J. Astron. Space Sci., Vol.7, No. 1, 11-21(1990)

정지위성 궤도의 평균 궤도 요소 - Ⅱ

-궤도 경사각, 승교점 경도, 위성 경도-

최규홍 · 박종욱 · 문인상 · 배성구
연세대학교 천문대기과학과
(1990년 2월 28일 접수 ; 1990년 5월 1일 수리)

MEAN ORBITAL ELEMENTS FOR GEOSYNCHRONOUS ORBIT - Ⅱ

-Orbital inclination, longitude of ascending node, mean longitude-

Kyu-Hong Choi, Jong-Uk Park, In-Sang Moon and Sung-Koo Bae
Dept. of Astronomy and Atmospheric Sciences, Yonsei University, Seoul 120-749
(Received February 28, 1990; Accepted May 1, 1990)

Abstract

The osculating orbital elements include the mean, secular, long period, and short period terms. The iterative algorithm used for conversion of osculating orbital elements to mean orbital elements is described. The mean orbital elements of W_c, W_s, and L are obtained.

요 약

접융궤도 요소는 평균 궤도 요소, 영년 섭동, 단주기, 장주기항이 포함되어 있다. 접융궤도 요소로부터 평균 궤도 요소로 변환시키는 알고리즘을 기술하였고, 평균 궤도 요소 W_c, W_s, L도 얻었다.

1. 서 론

정지위성 궤도의 궤도 요소에 관해서 Choi *et al.*(1986, 1987)은 영년 변화와 장주기 섭동만 연구하였고, station keeping용이기 때문에 태양과 달의 영향 중에서 아주 큰 장주기 섭동항은 영년 변화로 취급하였다. 단주기 섭동을 고려하지 않아서 평균 궤도 요소를 얻을 수 없었다.

Musen *et al.*(1961), Kamel *et al.*(1973), Kamel and Tibbitts(1973), Richardson(1976), Lane (1989) 등은 정지위성 궤도에 대한 달과 태양의 섭동에 대한 기본적인 이론만 제시하였기 때문에 실제 평균 궤도 요소를 구하려면 어려움이 많았다. Choi *et al.*(1989)은 궤도의 장반경, 이심률, 근지점 경도에 관한 평균 궤도 요소를 연구했었다.

본 연구에서는 컴퓨터에 의한 algebraic manipulation(Dasenbrock 1973, 1982)으로 섭동함수를 급수 전개시켜 위성 궤도의 경사각, 승교점 경도, 위성 경도에 대한 영년 변화, 단주기 섭동항, 장주기 섭동항을 구하고 평균 궤도 요소에 응용하여 보겠다.

2. 궤도 경사각(i)과 승교점 경도(Ω)의 평균 궤도 요소

지구 중심을 원점으로 하는 관성계를 생각하자. X-축은 춘분점 방향이고, Z-축은 지구의 자전축의 방향이고, Y-축은 적도면 상의 춘분점과 직각인 방향일 때, 정지위성 궤도에 대한 각운동량을 X, Y의 위상 평면에 도시하면 $X=W_s=\sin i \sin\Omega$이고, $Y=-W_c=-\sin i \cos\Omega$가 된다.

Choi *et al.*(1987)에 표시된 섭동방정식을 컴퓨터에 의한 *algebraic manipulation*(Dasenbrock *1973, 1982*)으로 모든 섭동항을 구하였다.

W_c와 W_s에 대한 영년 변화는

$$(W_c)_{secular} = -0.6359\times10^{-5}\sin(LM-FM)+0.061\times10^{-5}\sin(2LM-2FM) +0.0021\times10^{-5}\sin(2LM-2MM) \quad (t/day) \cdots\cdots (1)$$

$$(W_s)_{secular} = 4.1074\times10^{-5}+0.4667\times10^{-5}\cos(LM-FM) -0.0019\times10^{-5}\cos(2LM-2MM) \quad (t/day) \cdots\cdots (2)$$

여기서 LM은 달의 평균 황경이고, FM은 달의 평균 위도 인수이고, MM은 달의 평균 근점

이각이다. W_c와 W_s의 영년 섭동항은 달의 중력에 의한 섭동력의 영향을 받는다.

