

## 전달 매트릭스법에 의한 다지점지지계의 연성강제감쇠 횡진동 계산에 관한 연구

이돈출\* · 박병학\*\* · 전효중\*\*\*

### A Study on the Coupled Forced Lateral Vibration of Multi-Supported Shafting by the Transfer Matrix Method

D.C. Lee, B.H. Park, H.J. Jeon

#### Abstract

The natural frequency of lateral vibration for ship's propulsion shafting tends to become lower as the relative stiffness of supported system of the propulsion shafting decreases and the weight of shafting increases. Especially, the propulsion shaftings of high-power ships such as car ferries, roll-on/roll-off, and container ships are susceptible to lateral vibration for their resonant speeds are happened to be in ordinary operating speed ranges.

So far, many papers on the lateral vibration of ship's propulsion shaftings are published but they treated mainly special cases and not explained explicitly the calculation process.

In this paper, the calculation processes of undamped and also forced damped lateral vibration by the transfer matrix method are presented and the calculation programs are developed.

With the developed computer programs, a ship's propulsion shafting which was introduced on the published paper is analyzed for its lateral vibration and also the lateral vibration of the main drive shaft for a lathe is calculated to show the availability of developed computer programs.

#### 1. 서 론

선박의 대형화, 고속화에 따라 선박추진마력

이 증가하는 한편 기관의 열효율향상을 위한  
장행정화, 추진효율향상을 위한 저속화등으로  
추진축계는 지름이 증대하고 프로펠러중량도  
증가하였으며 상대적으로 이것을 지지하고있는

\* 정회원, 현대중공업(주)

\*\* 정회원, 여수수대

\*\*\* 정회원, 한국해양대

지지축대나 신체의 강도는 저하하고있다.

특히, 카·페리, 롤온·롤오프션 및 고속콘테이너선등에서는 출력에 비하여 홀수, 프로펠러의 크기등에 제한을 받기 때문에 추진축계를 둘이상으로하는 경우가 늘어나고있다. 이러한 다축선에서는 좌우현의 프로펠러축이 붓싱이나 브라켓·베어링으로 지지되는데 붓싱이나 브라켓은 그의 지지강성이 일축선의 지지대에 비하여 낮게된다. 더욱이 대형고속선에서는 프로펠러날개수를 5~6매로하는 경우가 많다. 이러한 경우 추진축계횡진동의 고유진동수가 저하하고 프로펠러의 수력작용으로 인하여 유발되는 횡진동기진력에 의하여 익수차(프로펠러날개수의 배수에 해당하는 차수)의 공진이 기관사용범위 내에서 발생할 가능성이 있게된다. 따라서 과거에는 해군함정등에서나 문제시되던 추진축계 횡진동에 의한 장애를 상선에서도 심각하게 고려해야될 상황에 처하고있다.

추진축계횡진동은 선미관베어링과 선수축 시일장치의 손상을 유발시킬뿐만아니라 선체진동의 원인이 되기도하므로 추진축계의 설계단계에서 비틀림진동, 중진동등과 함께 검토해야될 사항으로 간주되고있다.

필자들은 그동안 선박추진축계를 다지점지지계로 보고 유한요소법에 의하여 그의 횡자유진동을 해석한바있으나 유한요소법에 의한 경우 프로펠러나 플라이휠등의 자이로효과 및 지지베어링의 유막강성등을 합리적으로 반영할수 없었다. 따라서 본 연구에서는 이러한 사항들

의 도입이 용이하고 감쇠나 기진력도 효과적으로 처리될수 있어 감쇄강제진동의 계산을 비교적 쉽게 수행할수 있는 전달매트릭스법에 의한 다지점지지축의 횡진동해석을 검토하고자한다.

또한, 본연구에서 개발된 횡진동계산프로그램을 이용하여 선반주축의 횡진동계산문제에 대하여서도 고찰하고자한다.

## 2. 전달매트릭스법

### 2.1 전달매트릭스계산을 위한 수학적 모델

본 연구에서는 대표적으로 단일축계의 경우에 대하여 다루고저한다. 지금 그림 2.1(a)와 같은 추진축계에서 좌표계를 축계중심의 선수축으로 x축, 좌우현의 좌현축으로 y축, 상하의 상방향으로 z축을 설정한다. 축을 임의의 단면으로 분할하고 그의 분할된 축을 탄성축(1), 집중질량(m), 회전원판(M, I<sub>p</sub>, I<sub>d</sub>), 스프링(k<sub>yy</sub>, ...) 및 감쇠(C<sub>yy</sub>, ...)등의 각요소로 구성되는 기본요소로 치환하면 그림 2.1(b)와 같은 횡진동계 모델로 된다. 지금 u, v는 y, z축방향의 변위, ψ, φ는 y, z축둘레의 변위각, M<sub>y</sub>, M<sub>z</sub>는 y, z축둘레의 굽힘모멘트, V<sub>y</sub>, V<sub>z</sub>는 y, z축방향의 전단력을 나타낸다고 하면 임의의 분할점 i의 상태벡터 Z<sub>i</sub>를 다음과 같이 9개의 값을 배치한 열벡터로서 정의할 수 있다.

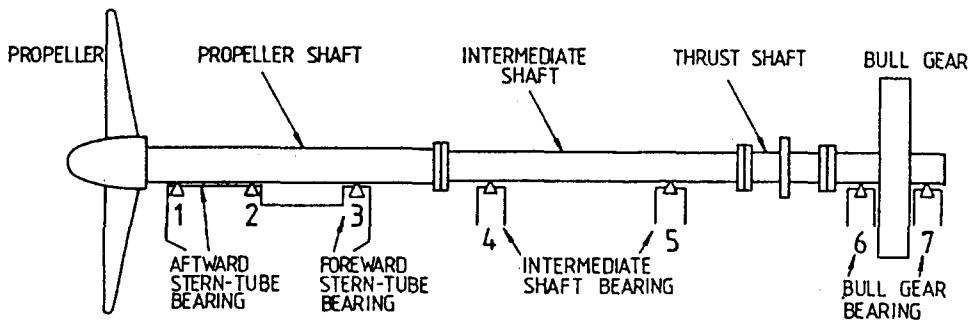


Fig. 2.1 (a) Skelton diagram of propulsion shafting for turbine ship

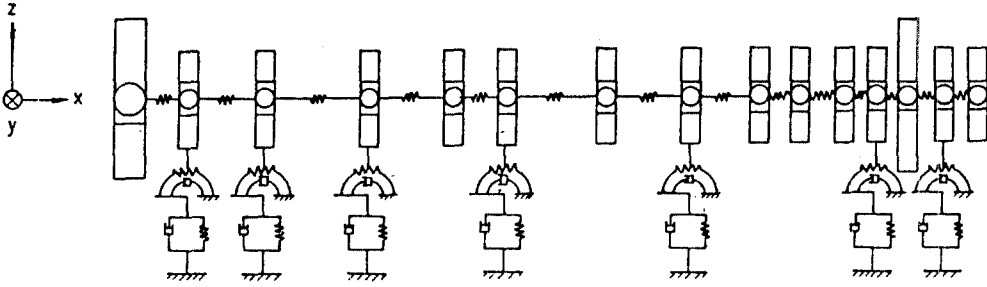


Fig. 2.1 (b) Mathematical model of propulsion shafting for turbine ship

$$Z_{(xi)} = [u, \varphi, M_z, -V_y, -V, \psi, M_y, V_z, 1]^T \quad (1)$$

다만, 여기서 1은 강제항을 나타내며 T는 전치매트릭스를 나타낸다. 각 요소의 좌단의 상태량은 요소의 정적 및 동적인 특성에 의하여 우단의 상태량으로서 전달되는데 선형계에서는 다음의 관계식으로 표시할수 있다.

