Journal of the Korean
OR/MS Society
Vol. 15, No. 2, Dec., 1990

一般 多重選擇 線型背囊問題에 대한 効率的인 解法

元重淵* · 鄭聖進**

An Efficient Algorithm for the Generalized Multiple Choice Linear Knapsack Problem

J. Y. Won* · S. J. Chung**

Abstract

An efficient algorithm is developed for the linear programming relaxation of generalized multiple choice knapsack problem. The generalized multiple choice knapsack problem is an extension of the multiple choice knapsack problem whose relaxed LP problem has been studied extensively. In the worst case, the computational complexity of the proposed algorithm is of order $0((n \cdot n_{max})^2)$, where n is the total number of variables and n_{max} denotes the cardinality of the largest multiple choice set. The algorithm can be easily embedded in a branch-and-bound procedure for the generalized multiple choice knapsack problem. A numerical example is presented and computational aspects are discussed.

* 경기대학교 산업공학과
** 서울대학교 산업공학과

1. 序 論

0-1 整數 背囊問題(0 - 1 integer knapsack problem)는 두가지 속성을 지니는 여러 과제들의 한 選擇集合으로부터 과제들을 選擇하되, 選擇된 과제들의 첫번째 속성의 합이 어느 限界値 이상이 되어야 하면서 두번째 속성의 합이 최소가 되도록 각 과제들을 選擇하는 問題이다. 이러한 問題는 그 問題 자체로서 또는 더 복잡한 整數計劃問題에 대한 代用緩和問題(surrogate relaxed problem)로서 연구되어 왔다. 線型 背囊問題(linear knapsack problem)는 整數 背囊問題의 정수 최적해를 찾기 위한 線型緩和問題(relaxed LP problem)로서 주로 사용되며 많은 관심을 받아왔다.

一般 多重選擇 背囊問題(GK; generalized multiple choice knapsack problem)는 각 과제들이 여러 選擇集合에 나뉘어 속해 있을 때 첫번째 속성의 총합이 어느 한계치 이상이 되면서, 두번째 속성의 총합이 최소가 되도록 選擇集合들로부터 과제들을 選擇하되 각 選擇集合으로부터 하나 이상의 원하는 수 만큼 과제들을 선택할 수 있는 問題이다. [26, 27] 問題(GK)에서 각 選擇集合으로부터 선택하려는 과제의 수가 모두 하나인 특수한 경우의 問題(GK)는 기존의 多重選擇 背囊問題(K; multiple choice knapsack problem)가 된다. [1, 2, 15, 16, 21, 23]

0-1 整數計劃의 많은 問題들은 選擇(0 또는 1)을 나타내는 변수들의 합이 1이 되어야 한다는 측면에서 多重選擇의 意味를 지니고 있으며, 이러한 制約이 있는 問題들에 대하여 많은 硏究가 되어왔다. [5, 13, 14, 20, 22] 問題(GK)는 이러한 制約이 一般化되어 기존의 多重選擇 背囊問題(K)를 특수한 경우로 포함하는 一般問題이다. 一般 多重選擇 背囊問題(GK)는 多重選擇 背囊問題(K)와 마찬가지로 預算計劃(Lorie & Savage[19]), 食單計劃(Balintfy et al. [4]), 販賣資源配分(Zoltners & Sinha[25]), 目錄編輯(Johnson et al. [17]), 生産計劃(Lasdon & Terjung[18]), Fisher[8]) 등의 分野에 활용되며, 복잡한 整數計劃問題에 대한 緩和問題(Glover[11])로서 이용가능하다.

一般 多重選擇 背囊問題(GK)의 整數 最適解를 찾기 위하여 線型緩和(LP relaxation)를 사용할 때 緩和된 問題인 一般 多重選擇 線型背囊問題(LGK; generalized multiple choice linear knapsack problem)를 효율적으로 푼다는 것은 매우 중요하다. 이것은 分枝限界技法의 적용중에 많은 후보문제가 발생하므로 線型緩和된 후보문제의 最適解를 신속하게 찾으므로써 탐색해야 할 후보문제들을 미리 절단할 수 있기 때문이다. 본 硏究에서는 一般 多重選擇 線型背囊問題의 一般 特性을 硏究하고, 이를 활용한 효율적인 解法을 개발한다.