W_c와 W_s에 큰 영향을 미치는 단주기 섭동항은 달과 태양의 섭동력 때문에 생기게 된다. 달의 섭동에 의한 단주기항의 $P_2(\cos\theta)$는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}(W_c)_{SP-RM2} = \; & 0.2381\times10^{-5}\cos(2L-2LM)\\ & -0.2220\times10^{-5}\cos(2L)\\ & +0.0465\times10^{-5}\cos(2L-2LM-MM)\\ & +0.0450\times10^{-5}\cos(2L-LM-FM)\\ & -0.0433\times10^{-5}\cos(2L-LM+FM)\\ & -0.0182\times10^{-5}\cos(2L-MM) \quad \cdots\cdots (3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(W_s)_{SP-RM2} = \; & 0.2381\times10^{-5}\sin(2L-2LM)-0.2204\times10^{-5}\sin(2L)\\ & +0.0465\times10^{-5}\sin(2L-2LM-MM)\\ & +0.0450\times10^{-5}\sin(2L-LM-FM)\\ & +0.0433\times10^{-5}\sin(2L-LM+FM)\\ & -0.0182\times10^{-5}\sin(2L-MM) \quad \cdots\cdots (4)\end{aligned}$$

여기서 L은 위성의 평균 경도이다.

달 섭동에 의한 단주기항의 $P_3(\cos\theta)$는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}(W_c)_{SP-RM3} = \; & 0.0733\times10^{-5}\cos(L-3LM)\\ & -0.0651\times10^{-5}\cos(L+LM) \quad \cdots\cdots (5)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(W_s)_{SP-RM3} = \; & 0.1218\times10^{-5}\sin(L-LM)\\ & -0.0617\times10^{-5}\sin(L-3LM)\\ & -0.0553\times10^{-5}\sin(L+LM) \quad \cdots\cdots (6)\end{aligned}$$

태양의 섭동에 의한 단주기항의 $P_2(\cos\theta)$는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}(W_c)_{SP-RS2} = \; & 0.1069\times10^{-5}\cos(2L-2LH)\\ & -0.1020\times10^{-5}\cos(2L) \quad \cdots\cdots (7)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(W_s)_{SP-RS2} = \; & 0.1069\times10^{-5}\sin(2L-2LH)\\ & +0.1020\times10^{-5}\sin(2L) \quad \cdots\cdots (8)\end{aligned}$$

여기서 LH는 태양의 평균 황경이다.

결국, 태양의 단주기 섭동항은 다음과 같다.

$$(W_c)_{SP}=(W_c)_{SP-RM2}+(W_c)_{SP-RM3}+(W_c)_{SP-RS2} \quad \cdots\cdots (9)$$

$$(W_s)_{SP}=(W_s)_{SP-RM2}+(W_s)_{SP-RM3}+(W_s)_{SP-RS2} \quad \cdots\cdots (10)$$

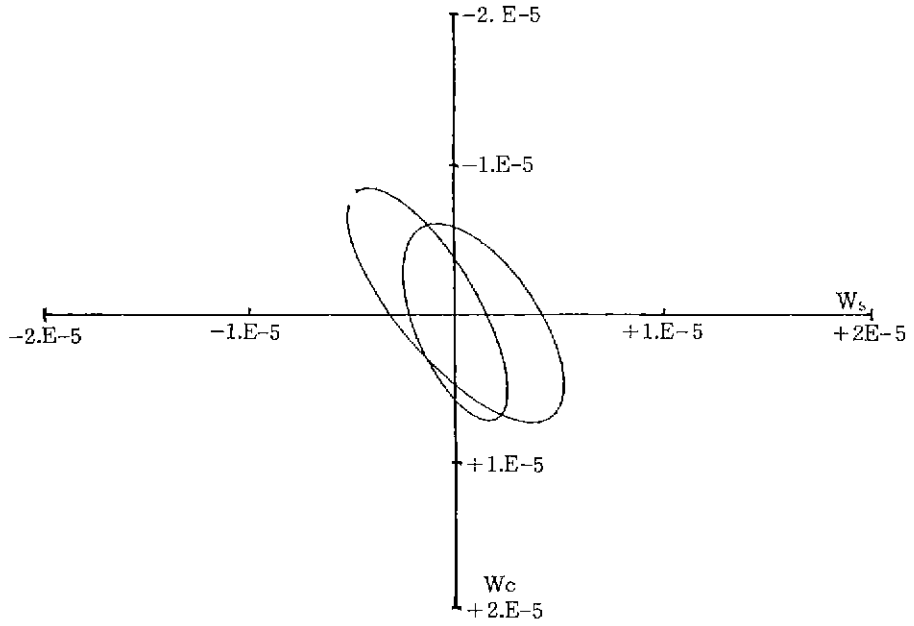

그림 1. W_c-W_s 위상 평면에서 2일간의 단주기 섭동변화.