$$\begin{bmatrix} \text{우단의} \\ \text{상태} \\ \text{벡터} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{전달매트릭스} \\ \text{(요소의 특성을} \\ \text{나타내는 매트릭스)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{좌단의} \\ \text{상태} \\ \text{매트릭스} \end{bmatrix} \quad (2)$$

이 경우에 요소의 특성을 나타내는 매트릭스를 전달매트릭스라 한다. 지금 i번째 요소의 전달매트릭스를  $T_i$ , 요소의 좌단 및 우단의 상태량벡터를 각각  $Z_i^L, Z_i^R$ 로 나타내면 (i+1)번째의 요소는  $T_{i+1}, Z_{i+1}^L, Z_{i+1}^R$ 로 표시되고  $Z_i^R = Z_{i+1}^L$ 이기 때문에

$$Z_{i+1}^R = T_{i+1} Z_{i+1}^L = T_{i+1} Z_i^R = T_{i+1} T_i Z_i^L \quad (3)$$

로 된다. 따라서 요소가 n개있을 경우에는 이 관계를 반복함으로써 다음의 관계를 얻게되며 여기서 T가 전달매트릭스이고 9행9열의 매트릭스로 된다.

$$Z_n^R = T_n T_{n-1} \cdots T_1 Z_1^L \quad (4)$$

$$Z_n^R = T Z_1^L \quad (5)$$

위와같이 탄성계양단의 상태량을 각요소의 전달매트릭스를 이용하여 결부시킬수 있다. 양

단의 상태량은 모두 미지수인 것은 아니며 양단에 있어서의 경계조건에 따라 상태량의 일부는 0으로 규정된다.

추진축계의 횡진동해석에 있어 만약 우단(기관축)을 고정단이라 생각하면 이 부분에서의 경계조건은  $u = \varphi = -\psi = v = 0$ 이다. 따라서 고정단에 있어서의 상태량은  $[0, 0, M_z, -V_y, 0, 0, M_y, V_z, 1]^R$ 로 표시할수 있다. 한편 프로펠러를 원판요소로 치환하고 요소의 좌단을 자유단이라 생각하면 상태량은  $[u, \varphi, 0, 0, -v, \psi, 0, 0, 1]^L$ 로 표시할수 있다.

따라서 (5)식의 T에 상당하는 식은 (6)식과 같이 된다.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ M_z \\ -V_y \\ 0 \\ 0 \\ M_y \\ V_z \\ 1 \end{bmatrix}_n^R = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & \cdots & T_{19} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} & \cdots & T_{29} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ T_{81} & \cdots & \cdots & \cdots & T_{89} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \varphi \\ 0 \\ 0 \\ -v \\ \psi \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_1^L \quad (6)$$

### 2.2 각요소의 전달매트릭스

#### (1) 축요소의 전달매트릭스

기본요소의 전달매트릭스로서 Fig. 2.2와 같은 축요소의 전달매트릭스를 생각한다.

지금 각 기본요소의 전달매트릭스가 불평형

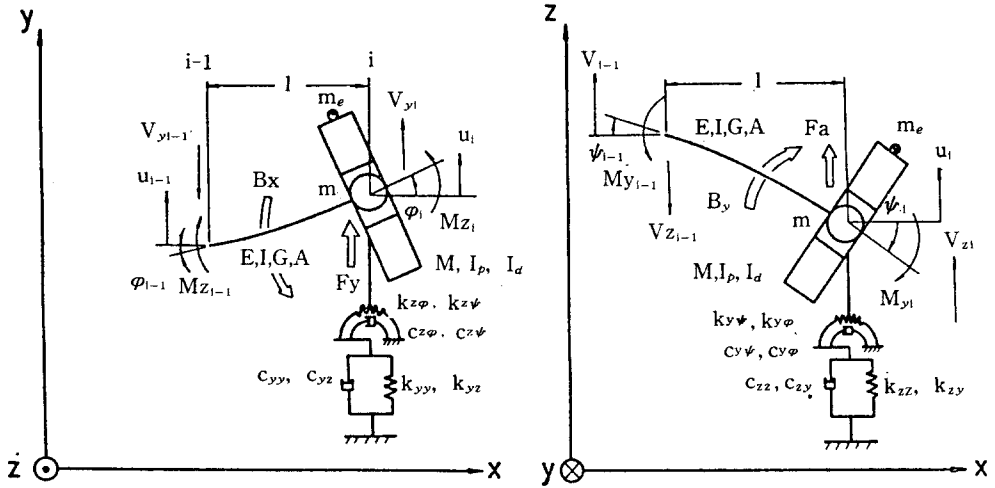


Fig. 2.2 Fundamental elements of mathematical model for single straight shaft and vectorial representation of forces, moments, displacements and rotations

질량, 탄성축, 집중질량, 원판, 스프링과 댐퍼의 각구성요소로 형성된다하고 이들 각 단체요소의 전달매트릭스를 각각  $T_U, T_E, T_M, T_D, T_B$ 라할 때 기본요소의 상태벡터  $Z_i, Z_{i-1}$  간에 서로 다음과 같은 관계식이 성립한다.

$$Z_i = T_{B1} T_{U1} T_{D1} T_{M1} T_{E1} Z_{i-1} \quad (7)$$

$T_B, T_U, T_D, T_M, T_E$ 를 각각 구한다면 (7)식에 대입하면 결국 (8)식을 얻게된다.

이 식에서 사용되는 각 기호의 뜻은 다음과 같다.

- $m$  : 축의 질량
- $M$  : 원판의 질량
- $I_p, I_d$  : 원판의 극 및 직경관성모멘트

- $m_e$  : 불평형질량
- $\epsilon, \theta$  : 불평형질량의 위치(각각 반경위치, 각도위치)
- $l$  : 분할구간의 길이
- $\omega$  : 축의 회전각속도
- $\Omega$  : 기진외력의 각속도
- $E, G$  : 축의 종 및 횡탄성계수
- $\kappa$  : 축의 전단계수
- $I$  : 축의 단면2차모멘트
- $A$  : 축의 단면적
- $B_y, B_z$  : y 및 z축둘레의 강제굽힘모멘트
- $F_y, F_z$  : y 및 z축방향의 강제력
- $k_{yy}, \dots, k_{zy}, \dots$  : 베어링부의 직선 및 회전스프링상수

$$T_1 = \begin{bmatrix} 1 & l & \beta & \gamma & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & \beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & T_{z\phi} & 1 + \alpha T_{z\phi} & l + \beta T_{z\phi} & 0 & T_{z\psi} & \alpha T_{z\psi} & \beta T_{z\psi} & -B_z \\ T_{yy} & lT_{yy} & \beta T_{yy} & 1 + \gamma T_{yy} & T_{yz} & lT_{yz} & \beta T_{yz} & \gamma T_{yz} & P_y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & l & \beta & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \alpha & \beta & 0 \\ 0 & T_{y\phi} & \alpha T_{y\phi} & \beta T_{y\phi} & 0 & T_{y\psi} & 1 + \alpha T_{y\psi} & l + \beta T_{y\psi} & -B_y \\ T_{zy} & lT_{zy} & \beta T_{zy} & \gamma T_{zy} & T_{zz} & lT_{zz} & \beta T_{zz} & 1 + \gamma T_{zz} & -P_z \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

$C_{yy}, \dots, C_{zy}, \dots$  : 베어링부의 직선 및 회전감쇠계수

$\alpha = l/EI$

$\beta = l^2/2EI$

$\gamma = l^3/6EI - \kappa l/AG$

$T_{yy} = -(k_{yy} + j\Omega C_{yy}) + (m + M + m_e)\Omega^2$   
 ( $j = \sqrt{-1}$ )