2. 一般 多重選擇 線型背囊問題

一般 多重選擇 線型背囊問題(LGK)는 다음과 같이 정의된다.

(LGK) :

$$\text{Minimize} \sum_{i\in I}\sum_{j\in N(i)} c_{ij}x_{ij}, \quad (1)$$

$$\text{s.t.} \sum_{i\in I}\sum_{j\in N(i)} a_{ij}x_{ij} \ge b_0, \quad (2)$$

$$\sum_{j\in N(i)} x_{ij} = r_i, \quad \forall i \in I, \quad (3)$$

$$0 \le x_{ij} \le 1, \quad \forall j \in N(i), \ i \in I. \quad (4)$$

여기서, 選擇集合 N(i)들은 서로 중복되지 않는다고 하고, $c_{ij} > 0$, $a_{ij} > 0$, $\forall j \in N(i)$, $i \in I$, $b_0 > 0$이며, 選擇常數 r_i들은 $1 \le r_i < |N(i)|$를 만족하는 整數라고 가정한다. 또한 각 選擇集合 N(i)의 모든 指數들은 制約式의 계수 a_{ij}가 가장 작은 것부터 시작하여 증가하는 순서대로 재배열되었다고 가정한다. ($\forall i \in I$)

問題(LGK)에서 모든 選擇常數 r_i가 1인 특수한 경우에는($\forall i \in I$), 多重選擇 線型背囊問題(LK ; multiple choice linear knapsack problem)가 되며 問題(LK)에 대해서는 여러 特性들이 硏究되었고 효율적인 解法들이 제시되었다. [1, 6, 7, 12, 23, 24]

問題(LK)에서는 변수간의 우월성(dominance)이 존재하므로, 最適解에서 양의 값을 갖는 변수로서는 열등한 변수들을 제외한 우월한 변수들 중에서 선택하면 된다. 選擇集合 N(i)에 속하는 우월한 변수들은 해당되는 계수들의 (a_{ij}, c_{ij}) 평면상에서 아래로 볼록한 部分線型 曲線(convex piece-wise linear curve)을 형성한다. ($\forall i \in I$) [23, 24] 最適解에서 분수값을 취하는 변수들은 최대로 두개이며 하나의 選擇集合 N(i)에서 같이 발생하고 인접해 있는 변수들이다. (단, 변수들은 계수 a_{ij}가 증가하는 순으로 배열됨) 이외의 選擇集合에서는 하나의 변수만이 1의 값을 취하므로 雙對可能 基底가 쉽게 찾아지고, 따라서 문제해결이 간단해 진다. [1, 6, 23, 24] 問題(LK)에 대한 여러 解法을 비교하면 다음과 같다.

Sinha & Zoltners[23]는 制約式(3)의 구조적 특성으로 인하여 생기는 변수간의 우월성을 밝혔다. (단, $r_i = 1$, $\forall i \in I$) 이 특성을 이용하여 問題(LK)에 대한 解法을 제시하였다.

Armstrong et al.[1]은 Sinha & Zoltners[23]의 이론에 기반하여, 계산상의 이점 및 기억저장 공간의 활용에 중점을 둔 計算上 硏究(computational study)를 하였다.

Glover & Klingman[12]은 選擇集合에 속하지 않는 변수들이 존재하는 問題를 고려하고 計算上 複雜度가 $O(n\log n)$인 특수화된 雙對單體法을 개발하였다. (n은 변수들의 총수)

Zemel[24]은 변수간의 우월성에 기반하여 問題(LK)를 線型 背囊問題로 變換할 수 있는 방법을 제시하고, 이에 따른 複雜度가 $O(n\log(n_{max})) + O(n)$ 임을 보였다. ($n_{max} = \max_i |N(i)|$)

Dyer[7]는 計算上 複雜度가 $O(n)$인 解法을 제시하였다. 그러나, 이 解法은 열등한 변수들을 제거하지 않기 때문에 分枝限界技法에 사용되기 힘든 것으로 보고되고 있다. [6, 7]

Dudzinski & Walukiewicz[6]는 변수간의 우월성과 이진탐색 및 중앙치 탐색기법을 적용하여 직접 原問題의 最適解를 複雜度 $O(n\log(n_{max})) + O(m\log^2(n/m))$에 찾는 방법을 제시하였다. ($m = |I|$)