그림 1은 24시간 동안에 발생하는 달과 태양의 단주기 섭동의 변화량을 W_c와 W_s 위상 평면상에서 보여 주고 있다. 이 단주기 섭동량은 12시간 주기로 궤도의 경사각을 $\pm 0°.0006$ 만큼 변화시킨다.

W_c와 W_s의 장주기 섭동항은 태양과 달의 중력에 의한 섭동 때문이다. 달의 섭동에 의한 장주기항의 $P_2(\cos\theta)$는 다음과 같다.

$$(W_c)_{LP-RM2}=-6.5510\times10^{-5}\cos(2LM)$$
$$-1.3576\times10^{-5}\cos(LM+FM)$$

$$
\begin{aligned}
&-0.8398\times10^{-5}\cos(2LM+MM)\\
&+0.5951\times10^{-5}\cos(LM+FM-2D)\\
&+0.3733\times10^{-5}\cos(2LM-MM)\\
&+0.2267\times10^{-5}\cos(LM+MM-FM)\\
&-0.1738\times10^{-5}\cos(LM+MM+FM)\\
&-0.1685\times10^{-5}\cos(2LM-MM+2D) \quad \cdots\cdots (11)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(W_s)_{1P-RM2}= &-6.0099\times10^{-5}\sin(2LM)\\
&-1.0111\times10^{-5}\sin(LM+FM)\\
&+0.4412\times10^{-5}\sin(LM+FM-2D)\\
&+0.3425\times10^{-5}\sin(2LM-MM)\\
&-0.1546\times10^{-5}\sin(2LM-MM+2D)\\
&-0.1294\times10^{-5}\sin(LM+MM+FM) \quad \cdots\cdots (12)
\end{aligned}
$$

여기서 D는 태양과 달 간의 평균 이각이다.
달의 섭동에 의한 장주기항의 $P_3(\cos\theta)$는 없고 , $P_4(\cos\theta)$는 다음과 같다.

$$(W_c)_{1P-RM4}=-0.1174\times10^{-5}\cos(2LM) \quad \cdots\cdots (13)$$

$$(W_s)_{1P-RM4}\simeq 0 \quad \cdots\cdots (14)$$

태양의 섭동에 대한 장주기항의 $P_2(\cos\theta)$는 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
(W_c)_{1P-RS2}= &-40.3437\times10^{-5}\cos(2LH)\\
&-1.5781\times10^{-5}\cos(2LH+MH)\\
&+0.6691\times10^{-5}\cos(2LH-MH) \quad \cdots\cdots (15)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(W_s)_{1P-RS2}= &-36.9750\times10^{-5}\sin(2LH)\\
&-1.4468\times10^{-5}\sin(2LH+MH)\\
&+0.6125\times10^{-5}\sin(2LH-MH) \quad \cdots\cdots (16)
\end{aligned}
$$

여기서 MH는 태양 평균 근점 이각이다.
결국, 달과 태양의 장주기 섭동항은 다음과 같다.

$$(W_c)_{1P}=(W_c)_{1P-RM2}+(W_c)_{1P-RM4}+(W_c)_{1P-RS2} \quad \cdots\cdots (17)$$

$$(W_s)_{1P}=(W_s)_{1P-RM2}+(W_s)_{1P-RM4}+(W_s)_{1P-RS2} \quad \cdots\cdots (18)$$

달과 태양의 장주기 섭동량은 주기 6개월로 궤도 경사각을 ±0°.035 범위로 변화시킨다. 접융 궤도 요소$(W_c)_{os}$ 혹은 $(W_s)_{os}$에서 영년 섭동항과 단주기, 장주기 섭동항을 빼면 평균 궤도 요소 $(\overline{W_c})$ 혹은 $(\overline{W_s})$를 얻을 수 있다. 즉,

$$(W_c)_{os}=(\overline{W_c})+(W_c)_{secular}\times t+(W_c)_{SP}+(W_c)_{1P} \quad \cdots\cdots (19)$$

$$(W_s)_{os}=(\overline{W_s})+(W_s)_{secular}\times t+(W_s)_{SP}+(W_s)_{1P} \quad \cdots\cdots (20)$$

