—	3418.96
20	3752.92	—	3797.40

Table 3. Values of frequency determinats in high frequency region (Fixed-free)

Trial Value(*rad/s*)	Transfer matrix	Frontal method
1000	0.11572856E+14	0.23168859E+01
1200	−0.24676735E+15	0.29265658E+01
1400	−0.21121618E+16	0.61200809E+01
1600	−0.18661791E+18	−0.32971728E+01
1800	−0.95116024E+19	0.64579345E+00
2000	−0.13883481E+23	0.24302620E+01
2200	0.55487806E+23	0.19343126E+02
2400	−0.69645461E+26	0.30762676E−01
2600	0.16773846E+28	0.31379550E+01
2800	0.85108378E+28	−0.64355654E+01
3000	−0.82570601E+30	0.15562826E+01

질수록, 또 分割數가 많아질수록 振動數方程式의 指數項의 次數가 증가하여 誤差가 더욱 커지고 또한 그 結果 計算이 불안정해져 어느 施行값에 이르게 되면 解를 구할 수 없게 된다. 이에 비해 Frontal 傳達매트릭스法에 의한 計算은 振動數方程式의 指數項의 次數에 큰 변화가 없으므로 分割數가 많아져도 計算이 안정되고 解도 비교적 정확히 구할 수 있다.

一端固定-他端自由의 경우 2次까지의 解를 구할 수 있는 施行값과 振動數行列式의 값($\triangle\omega$= 10, 1, 0.1)을 Table 4, 5 및 6에 나타내었다. 傳達매트릭스法에 의한 解는 振動數行列式의 값의 符號가 바뀌는 임의의 두 施行값 사이에 존재하게 되는데 Table 4에서 알 수 있는 바와 같이 施行값의 增分을 10으로 했을 경우 傳達매트릭스法에 의한 計算結果에 의하면 施行값 0과 10사이, 20과 30사이에서 振動數行列式의 값의 符號가 바뀌며 또한 실제로 이 區間내에 解가 존재한다.

Table 4. Values of frequency determinants(Fixed-free, $\triangle\omega$=10)

Trial value(*rad/s*)	Transfer matrix	Frontal method
0	0.10000000E+01	0.10000000E+01
10	−0.53243620E+01	0.10739863E+01
20	−0.50698650E+01	0.80902573E+00
30	0.39583534E+02	0.12746423E+01

Table 5. Values of frequency determinants (Fixed-free, $\triangle\omega$=1)

Trial value(*rad/s*)	Transfer matrix	Frontal method
2	0.67637655E+00	0.96414631E+00
3	0.28038087E+00	0.83523640E+00
4	−0.25826775E+00	0.15837010E+01
5	−0.92361292E+00	0.11821963E+01
21	−0.31500432E+01	0.65685904E+00
22	−0.72586293E+00	0.25142960E+00
23	0.22344024E+01	−0.43834517E+01
24	0.575872205E+01	0.24360728E+01

Table 6. Values of frequency determinants (Fixed-free, $\triangle\omega$=0.1)

Trial value(*rad/s*)	Transfer matrix	Frontal method
3.4	0.81287224E−01	0.53659057E+00
3.5	0.28047743E−01	0.27444171E+00
3.6	−0.26547892E−01	−0.5409046E+00
3.7	−0.82483790E−01	0.47292073E+03
22.1	−0.45444886E+00	0.17015521E+00
22.2	−0.17764089E+00	0.72508847E−01
22.3	0.10459009E+00	−0.47021493E−01
22.4	0.39227275E+00	−0.19673514E+00