본 硏究에서 새로이 제시한 一般 問題(LGK)에서는 問題(LK)와 마찬가지로 最適解에서 최대

로 두개의 변수만이 동시에 분수값을 취할 수 있으며, 하나의 選擇集合에서 같이 발생한다. 그러나, 분수값을 취하는 두 변수는 인접해 있지 않으며, 변수간의 우월성이 성립하지 않으므로 最適解에서 모든 변수들이 양의 값을 취할 수 있다. 또한 분수해가 발생하는 選擇集合에서는 r_i-1개의 변수가 1의 값을 취할 수 있으며, 이외의 選擇集合에서는 r_i개의 변수가 1의 값을 취하므로 雙對可能 基底를 찾기가 어렵고 問題해결이 복잡해지고 있다. 다음 3절에서는 一般 多重選擇 線型背囊問題(LGK)의 一般 特性을 연구하고, 4절에는 最適解를 효율적으로 찾는 解法을 제시한다.

3. 一般 特性

問題(LGK)에서 總 制約式의 수는 $|I|+1$개이며, 可能解이기 위해서는 각 制約式에 基底變數가 한개씩 존재해야 한다. 一般 多重選擇 制約式(3)은 $|I|$개 있고, $N(i_1)\cap N(i_2)=\phi\ (i_1\neq i_2)$이므로, 基底變數가 두개 발생되는 選擇集合은 유일하게 존재한다. 각 변수에 上限制約 1이 있으므로, 基底變數가 두개 존재하는 選擇集合에서 두 基底變數값은 λ와 $1-\lambda$의 分數解($0<\lambda<1$), 또는 0와 1의 整數解($\lambda=0$ 또는 1일 때)를 취한다. 이외의 $|I|-1$개 選擇集合에서는 基底變數가 한개씩 존재하고 1의 값을 갖는 변수의 수는 選擇常數 r_i와 같게 되며, 따라서 整數解가 항상 발생한다. 이러한 基本 特性에 기반하여 각 選擇集合에 해당하는 副問題들을 정의하고, 副問題의 特性에 대해 연구한다.

3.1 問題의 分解

一般 多重選擇 線型背囊問題(LGK)에서 制約式(3)은 각 i에 대해 서로 독립적이므로, 制約式(2)의 資源量 b_0를 각 選擇集合 $N(i)$에 $b_i\ (\geq 0)$씩 할당한다면, 問題(LGK)는 다음과 같은 $|I|$개의 독립된 副問題 $(SPi(b_i))$들로 分解된다. $(i\in I)$

$(SPi(b_i))$:

$$z_i(b_i)=\text{Minimize}\sum_{j\in N(i)}c_{ij}x_{ij}, \tag{5}$$

$$\text{s.t.}\ \sum_{j\in N(i)}a_{ij}x_{ij}\geq b_i, \tag{6}$$

$$\sum_{j\in N(i)}x_{ij}=r_i, \tag{7}$$

$$0\leq x_{ij}\leq 1,\ \forall j\in N(i) \tag{8}$$

副問題$(SPi(b_i))$는 할당양 b_i의 값에 따라 非可解일 수 있다. 可能解가 존재할 수 있는 b_i의 최소값을 lb_i, 최대값을 ub_i라 하면 다음과 같다. $(n_i=|N(i)|)$

$$lb_i=0,\quad ub_i=\sum_{j=n_i-r_i+1}^{n_i}a_{ij}$$

할당양 b_i가 구간 $[0, ub_i]$의 값일 때, 최적 목적함수치 $z_i(b_i)$는 b_i에 대해서 아래로 볼록한 部分線型函數를 형성한다.

副問題$(SPi(b_i))$들이 위와 같이 정의될 때, 問題(LGK)는 副問題에 可能解가 존재하면서, 副問題들의 최적 목적함수치의 총합이 최소가 되도록 각 副問題(SPi)들에 할당양 b_i를 배분하는 資源配分의 의미를 갖는다. 즉, 問題(LGK)는 다음의 主問題(MP)와 같다.