$T_{yz} = k_{yz} + j\Omega C_{yz}$

$T_{zz} = -(k_{zz} + j\Omega C_{zz}) + (m + M + m_e)\Omega^2$

$T_{zy} = k_{zy} + j\Omega C_{zy}$

$T_{z\phi} = k_{z\phi} + j\Omega C_{z\phi} - \Omega^2 I_d$

$T_{z\psi} = k_{z\psi} + j\Omega C_{z\psi} + j\omega\Omega I_p$

$T_{y\phi} = k_{y\phi} + j\Omega C_{y\phi} - j\omega\Omega I_p$

$T_{y\psi} = k_{y\psi} + j\Omega C_{y\psi} - \Omega^2 I_d$

$P_y = F_y + m_e \epsilon \Omega^2 (\sin\theta - j\cos\theta)$

$P_z = F_z - m_e \epsilon \Omega^2 (\cos\theta + j\sin\theta) - (m + M + m_e)g$

동적인 경우 :  $\Omega = \omega, g = 0$

정적인 경우 :  $\Omega = 0, g = g$

(2) 프로펠러의 전달매트릭스

추진축계의 각요소중에서 프로펠러부의 전달 매트릭스는 프로펠러의 유체역학적 특성을 고려해야하기 때문에 (8)식을 적용할수 없다. 따라서 지금 프로펠러에 관하여 Fig. 2, 3과 앞 절에 보인 기호외에 다음과 같은 기호를 도입하여 프로펠러부의 전달매트릭스를 구하면 식 (9)와 같이 된다.

$$T_1 = \begin{bmatrix} 1 & l & \beta & \gamma & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & \beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_{\phi\phi} & (1+\alpha P_{\phi\phi}) & (1+\alpha P_{\phi\phi}) & -P_{\phi\psi} & (-l'P_{\phi z} & (-\beta P_{\phi z} & (-\gamma P_{\phi z} & -B_z \\ -P_{yy} & (-l'P_{yy} & (-\beta P_{yy} & (-\beta P_{yy} & 0 & +P_{\phi\psi}) & +\alpha P_{\phi\psi}) & +\beta P_{\phi\psi}) \\ -P_{y\phi} & -\alpha P_{y\phi} & -\alpha P_{y\phi} & & & -P_{y\psi} & -\alpha P_{y\psi} & -\beta P_{y\psi} & P_y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & l' & \beta & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \alpha & \beta & 0 \\ P_{\psi y} & (l'P_{\psi y} & (\beta P_{\psi y} & (\beta P_{\psi y} & 0 & P_{\psi\phi} & (1+\alpha P_{\psi\phi}) & (l'+\beta P_{\psi\psi}) & -B_y \\ +P_{\psi\phi}) & +\alpha P_{\psi\phi}) & +\alpha P_{\psi\phi}) & & & (-l'P_{zz} & (-\beta P_{zz} & (1-\gamma P_{zz} & -P_z \\ 0 & P_{z\phi} & \alpha P_{z\phi} & \beta P_{z\phi} & -P_{zz} & +P_{z\psi}) & +\alpha P_{z\psi}) & +\beta P_{z\psi}) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

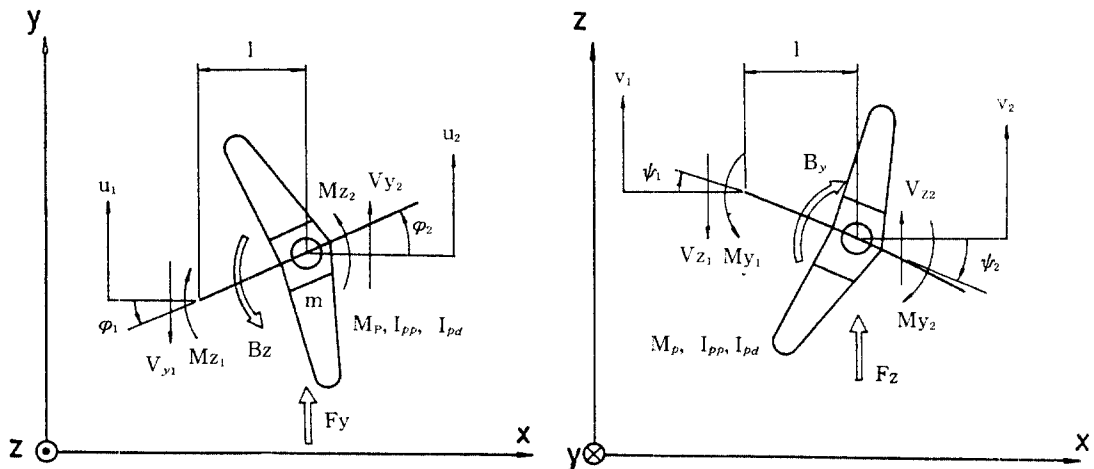


Fig. 2.3 Fundamental elements of mathematical model for propeller section and vectorial representation of forces, moments, displacements and rotations.

$M_p$  : 프로펠러의 공기중질량  
 $I_{pp}$  : 프로펠러의 극관성모멘트  
 $I_{pd}$  : 프로펠러의 직경관성모멘트  
 $a_{(yy)} \dots$  : 프로펠러의 부가수질량  
 $b_{(yy)} \dots$  : 프로펠러의 감쇠계수  
 $l'$  : 프로펠러 설치중심부터 프로펠러축의 선  
 미끝까지의 길이

$$\begin{aligned} P_{yy} &= -\Omega^2(m + M_p + a_{(yy)}) + j\Omega b_{(yy)} \\ P_{y\varphi} &= -\Omega^2 a_{(y\varphi)} + j\Omega b_{(y\varphi)} \\ P_{zz} &= -\Omega^2(m + M_p + a_{(zz)}) + j\Omega b_{(zz)} \\ P_{y\psi} &= -\Omega^2 a_{(y\psi)} + j\Omega b_{(y\psi)} \\ P_{z\varphi} &= -\Omega^2 a_{(z\varphi)} + j\Omega b_{(z\varphi)} \\ P_{z\psi} &= -\Omega^2 a_{(z\psi)} + j\Omega b_{(z\psi)} \\ P_{\varphi\varphi} &= -\Omega^2(I_{pd} + a_{(\varphi\varphi)}) + j\Omega b_{(\varphi\varphi)} \\ P_{\varphi z} &= -\Omega^2 a_{(\varphi z)} + j\Omega b_{(\varphi z)} \\ P_{\varphi\psi} &= -\Omega^2 a_{(\varphi\psi)} + j\Omega(b_{(\varphi\psi)} + \omega I_{pp}) \\ P_{\psi\psi} &= -\Omega^2(I_{pd} + a_{(\psi\psi)}) + j\Omega b_{(\psi\psi)} \\ P_{\psi y} &= -\Omega^2 a_{(\psi y)} + j\Omega b_{(\psi y)} \\ P_{\psi\varphi} &= -\Omega^2 a_{(\psi\varphi)} + j\Omega(b_{(\psi\varphi)} - \omega I_{pp}) \end{aligned}$$

여기서  $a_{(yy)} \dots, b_{(yy)} \dots$ 는 프로펠러의 날개수, 평균빋치비, 전개면적비, 직경, 유체밀도 및 회전각속도로부터 구할수 있다.

### 2.3 전달매트릭스법에 의한 진동해석

#### (1) 자유진동

좌단자유, 우단고정의 경우 식(6)은 다음과 같이 변형할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}_R = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{15} & T_{16} & T_{19} \\ T_{21} & T_{22} & T_{25} & T_{26} & T_{29} \\ T_{51} & T_{52} & T_{55} & T_{56} & T_{59} \\ T_{61} & T_{62} & T_{65} & T_{66} & T_{69} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \varphi \\ -v \\ \psi \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix}_L \quad (9)$$

윗식으로부터

$$D = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{15} & T_{16} \\ T_{21} & T_{22} & T_{25} & T_{26} \\ T_{51} & T_{52} & T_{55} & T_{56} \\ T_{61} & T_{62} & T_{65} & T_{66} \end{bmatrix} = 0 \quad (10)$$

상기 행렬식D를 만족하는  $\Omega$ 가 고유각진동수이며 진동모오드는 식(9)의 상태량을 단위량 (=1)으로 놓고 얻은 방정식중에서 임의의 3개의 연립방정식을 풀면 이것이 시발점  $Z_1$ 의 상태벡터를 부여하게된다. 따라서 임의점의 진동모오드는

$$Z_1 = T_1 T_{1-1} \dots T_3 T_2 T_1 \quad (11)$$

으로 구할수 있다.