그러나 Frontal 傳達매트릭스法에 의한 計算結果는 이 區間내에서 符號가 바뀌지 않는다. 施行값의 增分을 1로 했을 경우, Frontal 전달매트릭스法에 의한 計算結果는 施行값 22와 23사이, 23과 24사이에서 振動數行列式의 값의 符號가 바뀌며, 施行값의 增分을 더 작게하여 0.1로 했을 경우, 3.5와 3.6사이 22.2와 22.3사이에서 振動數行列式의 값의 符號가 바뀌어 비로소 解가 존재하는 區間이 확실하게 나타난다. 즉, 施行값의 增分을 10으로 하면 1, 2次 모두를 구할 수 없고, 1로 하면 2次만을, 0.1이하로 했을 때라야 비로소 1, 2次 모두를 구할 수 있게 된다. 이러한 경향은 高次 振動數 領域에서도 마찬가지이며, 이 점이 Frontal 傳達매트릭스法이 지니는 최대의 결점으로서, 이 방법에 의한 計算은 施行값의 선택에 유의하지 않으면 안된다. 또 Table 4에서 Frontal 傳達매트릭스法에 의한 計算結果에 의하면 施行값 22와 23, 23과 24사이에서 符號가 바뀐다. 線形內挿法을 적용하여 近似解를 추적해 보면, 施行값 22와 23사이에서는 近似解로 收斂하지만 23과 24사이에서는 收斂하지 않는다.

Fig. 1, 2는 각 境界條件에 있어서 두 방법에 의한 施行값-振動數行列式의 값의 plot의 일부를 나타낸 것이다. 傳達매트릭스法에 의한 plot는 境界條件에 관계없이 +에서 -로, -에서 다시 +로 바뀌며 이 區間내에서 連續이다. 그러나 Frontal 傳達매트릭스法에 의한 plot는 전체적으로 不連續이며 連續이 되는 區間내에서만 解가 존재한다. 이러한 擧動은 境界條件에 따라 다르다. 즉, 兩端固定이나 兩端單純支持의 경우는 振動數行列式의 값의 plot가 -에서 +로 바뀌는 區間내에서 連續이고 解가 존재하며 +에서 -로 바뀌는 區間내에서는 不連續이다. 반면, 一端固定-他端單純支持나 一端固定-他端自由의 경우는 振動數行列式의 값의 plot가 +에서 -로 바뀌는 區間내에서 連續으로 解가 존재하며-에서 +로 바뀌는 區間내에서 不連續이다. 이 不連續點을

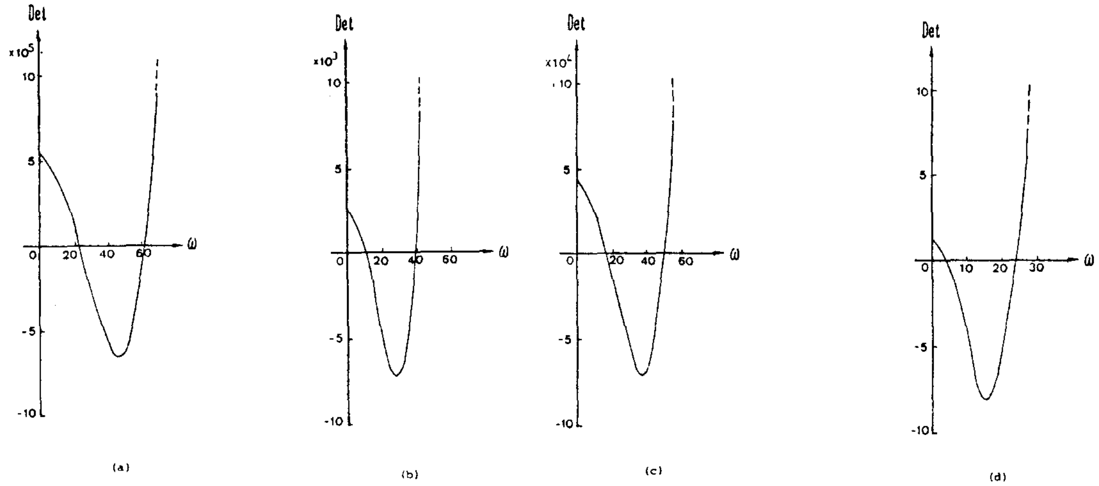

Fig. 1. Trial value-frequency determinant curve using transfer matrix method.
(a) Fixed (b) Simply supported (c) Fixed-simply supported (d) Fixed - free