$$\text{(MP)}:\quad \text{Minimize}\ \sum_{i\in I}z_i(b_i),$$

$$\text{s.t.}\ \sum_{i\in I}b_i\geq b_0,$$

$$lb_i\leq b_i\leq ub_i,\quad \forall i\in I.$$

3.2 副問題의 特性

본 절에서는 副問題(SPi(b_i))에서 b_i가 변화될 때 발생되는 最適基底들을 효율적으로 찾는 방법에 대해 研究한다. 副問題(SPi(b_i))에서 基底變數의 수는 두개이며, 두 基底變數는 λ와 $1-\lambda$의 값을 취하고($0 \leq \lambda \leq 1$), 非基底變數들중 $r_i - 1$개는 상한치 1을 취한다. 두 변수 x_{ij_1}과 x_{ij_2}가 이루는 비율 $\theta(i, j_1, j_2)$를 다음과 같이 정의한다. (단, $a_{ij_1} = a_{ij_2}$이면, $\theta \equiv \infty$)

$$\theta(i, j_1, j_2) = (c_{ij_1} - c_{ij_2}) / (a_{ij_1} - a_{ij_2})$$

다음 定理 1은 할당양 b_i가 변화할 때 最適 基底變數 $x_{iB_1(i)}$와 $x_{iB_2(i)}$를 쉽게 찾는 기준을 제시하고 있으며, 定理 2는 이 基底가 最適으로 유지되는 할당구간을 제시한다.

定理 1 副問題(SPi(b_i))에서 $b_i = b_i^*$일 때의 最適解가 整數解이고, 이때 1의 값을 갖는 변수의 指數集合을 J(i)라 하자. 資源量 b_i가 b_i^*에서 $b_i^* + \alpha$로 증가할 때(단, $\alpha > 0$, α는 충분히 작은 수), 분수값을 취하게 되는 最適 基底變數의 指數 $B_1(i)$, $B_2(i)$는 다음 식에 의해 결정된다. ($B_1(i), B_2(i) \in N(i)$)

$$\theta(i, B_1(i), B_2(i)) = \min_{j_1 \in J(i)} \min_{\substack{j_2 \in N(i) \setminus J(i) \\ j_2 > j_1}} \{\theta(i, j_1, j_2)\} \tag{9}$$

【證明】 가정에 의하여 資源量이 b_i^*일때 最適基底變數들은 정수값을 취하고 있다. 자원량이 증가함에 따라 새로이 발생되는 最適 基底變數들은 동시에 분수값을 취하고 그 합은 1이다. 따라서, 증가된 資源量 α를 충족하기 위해서는 J(i)에 속하는 변수들중에 한 변수 x_{ij_1}의 값은 현재의 해 1에서 감소되고, $N(i) \setminus J(i)$에 속하는 變數들 중 지수 j_1보다 큰 지수 j_2를 갖는 한 변수 x_{ij_2}는 현재의 해 0에서 증가해야 한다. ($a_{ij_1} < a_{ij_2}$) 그러므로, 基底變數를 x_{ij_1}, x_{ij_2}라 하면, $j_1 \in J(i)$, $j_2 \in N(i) \setminus J(i)$, $j_2 > j_1$이다. 기저행열 B, 역행열 B^{-1} 및 쌍대변수치 $c_B B^{-1}$는 다음과 같이 계산된다.

$$B = \begin{bmatrix} a_{ij_1} & a_{ij_2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{d}\begin{bmatrix} 1 & -a_{ij_2} \\ -1 & a_{ij_1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} c_B B^{-1} &= (c_{ij_1}, c_{ij_2}) B^{-1} \\ &= ((c_{ij_1} - c_{ij_2})/d, \ (c_{ij_2}a_{ij_1} - c_{ij_1}a_{ij_2})/d) \end{aligned}$$

여기서, $d = a_{ij_1} - a_{ij_2}$이다. 副問題(SPi(b_i))에서 $b_i = b_i^* + \alpha$ 일 때의 최적 목적함수치는 다음과 같이 계산된다. 벡타 b'을 $b' = (1, 0)'$라 하면,

$$\begin{aligned} z_i(b_i^* + \alpha) &= z_i(b_i^*) + \alpha \ c_B B^{-1} b' \\ &= z_i(b_i^*) + \alpha (c_{ij_1} - c_{ij_2})/d \\ &= z_i(b_i^*) + \alpha \ \theta(i, j_1, j_2) \end{aligned}$$