만약 양단자유의 경우에는 (10)식이 다음과 같이 된다.

$$D = \begin{bmatrix} T_{31} & T_{32} & T_{35} & T_{36} \\ T_{41} & T_{42} & T_{45} & T_{46} \\ T_{71} & T_{72} & T_{75} & T_{76} \\ T_{81} & T_{82} & T_{85} & T_{86} \end{bmatrix} = 0 \quad (10')$$

#### (2) 강제진동

강제진동은 정상진동해법을 이용하여 계산한다. 계전체의 전달매트릭스는 (17×17)차의 복소수성분으로 구성되는데 이것을 실수부와 허수부로 나누면 식(5)는 다음과 같이 분리된다.

$$\begin{bmatrix} S^r \\ S^i \\ 1 \end{bmatrix}_R = \begin{bmatrix} T^r & T^i & F^r \\ T^i & T^r & F^i \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S^r \\ S^i \\ 1 \end{bmatrix}_L \quad (12)$$

다만,

$[S^r], [S^i]$  : 상태벡터의 실수부와 허수부

$[T^r] = [R_{ij}]$  : 매트릭스T의 실수부 (i, j=1, 2, ..., 8)

$[T^i] = [J_{ij}]$  : 매트릭스T의 허수부 (i, j=1, 2, ..., 8)

$[F^r], [F^i]$  : 강제기진력의 실수부와 허수부  
 다시 식(12)를 다음과 같이 변환한다.

$$\begin{bmatrix} D_1^r \\ D_2^r \\ D_1^i \\ D_2^i \\ 1 \end{bmatrix}_R = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & -J_{11} & -J_{12} & F_1^r \\ R_{21} & R_{22} & -J_{21} & -J_{22} & F_2^r \\ J_{11} & J_{12} & R_{11} & R_{12} & F_1^i \\ J_{21} & J_{22} & R_{21} & R_{22} & F_2^i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_1^r \\ G_2^r \\ G_1^i \\ G_2^i \\ 1 \end{bmatrix}_L \quad (13)$$

다만,

$[D_1^r] = [M_z^r - V_y^r \ M_y^r \ V_z^r]_n^T$

$[D_1^i] = [M_z^i - V_y^i \ M_y^i \ V_z^i]_n^T$

$$\begin{aligned}
[D_2^r] &= [u^r \ \varphi^r \ -v^r \ \psi^r]^T_n \\
[D_2^i] &= [u^i \ \varphi^i \ -v^i \ \psi^i]^T_n \\
[G_1^r] &= [M_z^r \ -V_y^r \ M_y^r \ V_z^r]^T_1 \\
[G_1^i] &= [M_z^i \ -V_y^i \ M_y^i \ V_z^i]^T_1 \\
[G_2^r] &= [u^r \ \varphi^r \ -v^r \ \psi^r]^T_1 \\
[G_2^i] &= [u^i \ \varphi^i \ -v^i \ \psi^i]^T_1 \\
[F_1^r] &= [f_{Mz}^r \ f_{Vy}^r \ f_{My}^r \ f_{Vz}^r]^T \\
[F_1^i] &= [f_{Mz}^i \ f_{Vy}^i \ f_{My}^i \ f_{Vz}^i]^T \\
[F_2^r] &= [f_u^r \ f_\phi^r \ f_v^r \ f_\psi^r]^T \\
[F_2^i] &= [f_u^i \ f_\phi^i \ f_v^i \ f_\psi^i]^T
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[R_{11}] &= \begin{bmatrix} \Gamma_{33}\Gamma_{34}\Gamma_{37}\Gamma_{38} \\ \Gamma_{43}\Gamma_{44}\Gamma_{47}\Gamma_{48} \\ \Gamma_{73}\Gamma_{74}\Gamma_{77}\Gamma_{78} \\ \Gamma_{83}\Gamma_{84}\Gamma_{87}\Gamma_{88} \end{bmatrix} & [R_{12}] &= \begin{bmatrix} \Gamma_{31}\Gamma_{32}\Gamma_{35}\Gamma_{36} \\ \Gamma_{41}\Gamma_{42}\Gamma_{45}\Gamma_{46} \\ \Gamma_{71}\Gamma_{72}\Gamma_{75}\Gamma_{76} \\ \Gamma_{81}\Gamma_{82}\Gamma_{85}\Gamma_{86} \end{bmatrix} \\
[R_{21}] &= \begin{bmatrix} \Gamma_{13}\Gamma_{14}\Gamma_{17}\Gamma_{18} \\ \Gamma_{23}\Gamma_{24}\Gamma_{27}\Gamma_{28} \\ \Gamma_{53}\Gamma_{54}\Gamma_{57}\Gamma_{58} \\ \Gamma_{63}\Gamma_{64}\Gamma_{67}\Gamma_{68} \end{bmatrix} & [R_{22}] &= \begin{bmatrix} \Gamma_{11}\Gamma_{12}\Gamma_{15}\Gamma_{16} \\ \Gamma_{21}\Gamma_{22}\Gamma_{25}\Gamma_{26} \\ \Gamma_{51}\Gamma_{52}\Gamma_{55}\Gamma_{56} \\ \Gamma_{61}\Gamma_{62}\Gamma_{65}\Gamma_{66} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$[J_{11}]$ ,  $[J_{12}]$ ,  $[J_{21}]$ ,  $[J_{22}]$ 도 같은 요령으로 구성된다.

경계조건이 우단고정, 좌단자유일 경우

$$[D_2^r]_n = [D_2^i]_n = [G_1^r]_1 = [G_1^i]_1 = 0 \quad (14)$$

이기 때문에 식(13)으로부터

$$[R_{22}][G_2^r]_1 - [J_{22}][G_2^i]_1 + [F_2^r] = 0$$

$$[J_{22}][G_2^i]_1 - [R_{22}][G_2^r]_1 + [F_2^i] = 0$$

이것을 풀면

$$[G_2^i]_1 = -([J_{22}]^{-1}[R_{22}] + [R_{22}]^{-1}[J_{22}])^{-1} \cdot$$

$$([J_{22}]^{-1}[F_2] + [R_{22}]^{-1}[F_2])$$

$$[G_2^r]_1 = ([J_{22}]^{-1}[R_{22}] + [R_{22}]^{-1}[J_{22}])^{-1} \cdot$$

$$([J_{22}]^{-1}[F_2] - [R_{22}]^{-1}[F_2])$$

이로써  $Z_1$ 의 상태량이 모두 결정되었으므로 이를 이용하여 임의의 위치의 상태벡터가 모두 결정된다.

한편, 계산된 값들은 복소값들이기 때문에 각상태량의 요소에 대하여 가령 변위  $u$ 는

$$\begin{aligned}
u &= ue^{i\omega t} = (u^r + ju^i)e^{i\omega t} = \bar{u}e^{i\theta}e^{i\omega t} \\
\bar{u} &= (u^r + u^{i2})^{1/2}, \quad \theta = \tan^{-1}(u^i/u^r) \quad (15)
\end{aligned}$$

이며  $\theta$ 는 외력과의 위상차를 나타낸다.

### 3. 계 산 예

제2장에서 의 계산과정을 전산프로그램화한 다음 아래에 제시하는 두가지 경우에 대하여 계산을 수행하고 그 결과를 보인다.