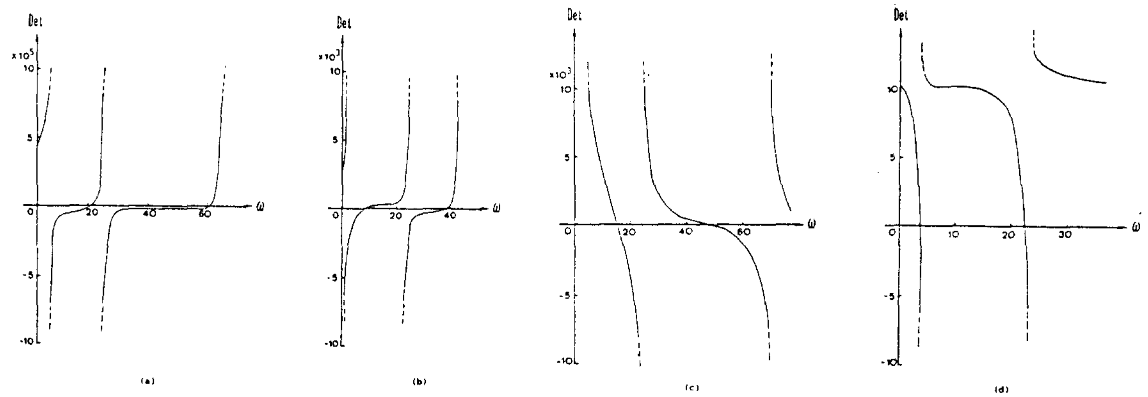

Fig. 2. Trial value-frequency determinant curve using frontal transfer matrix method.
(a) Fixed (b) Simply supported (c) Fixed-simply supported (d) Fixed-free

경계로 plot는 + 혹은 −의 최대값으로 發散해 버리며 다시 새로운 連續區間이 시작되는데, 이것이 Frontal 傳達매트릭스法에 의한 plot의 特性이다. Table 4의 Frontal傳達매트릭스法에 의한 計算結果에 있어서, 施行값 23과 24사이에서 振動數行列式의 값의 符號가 바뀌지만 解가 존재하지 않는 것은 이러한 特性때문이며 이는 部分매트릭스의 reduction과정에 그 원인이 있는 것으로 생각된다. 이점 또한 프로그래밍에 있어서 유의하지 않으면 안 될 사항이다.

한편 傳達매트릭스法에 의한 plot는 近似解 부근에서의 기울기가 Frontal 傳達매트릭스法에 의한 plot에 비해 훨씬 급격한데 이것이 線形內挿法에 의한 近似解의 추적에 있어서의 反復回數에 관계한다. 즉, 近似解 부근의 임의의 區間을 線形內挿法에 의한 近似解의 추적區間으로 선택했을 때, 그 收斂速度는 傳達매트릭스法이 Frontal 傳達매트릭스法에 비해 훨씬 빠르다. 그 結果를 Table 7에 나타내었다. 一端固定-他端單純支持의 경우는 동일한 反復回數를 보이고 있으나, 그 밖의 境界條件下에서는 Frontal 傳達매트릭스法이 傳達매트릭스法에 비해 훨씬 많은 反復回數를 보이고 있다. 따라서, 近似解를 구하는데 소요되는 시간도 Frontal 傳達매트릭스法이 수 배나 더

Table 7. Number of iteration by the false-position method Convergence criterion ; $|\omega_n - \omega_{n-1}| \leq 0.00001$

Boundary condition	Mode number	Interval (rad/s)	Number of iteration	
			Transfer matrix	Frontal method
Fixed	1	22.1-22.2	2	11
	2	61-62	4	more than 20
Simply supported	1	9-10	4	more than 20
	2	39-40	6	more than 20
Fixed-simply supported	1	15-16	4	4
	2	49-50	4	4
Fixed-free	1	3.5-3.6	3	9
	2	22-23	5	more than 20

많고, 施行값 선택의 제한이나 한 施行값에 대한 매트릭스 演算시간까지 고려한다면 Frontal 傳達매트릭스法이 훨씬 非効率的이고 非經濟的이라는 것을 알 수 있다.