그러므로, $z_i(b_i^* + \alpha)$는 α가 증가함에 따라 基底變數 x_{ij_1}과 x_{ij_2}가 이루는 비율로 증가한다. 본 副問題는 최소화 問題이므로, 목적함수의 최소증가를 위해서는 定理의 식(9)와 같이 가장 작은 비율을 형성하는 變數 $x_{iB_1(i)}, x_{iB_2(i)}$가 最適 基底變數로서 선택된다. ■

定理 2 副問題(SPi(b_i))에서 $b_i = b_i^*$일 때의 最適解가 整數解이고, 1의 값을 취하는 變數의 指數集合을 J(i)라 하자. 資源量 b_i가 b_i^*에서 $b_i^* + \alpha$로 증가 함에 따라 발생되는 最適基底

$x_{iB_1(i)}$, $x_{iB_2(i)}$가 最適으로 유지되는 α의 범위는 $0 \leq \alpha \leq a_{iB_2(i)} - a_{iB_1(i)}$이다. (단, $B_1(i) < B_2(i)$)

【證明】 副問題에서 制約式의 j번째 열벡타를 A_{ij}, 벡타 $b = (b_i^*, r_i)^t$, 벡타 $b' = (1, 0)^t$, 기저 역행열을 B^{-1}라 하자. 현 基底가 最適으로 유지되기 위한 조건은 $B^{-1}(b + \alpha b' - \sum_{j \in J(i) \setminus \{B_1(i)\}} A_{ij}) \geq 0$이다. 즉,

$$
\begin{aligned}
& B^{-1}(b + \alpha b' - \sum_{j \in J(i) \setminus \{B_1(i)\}} A_{ij}) \\
&= B^{-1}(b - \sum_{j \in J(i) \setminus \{B_1(i)\}} A_{ij}) + \alpha B^{-1} b' \\
&= B^{-1} \begin{bmatrix} a_{iB_1(i)} \\ 1 \end{bmatrix} + \alpha B^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= 1/d \left[\begin{bmatrix} a_{iB_1(i)} - a_{iB_2(i)} \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right] \geq 0
\end{aligned}
$$

여기서, $d = a_{iB_1(i)} - a_{iB_2(i)} < 0$ 이므로, 위 부등식을 만족시키는 α의 범위는 定理에서 제시한 $0 \leq \alpha \leq a_{iB_2(i)} - a_{iB_1(i)}$이다. ■

定理 1 및 定理 2에서 副問題에 사용되는 整數解는 우선 쉽게 구해져야 한다. 본 硏究에서는 初期 整數解로서 최적 목적함수치 $z_i(b_i)$의 下限値에 해당하는 整數解를 사용한다. 이 整數解는 목적함수치의 계수 c_{ij}가 가장 작은 r_i개의 변수들을 1로 설정하므로써 쉽게 구해진다. 즉, 指數 j_k^* $(k = 1, \cdots, r_i)$들을 다음과 같다고 하자.

$$
c_{ij_1^*} \leq c_{ij_2^*} \leq \cdots \leq c_{ij_{r_i}^*} \leq c_{ij}, \quad \forall j \in N(i) \setminus \{j_1^*, \cdots, j_{r_i}^*\}
$$

그러면, 初期 整數解에서 1의 값을 취하는 변수들의 指數集合을 $J(i)$, 이때의 할당양을 $\underline{b}_i^*$, 목적함수치를 $\underline{z}_i^*$라 하면 다음과 같다.

$$
J(i) = \{j_1^*, \cdots, j_{r_i}^*\}, \quad \underline{b}_i^* = \sum_{j \in J(i)} a_{ij}, \quad \underline{z}_i^* = \sum_{j \in J(i)} c_{ij}
$$

목적함수의 계수 c_{ij}가 r_i번째로 작은 변수들이 여러 개 존재할 경우에는 해당되는 변수들 중에서 制約式의 계수 a_{ij}가 가장 큰 변수를 1로 설정한다. 위의 初期 整數解가 최적이 되는 할당양 b_i의 구간은 $[0, \underline{b}_i^*]$이다.

4. 解法 및 分析

問題(LGK)에 대한 解法은 앞 장의 一般 特性 및 問題(LGK)에 대한 母數分析特性에 기반하고 있다. 자원양 b_u에 대한 母數分析의 의미를 갖도록 問題(LGK)를 (LGK(b_u))로 표시하고, 목적함수치를 $z(b_u)$라 한다.