#### 3.1 선박 추진축계의 경우

선박추진축계의 횡진동계산에는 많이 발표되고 있으나 실측결과와 계산결과를 대비시켜서 발표한 경우는 아직도 많지 않으며 발표된 경우라도 대상축계의 치수등에 불분명한 경우가 많다.

본 계산에서는 이미 발표된 추진축계횡진동 계산방법에 관한 연구논문으로부터 계산자료를 입수하고 불분명한 점은 원저자로부터 추가로 자료를 입수하여 계산을 수행하였다.

(1) 추진축계배치도와 계산기 입력자료

Table 3.1 Specifications of Propeller and Flywheel

Propeller (Nodal point 2)	Flywheel (Nodal point 20)
No. of blades : 3 Weight : 4,108 kgf Polar mass moment of inertia : 1,813 kg, m <sup>2</sup> Diametric mass moment of inertia : 1,117 kg, m <sup>2</sup>	Weight : 3,180 kgf Polar mass moment of inertia : 980 kg, m <sup>2</sup> Diametric mass moment of inertia : 530 kg, m <sup>2</sup>

Table 3.2 Characteristics of Bearings and Assumed External Forces

Brg.	Case 1			Case 2		
	Brg. 1	Brg. 2	Brg. 3	Brg. 1	Brg. 2	Brg. 3
$K_{xx}$ mN/m	38,8	32,8	27,8	1,5	10,0	10,0
$K_{yy}$ mN/m	-	-	-	-1,0	-	-
$K_{yy}$ mN/m	100,0	115,0	141,0	9,16	10,0	10,0
$K_{yx}$ -	-	-	-	5,3	-	-
$K_y$ mNm/rad	8,8	4,0	3,2	-	-	-
$K_x$ mNm/rad	12,0	2,7	2,2	-	-	-
$C_{xx}$ mNs/m	0,130	0,213	0,181	0,076	0,400	0,400
$C_{yy}$ mNs/m	0,340	0,747	0,916	0,437	0,400	0,400
Exciting forces	Propeller Ecc. : 1mm Prop. Hyd. force(3rd order) H : 1000N, V : 1500N			Propeller Ecc. : 1mm Prop. Hyd. force : 0		

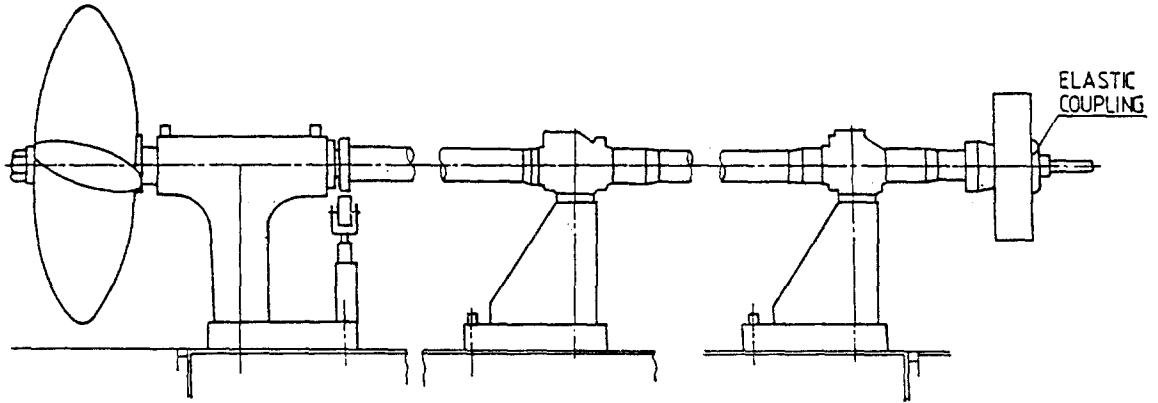


Fig. 3.1 (a) Line-shafting installed in laboratory of Delft University of Technology.

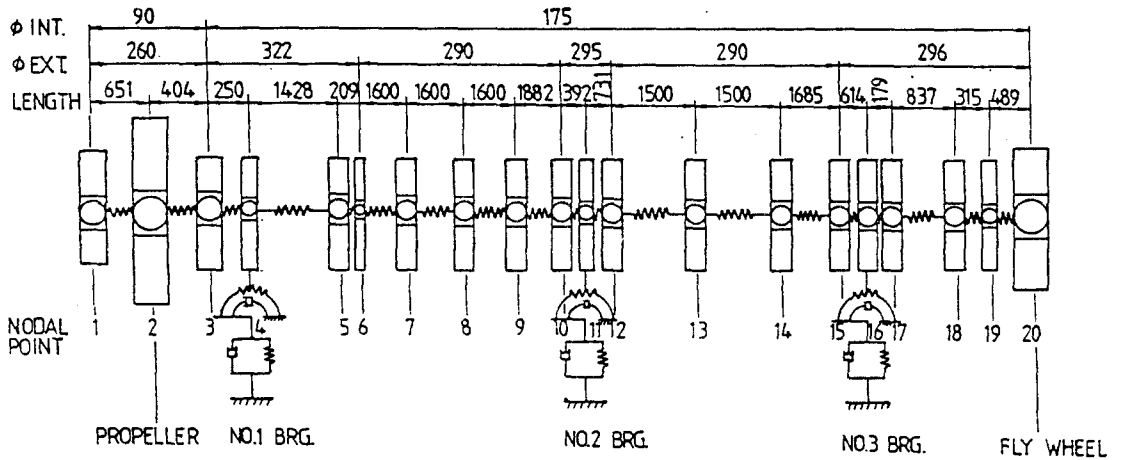


Fig. 3.1 (b) Mathematical model of lateral vibration for line-shafting

(2) 계산결과

계산결과중에서 대표적인 경우를 Fig. 3.2~Fig. 3.6에 보인다.

Fig. 3.2(a)는 1차 기진력(불평형질량)에 대한 프로펠러(절점2)의 응답을 나타내며 Fig. 3.2(b)는 3차(프로펠러날개수 차수)의 기진력에 대한 프로펠러(절점2) 응답을 나타내고 있다.

Fig. 3.3(a)는 프로펠러의 1차기진력에 의하여 첫번째 베어링(절점 4)에 발생하는 베어링력을 보여주고 있으며 Fig. 3.3(b)는 3차의 기진력에 대한 베어링력을 나타내고 있다.

Fig. 3.4(a)는 프로펠러의 1차기진력에 대한 축회전 250rpm에 있어서의 프로펠러 응답을 보여주고있으며 Fig. 3.4(b)는 같은 조건하에

서의 3차의 응답을, Fig. 3.4(c)는 같은 조건하에서의 합성진동을 보여주고 있다.

Fig. 3.5(a)는 플라이휠(절점20)의 1차기진력에 대한 250rpm에 있어서의 응답을, Fig. 3.5(b)는 같은 조건하에서의 3차기진력에 대한것을, Fig.3.5(c)는 합성진동을 보여주고 있다.

Fig. 3.6(a)는 세번째 베어링(절점16)의 250 rpm에서의 1차기진력에 대한 베어링력을, Fig. 3.6(b)는 같은 조건하에서 3차의 기진력에 대한 베어링력을, 그리고 Fig. 3.6(c)는 합성베어링력을 보여주고 있다.

Fig. 3.7(a)는 Case 2에 있어서의 프로펠러 1차응답을, Fig. 3.7(b)는 플라이휠의 1차응답을 보여주고 있다.