要 約

從來의 傳達매트릭스法과 Frontal 傳達매트릭스法에 있어서의 計算의 安定性과 効率性을 검토하고 또 이 두 방법에 線形內挿法을 적용하여 각 방법에 의한 解의 收斂特性을 分析한 結果를 요약하면 다음과 같다.

1. 施行값이 작을 경우 두 방법에 의한 計算의 安定性이나 正確性의 면에서 전혀 차이가 없으나, 施行값이 커질수록 傳達매트릭스法에 의한 計算의 誤差가 증대해지고, 어느 施行값 이상이 되면 計算이 불안정해 진다.

2. Frontal 傳達매트릭스法은 施行값의 선택에 큰 제약을 받으며, 적절한 施行값을 선택하지 못했을 경우, 원하는 解를 구할 수 없다.

3. Frontal 傳達매트릭스法에 의한 施行값－振動數行列式의 값의 plot에 있어서는 不連續點이 존재하고, 이 不連續點을 경계로 plot는 ＋ 혹은 －의 최대값으로 發散하며 다시 새로운 連續區間이 시작된다. 兩端의 境界條件이 같을 경우에는 ＋에서 －로 바뀌는 連續區間내에, 兩端의 境界條件이 다를 경우에는 -에서 ＋로 바뀌는 連續區間내에 解가 존재한다.

4. 線形內挿法을 적용할 때 近似解로의 收斂에 필요한 反復回數는 Frontal 傳達매트릭스法이 훨씬 많으며 한 施行값에 대한 計算時間도 더 많이 필요하므로 近似解를 구하는 전체적인 計算時間은 傳達매트릭스法에 비해 훨씬 더 많이 소요된다.

5. Frontal 傳達매트릭스法에 의한 計算은 境界條件이나 中間條件에 따라 매트릭스 要素를 既知와 未知로 재배치해야 하고 또는 施行값의 선택이나 不連續區間의 판별 등 많은 제약이 따르므로 프로그램의 작성과 그 실행이 傳達매트릭스法에 비해 훨씬 번거롭다.

參考文獻

1) Pestel, E. C. and F. A. Leckie(1963): Matrix method in elastomechanics. McGraw-Hill Book Company.

2) Thomson, W, J.(1984): Theory of vibration with applications. Prentice Hall, Englewood Cliffs., 313-328.

3) Tse, F. S., Mose, I. E. and R. T. Hinkle(1978): Mechanical vibrations. 2nd ed. Allyn and Bacon, Inc., 202-214.

4) Kreyszig, E.(1979): Advanced engineering mathematics. 4th ed. John Wiley and Sons, 765-766.

5) 飯田善夕外(1988) : FORTRANによる數值計算ハンドブック, オーム社, 446-449.

6) Dawson, B. and M. Davis(1974) : An improved transfer matrix method procedure. International Journal for Numerical Method in Engineering, 8, 111-117.

7) Sankar, S.(1974) : On the torsional vibration of branched systems using transfer matrix method. ASME, 101, 546-553.
8) 金永植(1983) : 分布質量系의 固有振動數 解析에 관한 硏究. 釜山水產大學碩士學位論文.
9) 岡田養二, W. D. Pilkey, and 王波平(1985) : フロンタル傳達マトリクス法(傳達マトリクスの効率的な解法とリアナリシス). 日本機械學會論文集 51(469), 2276 — 2282.