定理 3 問題(LGK(b_u))에서 資源量 b_u가 b_u^*일 때의 最適解가 整數解이고, 해당되는 각 副問題(SPi)에서 1의 값을 취하는 변수들의 指數集合을 $J(i)$라 하자. $(\forall i \in I)$ 資源量 b_u가 b_u^*에서 $b_u^* + \alpha$로 증가함에 따라(단, $\alpha > 0$, α는 충분히 작은 수) 증가한 자원 α를 할당해야 할 副問題(SPq) 및 분수값을 취하는 最適 基底變數의 指數 $B_1(q)$, $B_2(q)$는 다음에 의해 결정된다.

$$
\begin{aligned}
& \theta(q, B_1(q), B_2(q)) \\
&= \min_{i \in I} \{\theta(i, B_1(i), B_2(i))\} \qquad (10) \\
&= \min_{i \in I} [\min_{j_1 \in J(i)} \min_{\substack{j_2 \in N(i) \setminus J(i) \\ j_2 > j_1}} \{\theta(i, j_1, j_2)\}]
\end{aligned}
$$

【證明】 가정에 의하여 問題(LGK(b_u^*))의 最適解는 整數解이다. 자원양이 현재의 b_u^*에서 α만큼 증가함에 따라 分數解가 발생한다. 충분히 적은 α에 대해서 分數解가 발생하는 選擇集合은 유일하므로 이 選擇集合에 해당하는 副問題를(SPf)

라 하자. 그러면, (SPf) 이외의 副問題에서는 最適 基底變數의 변함이 없으며, 副問題(SPf)에서 분수값을 취하는 最適 基底變數들은 定理 1에 의해 결정된다. 따라서, 問題(LGK$(b^*_o+\alpha)$)의 최적 목적함수치 $z(b^*_o+\alpha)$는 다음과 같다.

$$z(b^*_o+\alpha)=z(b^*_o)+\alpha\,\theta(f, B_1(f), B_2(f))$$

최적 목적함수치 $z(b^*_o+\alpha)$는 α가 증가함에 따라 副問題(SPf)의 분수값을 취하는 두 基底變數가 이루는 비율로 증가한다. 본 問題는 最小化 問題이므로, 목적함수의 최소증가를 위해서 증가된 자원 α를 할당해야 할 副問題로는 基底變數간의 가장 작은 비율을 형성하는 副問題(SPq)가 선택이 된다. 그러므로 定理의 식(10)이 성립한다. ■

다음 定理 4는 問題(LGK$(\hat{b}_o)$)에 可能解가 존재하면, 定理 3의 반복적용에 의하여 問題(LGK$(\hat{b}_o)$)의 最適解를 항상 찾을 수 있음을 보여준다.

定理 4 問題(LGK(b_o))에서 資源量이 b^*_o일 때의 最適解가 整數解라 하자. 資源量 b^*_o보다 큰 임의의 資源量 $\hat{b}_o$에 대한 最適基底는 주어진 整數解에서 시작하여 定理 3의 반복적용에 의해 구해진다.

【證明】 資源量이 b^*_o일때의 最適解가 整數解이므로 資源量이 증가하면 定理 3에 의해 最適基底行列 B^1이 구해진다. B^1이 최적으로 유지되는 구간은 定理 2에 의해 $0 \le \alpha \le \alpha_1$이다. 여기서, $\alpha_1 = a_{qB_2(q)}-a_{qB_1(q)}$이다. (단, 最適 基底變數들의 指數는 $B^1(1), \cdots, B_1{}^1(q), B_2{}^1(q), \cdots, B^1(|I|)$ 이며, q는 분수해가 발생하는 副問題(SPq)의 指數이다.) $b^*_o+\alpha_1 \ge \hat{b}_o$ 이면, B^1은 자원양 $\hat{b}_o$에서의 最適基底이다. $b^*_o+\alpha_1 < \hat{b}_o$이면, 자원양 $b^*_o+\alpha_1$에서의 問題(LGK$(b^*_o+\alpha_1)$)의 最適解는 整數解이며, 定理 3이 계속 적용 가능하다. 그러므로, 다음을 만족하는 $\tau(\tau \ge 2)$가 존재한다. $(\alpha_i > 0,\ \forall i=1,\cdots,\tau)$

$$b^*_o+\sum_{i=1}^{\tau-1}\alpha_i < \hat{b}_o \le b^*_o+\sum_{i=1}^{\tau}\alpha_i$$