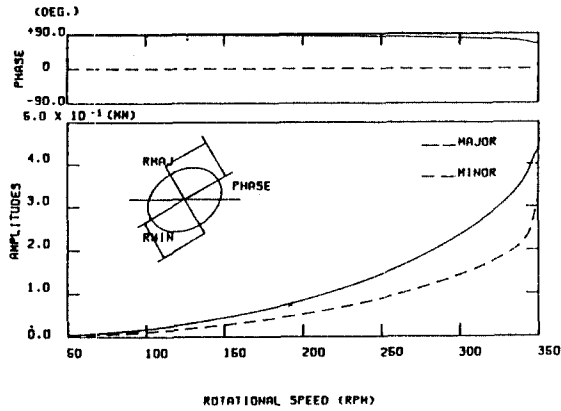


Fig. 3.2 (a) 1st order response of propeller unbalance mass exciting in propeller (nodal point 2), (case 1)

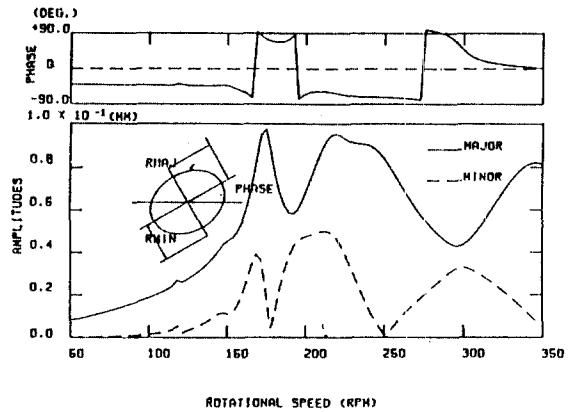


Fig. 3.2 (b) 3rd order (propeller blade order) response of propeller exciting in propeller (nodal point 2), (case 1)

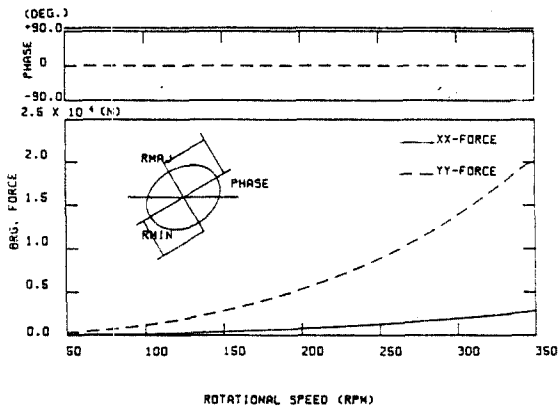


Fig. 3.3 (a) 1st order bearing force in No. 1 bearing (nodal point 4) induced by propeller eccentricity (case 1)

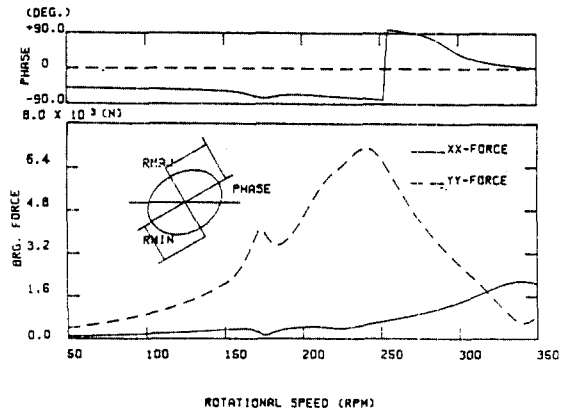


Fig. 3.3 (b) 3rd order (propeller blade order) bearing force in No. 1 bearing (nodal point 4) induced by propeller exciting (case 1)

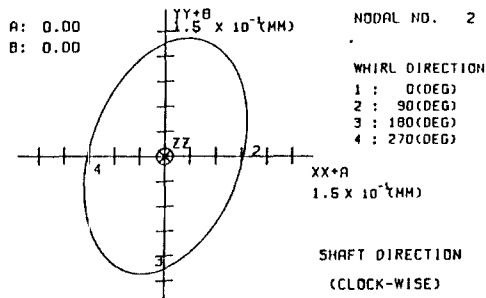


Fig. 3.4 (a) 1st order response of propeller (nodal point 2) at 250rpm (case 1)

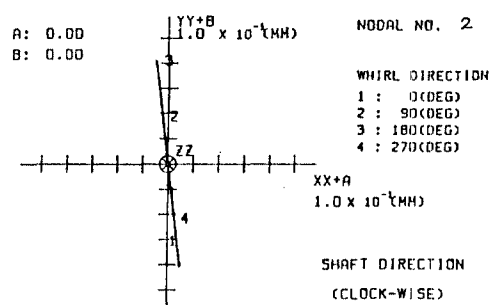


Fig. 3.4 (b) 3rd order response of propeller (nodal point 2) at 250 rpm (case 1)

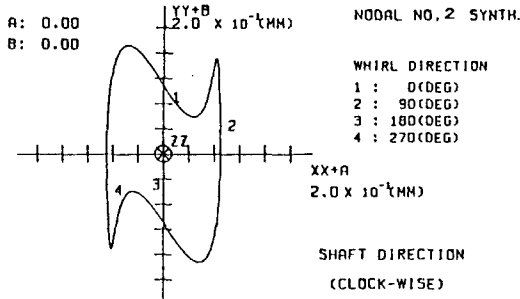


Fig. 3.4 (c) Synthesized response of propeller (nodal point 2) at 250 rpm (case 1)

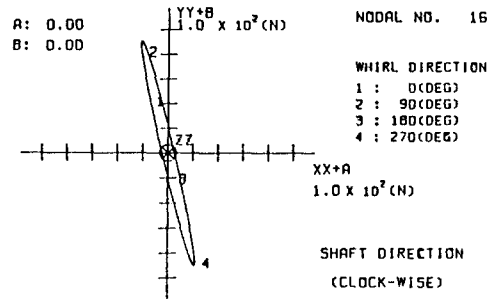


Fig. 3.6 (a) 1st order bearing force in No. 3 bearing (nodal point 16) at 250rpm (case 1)

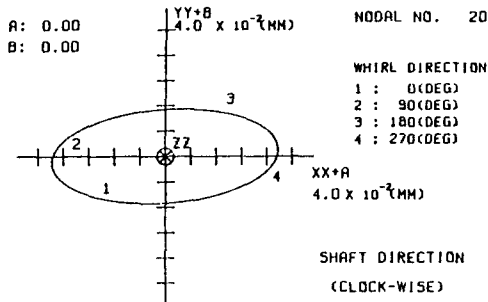


Fig. 3.5 (a) 1st order response of flywheel (nodal point 20) at 250 rpm (case 1)

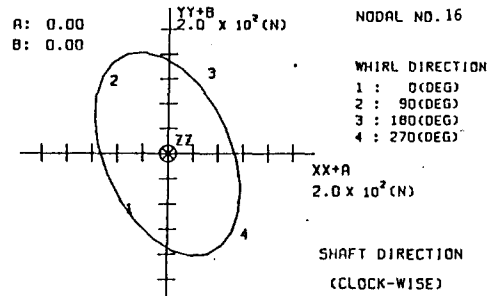


Fig. 3.6 (b) 3rd order bearing force in No. 3 bearing (nodal point 16) at 250rpm (case 1)

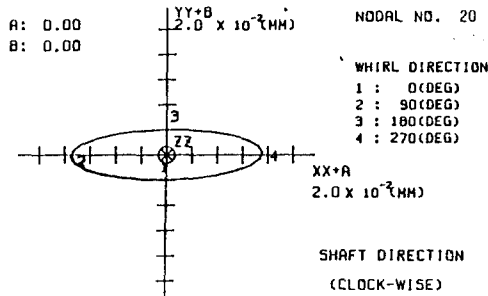


Fig. 3.5 (b) 3rd order response of flywheel (nodal point 20) at 250 rpm (case 1)