3. 위성 경도(L)의 평균 궤도 요소

위성 위치를 경도(L)로 나타내기 위해서는 위성의 평균 적경(λ)을 알아야 한다. 즉,

$$L=\lambda-(S.T.)_{Greenwich} \quad \cdots\cdots (21)$$

이다. 여기서 $(S.T.)_{Greenwich}$는 시각 t에서의 Greenwich의 평균 항성시이다. 지구는 1항성일 동안에 한 바퀴 자전하므로 춘분점과 Greenwich와의 사이각을 알아야 위성의 경도(L)를 쉽게 구할 수 있다.

위성 경도의 가속도(λ_2)는 지구 중력의 tesseral 섭동 영향 때문이다. 즉,

$$\lambda_2= 0.066\times10^{-5}\sin(L_o+171°.4)+1.487\times10^{-5}\sin 2(L_o+14°.92)$$
$$+0.206\times10^{-5}\sin 3(L_o-21°.07) \qquad (rad/day^2) \quad \cdots\cdots (22)$$

이고, L_o는 위성의 초기 위치를 나타낸다.

Choi *et al.*(1986)에서는 위성 경도의 가속도에 대한 태양 중력의 영향에 관한 섭동항이 포함되었지만 여기서는 생략하였다. 그 이유는 태양 중력의 섭동항은 6개월 주기로 변하는 섭동항이므로 1년 이상의 섭동항 계산에는 6개월 주기로 변하는 장주기 섭동항에 포함시켜야 하기 때문이다.

MEAN ORBITAL ELEMENTS

위성 경도에 영향을 미치는 단주기 섭동항은 달과 태양의 섭동력 때문에 생기게 된다. 달의 섭동에 의한 단주기항의 $P_2(\cos\theta)$는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}(L)_{SP-RM2} = \; & 4.0885\times10^{-5}\sin(2L-2LM)\\ & +0.8040\times10^{-5}\sin(2L-2LM-MM)\\ & +0.3336\times10^{-5}\sin(2L)\\ & +0.1534\times10^{-5}\sin(2L-2LM+MM-2D)\\ & -0.1525\times10^{-5}\sin(2L-LM-FM)\\ & +0.1445\times10^{-5}\sin(2L-LM+FM)\\ & +0.1319\times10^{-5}\sin(2L-2LM-2D)\\ & -0.1135\times10^{-5}\sin(2L-2LM+MM)\\ & +0.1098\times10^{-5}\sin(2L-2LM-2MM) \quad \cdots\cdots (23)\end{aligned}$$

달의 섭동에 의한 단주기항의 $P_3(\cos\theta)$는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}(L)_{SP-RM3} = \; & 0.3406\times10^{-5}\sin(L-LM)\\ & +0.3045\times10^{-5}\sin(3L-3LM)\\ & +0.1312\times10^{-5}\sin(L-3LM)\\ & +0.1201\times10^{-5}\sin(L+LM) \quad \cdots\cdots (24)\end{aligned}$$

태양의 섭동에 의한 단주기항의 $P_2(\cos\theta)$는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}(L)_{SP-RS2} = \; & 1.8045\times10^{-5}\sin(2L-2LH)\\ & +0.1549\times10^{-5}\sin(2L)\\ & +0.1058\times10^{-5}\sin(2L-2LH-MH) \quad \cdots\cdots (25)\end{aligned}$$

결국, 달과 태양의 단주기 섭동항은 다음과 같다.

$$(L)_{SP}=(L)_{SP-RM2}+(L)_{SP-RM3}+(L)_{SP-RS2} \quad \cdots\cdots (26)$$

그림 2는 달과 태양의 단주기 섭동의 경도 변화에 대한 2일간의 변화량을 보여 주고 있다. 이 단주기 섭동량은 12시간 주기로 경도를 ±0°.005 범위로 변화시킨다.