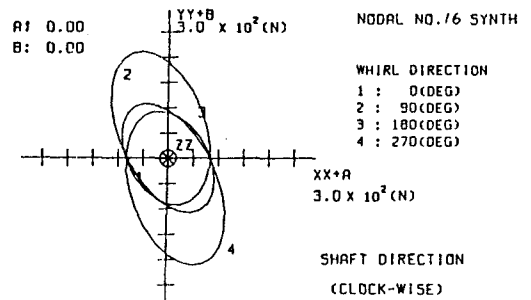


Fig. 3.6 (c) Synthesized bearing force in No. 3 bearing (nodal point 16) at 250rpm (case 1)

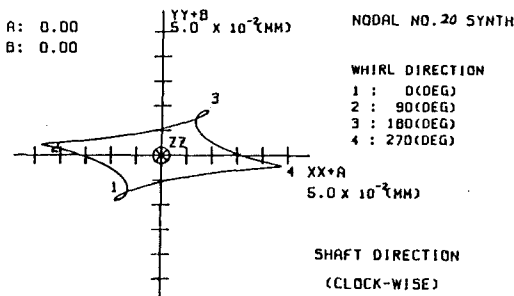


Fig. 3.5 (c) Synthesized response of flywheel (nodal point 20) at 250 rpm (case 1)

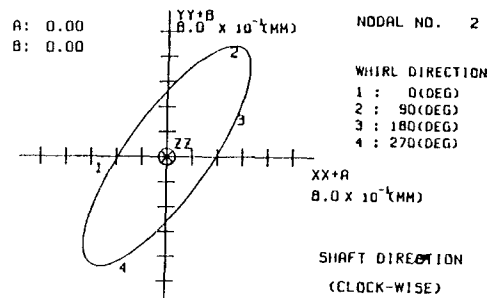


Fig. 3.7 (a) 1st order response of propeller (nodal point 2) at 140rpm (case 2)

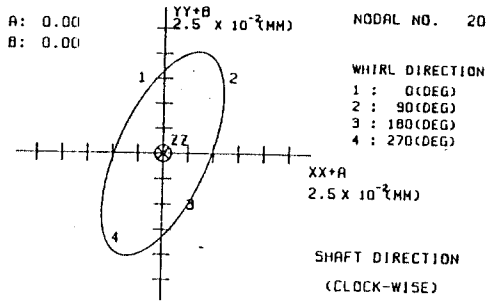


Fig. 3.7 (b) 1st order response of flywheel (nodal point 20) at 140rpm (case 2)

3.2 선반주축의 경우

(1) 주축배치도와 계산기 입력자료

Table 3.3 Specifications of Lathe Main Spindle, its Bearings and Work Piece

Bearing No. 1, No. 2	Main spindle and work piece
$K_{xx}(=K_{yy}) : 0.7800 \times 10^9$ N/m	Head stock chuck weight : 88.7kgf
$K_{yx}(=K_{xy}) : 1.3910 \times 10^9$ N/m	Polar mass moment of inertia of chuck : 3,7720kg.m <sup>2</sup>
$C_{xx}(=C_{yy}) : 0.1300 \times 10^4$ Ns/m for No. 1 Brg.	Dia.mass moment of inertia of chuck 1,8860kg.m <sup>2</sup>
$C_{xx}(=C_{yy}) : 0.2320 \times 10^4$ Ns/m for No.2 Brg.	Eccentric mass of work piece : 1kgf
$C_{xy}(=C_{yx}) : 0.0$	Eccentricity of work piece : 1mm

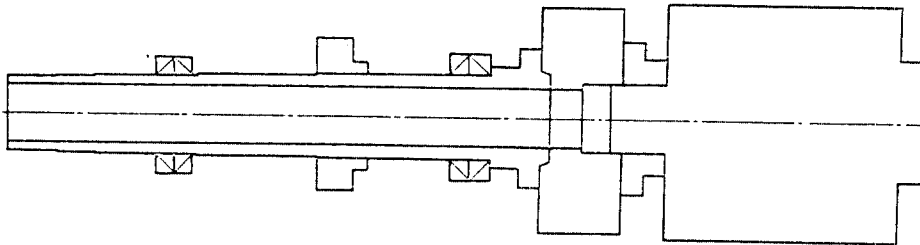


Fig. 3.8 (a) Skelton diagram of lathe head stock with a work piece

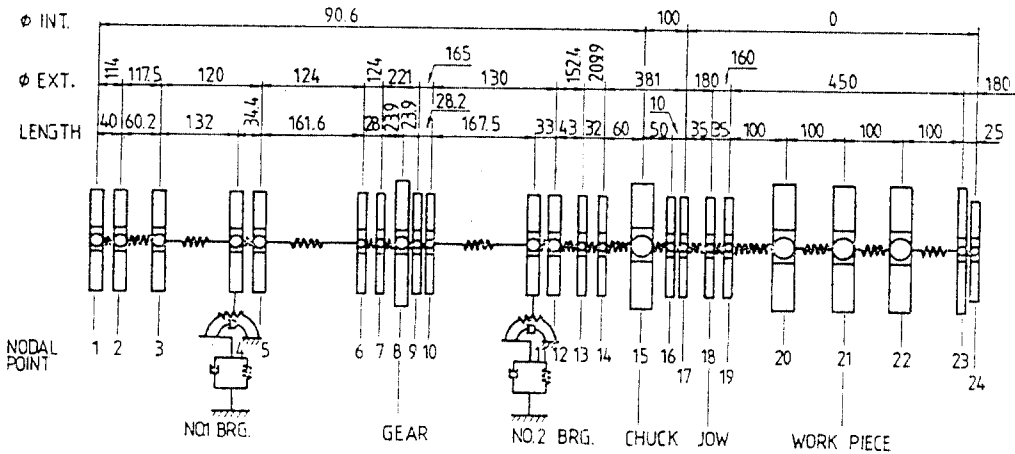


Fig. 3.8 (b) Mathematical model of lathe head stock with a work piece

(2) 계산결과

계산결과중에서 대표적인 경우를 Fig. 3.9~Fig.3.16에 보인다.

Fig. 3.9는 선반을 저속단(N=20~585

rpm)으로 회전시켰을 경우의 주축좌단 진동 진폭을 보여주고 있다. 이 작동범위에는 공진 점이 존재하지않음을 알 수 있다. Fig. 3.10은 고속단(N=40~2000 rpm)으로 작동시켰

을 경우의 주축좌단에 있어서의 진동진폭을 보여주고 있다. 그림으로부터 알 수 있는바와 같이 2117rpm에서 공진이 발생한다. 선반사용 한계속도 2000rpm에서 10%정도 벗어나있으며 통상의 사용상태에서는 문제가 발생하지 않음을 알 수 있다. 또한, Fig. 3.11은 같은 조건하에서의 작업물체 진동상태를 보여주고 있다. 한편, Fig.3.12와 Fig.3.13은 각각 첫째 베어링과 둘째 베어링내에서의 진동으로 인한 베어링하중력을 나타내고 있다.

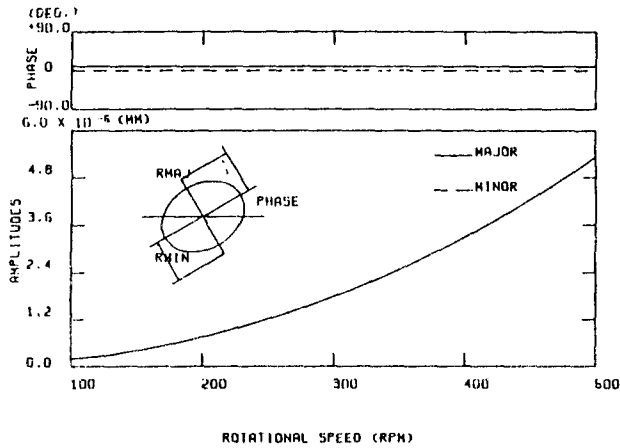


Fig. 3.9 1st order response of main spindle left end (nodal point 1) at lower speed range (N=20~500rpm)

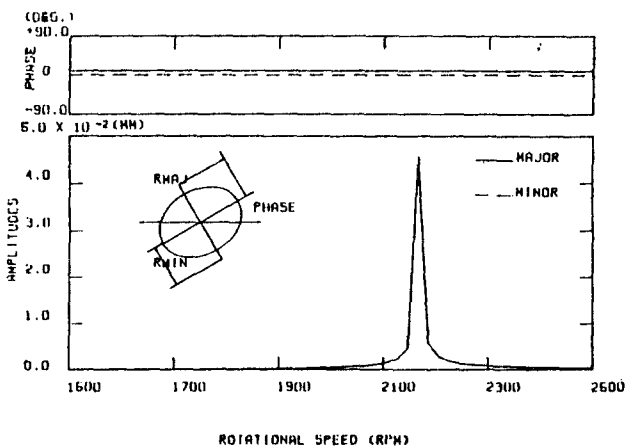


Fig. 3.10 1st order response of main spindle left end (nodal point 1) at higher speed range (N=40~2000rpm)

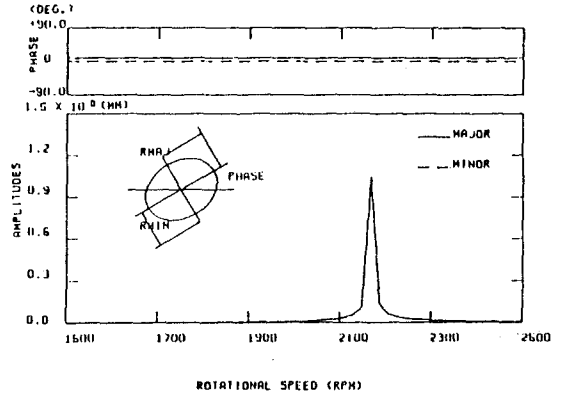


Fig. 3.11 1st order response of work piece (nodal point 21) at higher speed range (N=40~2000rpm)

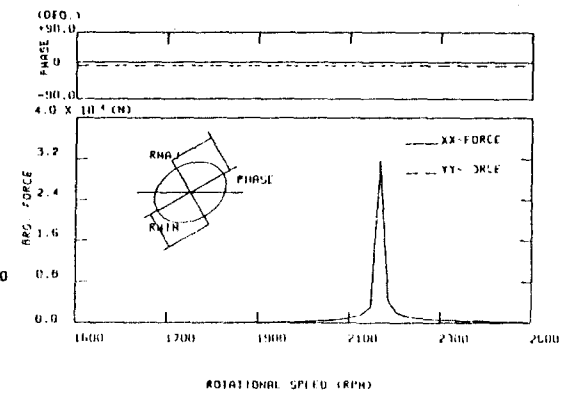


Fig. 3.12 1st order bearing force in No. 1 bearing (nodal point 4) at higher speed range (N=40~2000rpm)

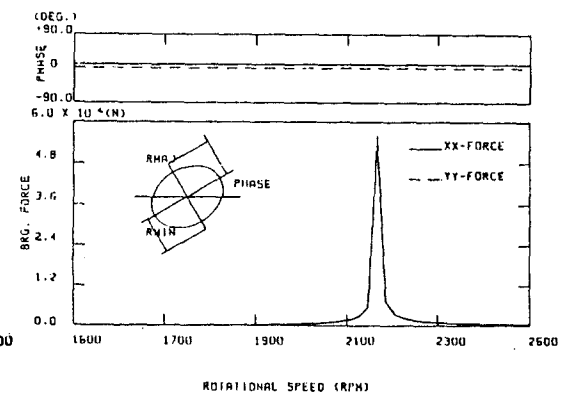


Fig. 3.13 1st order bearing force in No. 2 bearing (nodal point 11) at higher speed range (N=40~2000 rpm)

#### 4. 결 론

본 연구에서는 다지점 지지 회진축계의 자유진동 및 감쇠강제진동을 전달매트릭스법에 의하여 해석하는 방법을 규명하고 계산을 수행하는 전자계산프로그램을 개발한 다음, 개발된 전산프로그램에 의하여 선박추진축계와 선반주축계의 횡진동을 계산하여 보았다. 그 결과에 의하여 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

(1) 전달매트릭스법에 의한 경우 유한요소법에서는 효과적으로 다룰수 없었던 원판의 사이로효과, 지지베어링의 비대칭스프링상수와 감쇠계수등을 간단히 도입할수있기 때문에 보다 계산이 정확하게 된다.

(2) 축계의 등분수를 증가하여 절점수가 증가하더라도 계산시간이 비교적 적게 소요되며 계산기의 용량도 큰 것이 필요하지 않다.

(3) 붓싱이나 스트라트로 지지된 축계도 본 연구에서 유도한 요소매트릭스를 확장함으로써 용이하게 다룰수 있다.

(4) 자유진동뿐만 아니라 감쇠강제진동과 이들의 합성진동까지 용이하게 다룰수 있다.

(5) 선박의 추진축계를 포함하여 일반 다점지지축계까지 활용범위가 매우 넓다.

이상과 같이 본 연구에서 개발된 전달매트릭스의 전산프로그램에 의한 경우 넓은 범위에 걸쳐서 다지점 지지 축계의 횡진동계산이 가능하고 그의 활용범위가 매우 넓다는 것이 확인되었다. 다만, 추진축계의 횡진동등은 그의 실측이 매우 곤란하기 때문에 계산과 실측치를 비교 확인함으로써 그의 계산결과에 대한 신뢰성을 검토하는 것이 앞으로의 과제로 되고있다.

#### 참고문헌

1) 전효중·김희철, 선박추진축계의 횡진동계산에 관한 연구, 한국해양대학, 1979, 3

- 2) 전효중, "선박동력장치", 태화출판사, 부산 1986, pp. 189~213.
- 3) 양보석, 유한요소법에 의한 림프축계의 안정성해석, 한국박용기관학회지, 제10권 제4호, 1986, 11
- 4) 谷口 修, "振動工學ハンドブック, 養賢堂, 東京, 1985
- 5) J.S. Rao, "Rotor Dynamics", Halsted Press, 1983
- 6) Vertec "Vibration Control in Ship," Det norske Veritas
- 7) R.Ville, Actual Dynamic Behaviour and Calculate Approach to Stern Tube White Metal Bush", ICMES'84
- 8) G.C.Volocy, Experience with Marine Engineering Systems over the Last Thirty Years, The 52nd Andrew Laing Lecture, 1983.
- 9) Y.D. Kim · C.W. Lee, Finite Element Analysis of Roter Bearing Systems Using a Modal Transformation Matrix, J. of Sound & Vibration, Vol. 111 No.3, pp. 441~456
- 10) 菊地勝昭, 多軸受多圓回轉軸系の不つりあい振動の解析, 日本機械學會誌, 第372卷 第610號, pp. 96~103, 1969, 11
- 11) Y.Hori et al, Lateral Vibration of Propeller Shaft Systems, J. of MESJ, Vol. 13, No. 4, pp. 51~56, 1978, 4
- 12) Saitho T. et al, Whirling of Propeller Shaftings, J. of MESJ, Vol.13, No. 12, pp. 49~63, 1978, 12
- 13) H.Aoki, S.Ryo, Lateral Vibration of Propeller Shafting, 日本海事協會誌, No.168, pp. 41~49, 1979, 8
- 14) H.Koike et al., Evaluation of Lateral Vibration in Marine Shaft Systems, J. of MESJ, Vol. 11, No. 5, pp. 46~54, 1976, 5
- 15) K.G. Brannstrom, C.S.Sunnersjo, Lateral Vibration of Propeller Shafts, International Conference CADMO'86, pp. 295~317, 1986