위성 경도(L)의 장주기 섭동항은 달과 태양의 중력에 의한 섭동 때문이다. 달의 섭동에 의한 장주기항의 $P_2(\cos\theta)$는 다음과 같다.

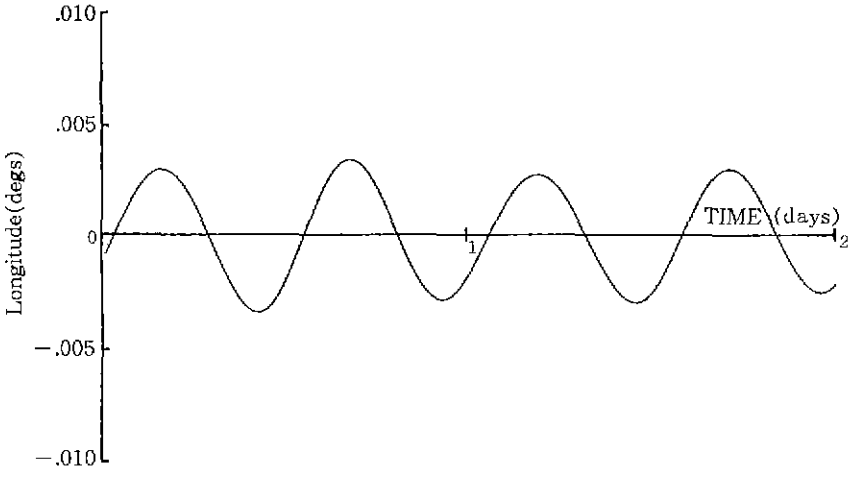

그림 2. 달과 태양의 단주기 섭동의 경도 변화에 대한 2일간의 변화량.

$$
\begin{aligned}
(L)_{1P-RM2} = \; & 5.2139\times10^{-5}\sin(2LM) \\
& +2.1612\times10^{-5}\sin(LM+FM) \\
& -0.9533\times10^{-5}\sin(LM+FM-2D) \\
& +0.6681\times10^{-5}\sin(2LM+MM) \\
& -0.3587\times10^{-5}\sin(LM+MM-FM) \\
& +0.2766\times10^{-5}\sin(LM+MM+FM) \\
& +0.1338\times10^{-5}\sin(2LM-MM+2D) \\
& -0.1309\times10^{-5}\sin(LM-MM-FM+2D) \\
& -0.1204\times10^{-5}\sin(LM-MM+FM) \qquad \cdots\cdots (27)
\end{aligned}
$$

달의 섭동에 의한 장주기항의 $P_4(\cos\theta)$는 다음과 같다.

$$
(L)_{1P-RM4} = \; 0.1869\times10^{-5}\sin(2LM) \qquad \cdots\cdots (28)
$$

태양 섭동에 의한 장주기항의 $P_2(\cos\theta)$는 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
(L)_{1P-RS2} = \; & 32.3768\times10^{-5}\sin(2LH) \\
& +1.2627\times10^{-5}\sin(2LH+MH)
\end{aligned}
$$

$$-0.5417\times10^{-5}\sin(2LH-MH) \quad \cdots\cdots (29)$$

여기서 $32.3768\times10^{-5}\sin(2LH)$는 6개월 주기를 가진 섭동항으로서 Choi *et al.*(1986)은 경도 변화의 가속도에 포함시켰지만 평균 궤도 요소 계산에서는 장주기 섭동항으로 취급하여야 한다.

결국, 달과 태양의 장주기 섭동항은 다음과 같다.

$$(L)_{1P}=(L)_{1P-RM2}+(L)_{1P-RM4}+(L)_{1P-RS2} \quad \cdots\cdots (30)$$

달과 태양의 장주기 섭동은 주기가 6개월로 경도 변화 ±0°.019를 발생시킨다. 접융궤도 요소 L_{os}에서 위성 경도의 가속도항과 표류율항, 단주기와 장주기 섭동항을 빼면 평균 궤도 요소 $\overline{L}$를 얻을 수 있다. 즉,

$$L_{os}=\overline{L}+\lambda_2t^2+D_0t+(L)_{sp}+(L)_{1P}+2e\sin M \quad \cdots\cdots (31)$$

여기서 D_0는 위성의 경도상에서 위성 표류율(°/day)이고, e는 궤도의 이심률, M은 평균 근점 이각이다.

2e sinM은 진근점 이각과 평균 근점 이각과의 차이에서 나오는 단주기 섭동이다. 정지위성의 경우 $e\sim10^{-4}$이기 때문에 ±0°.012 정도의 단주기 섭동이 하루의 주기로 변하게 된다.

4. 평균 궤도 요소

평균 궤도 요소는 접융궤도 요소로부터 얻을 수 있는데, Cain(1962)과 Walter(1967)는 Newton-Raphson 방법을 사용하여 접융궤도 요소로부터 평균 궤도 요소를 계산하는 방법을 다음과 같이 제안하였다.

$$X_i^{(s+1)}=X_i^s+(Y_i^o-Y_i^s) \quad \cdots\cdots (32)$$

초기의 접융궤도 요소 Y_i^o는 추적 안테나의 위성 추적으로부터 얻어지는 궤도 요소의 값 $(W_c)_{os}$, $(W_s)_{os}$, $(L)_{os}$이다 X_i^s는 s번째의 평균 궤도 요소 X_i의 값이다. (19), (20), (21)식으로부터 궤도 요소별로 영년 섭동과 단, 장주기 섭동을 구한 후 이를 X_i^s에 더하면 s번째의 접융궤도 요소 Y_i^s가 된다. 이것을 (32)식에 대입하면 세번째의 평균 궤도 요소 $X_i^{(s+1)}$를 계산하

고, 다시 이것을 X_1'로 가정하여 위의 과정을 되풀이 한다. 요구하는 정밀도까지 평균 궤도 요소를 얻을 수 있게 된다.

5. 결 론

위성 궤도의 경사각(i)과 승교점 경도(Ω)의 평균 궤도 요소는

1) 영년 섭동은 달의 중력에 의한 섭동력의 영향을 받는다.
2) 단주기 섭동은 달과 태양의 중력에 의한 섭동력을 받아 궤도 경사각을 진폭 0°.0006와 주기 12시간으로 변화시킨다.
3) 장주기 섭동은 달과 태양의 중력에 의한 섭동력을 받아 궤도 경사각을 진폭 0°.035와 주기 6개월로 변화시킨다.

위성 경도(L)의 평균 궤도 요소는

1) 영년 섭동은 오직 지구 중력의 *tesseral*섭동의 영향 때문이다.
2) 단주기 섭동은 달과 태양의 중력에 의한 섭동력을 받아 위성 경도를 진폭 0°.005와 주기 12시간으로 변화시킨다. 진근점 이각과 평균 근점 이각과의 차이에서 오는 $2e \sin M$은 위성 경도를 진폭 0°.012와 주기 24시간으로 변화시킨다.
3) 장주기 섭동은 달과 태양의 중력에 의한 섭동력을 받아 위성 경도를 진폭 0°.019와 주기 6개월로 변화시킨다.

감사의 말씀

이 연구는 1988년 전반기 과학재단 일반 연구비의 지원으로 이루어졌으며 한국과학재단에 대하여 깊은 감사를 드립니다.

참고문헌

Cain, B. J. 1962, *Astron. J.*, **67**, 391.

Choi, K. H., Lee, J. S., Park, J. U., and Moon, I .S. 1989, 한국우주과학회지, **6**, 91.

Choi, K. H., Park, J. W., and Kim, K. M. 1987, 한국우주과학회지 **4**, 25.

Choi, K. H., Park, J. W., Lee, B. S., Jo, J. H., and Lee, Y. S. 1986, 한국우주과학회지, **3**, 93.

Dasenbrock, R. R. 1973, *NRL Report 7564*(NRL:Washington, D. C.), pp. 1-67.

——————— 1982, *NRL Report 8611*(MRL:Washington, D. C.), pp.1-71.

Kamel, A., Ekman, D., and Tibbitts, R. 1973, *Celest. Mech.*, **8**, 129.

Kamel, A., and Tibbitts, R. 1973, *Celest. Mech.*. **8**, 45.

Lane, M. T. 1989, *Celest. Mech.*, **46**, 287.

Musen, P., Bailie, P.. and Upton, E. 1961, NASA TND-494

Richardson, D. L. 1976, AIAA Paper 76-826, San Diego meeting.

Walter, H. G. 1967, *Astron. J.*, **72**, 994.