그러므로, 定理 3에 의해 $B^1, B^2, \cdots, B^\tau$가 구해지고, B^τ는 자원양 $\hat{b}_o$일 때의 問題(LGK$(\hat{b}_o)$)에 대한 最適基底가 된다. ■

定理 3 및 定理 4에서 問題(LGK)에 사용될 整數解는 쉽게 구해져야 한다. 본 硏究에서는 初期 整數解로서 최적 목적함수치 $z(b_o)$의 下限値가 발생하는 整數解를 사용한다. 이 整數解는 해당되는 각 副問題(SPi)에서 최적 목적함수치의 下限値에 해당하는 整數解들로부터 구해진다. (3.2절 참조)

問題(LGK)에 사용할 初期 整數解에서 1의 값을 취하는 변수들의 指數集合을 $J(0)$, 이 해가 最適이 되는 b_o의 구간 $[0, \underline{b}^*_o]$의 $\underline{b}^*_o$값 및 최적 목적함수치 $\underline{z}^*_o$는 다음과 같다.

$$J(0)=\bigcup_{i \in I} J(i),\quad \underline{b}^*_o=\sum_{i \in I}\underline{b}^*_i,\quad \underline{z}^*_o=\sum_{i \in I}\underline{z}^*_i$$

다음에는 定理 3 및 定理 4에 기반하여 一般 多重選擇 線型背囊問題의 解法을 제시한다.

解 法

단계 1. 각 選擇集合 $N(i)$의 모든 변수들을 制約式의 계수 a_{ij}가 증가하는 순서로 재배열한다. $(\forall i \in I)$

단계 2. 각 選擇集合 $N(i)$에서 목적함수의 계수 c_{ij}가 가장 작은 처음의 r_i개 변수들의 指數들을 찾고, 해당되는 指數集合을 $J(i)$

라 한다. ($\forall i \in I$) 우변상수 b_0를 다음과 같이 조정한다.

$$\bar{b}_0 = b_0 - \sum_{i \in I} \sum_{j \in J(i)} a_{ij}$$

$\bar{b}_0 \le 0$ 이면, 과정을 끝낸다. 問題(LGK)의 最適解는 다음과 같다.

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \forall j \in J(i),\ i \in I \\ 0, & \forall j \in N(i) \setminus J(i),\ i \in I. \end{cases}$$

$\bar{b}_0 > 0$ 이면, 단계 3으로 간다.

단계 3. 다음을 계산하여 분수해가 발생하는 選擇集合 $N(q)$ 및 분수값을 취하는 변수들의 指數 $B_1(q)$, $B_2(q)$를 결정한다.

$$\theta(q, B_1(q), B_2(q)) = \min_{i \in I}\Big[\min_{j_1 \in J(i)} \min_{\substack{j_2 \in N(i) \setminus J(i) \\ j_2 > j_1}} \{\theta(i, j_1, j_2)\}\Big]$$

指數 $B_2(q)$가 존재하지 않으면, 問題(LGK)는 非可解이다. 과정을 끝낸다.

최소 비율을 갖는 q가 여러 개 존재하면, 가장 작은 指數를 선택한다. 그렇지 않으면, 다음을 비교한다.

$\bar{b}_0 \le a_{qB_2(q)} - a_{qB_1(q)}$ 이면, 단계 5로 간다.

$\bar{b}_0 > a_{qB_2(q)} - a_{qB_1(q)}$ 이면, 단계 4로 간다.

단계4. 資源量 $\bar{b}_0$ 및 指數集合 $J(q)$를 다음과 같이 수정한다.

$$\bar{b}_0 \leftarrow \bar{b}_0 - (a_{qB_2(q)} - a_{qB_1(q)})$$

$$J(q) \leftarrow J(q) \cup \{B_2(q)\} \setminus \{B_1(q)\}$$

단계 3으로 간다.

단계 5. 最適解는 다음과 같다. 과정을 끝낸다.

$$x_{ij} = \begin{cases} \left[\begin{array}{ll} 1, & \forall j \in J(i) \\ 0, & \forall j \in N(i) \setminus J(i) \end{array}\right] & i \in I,\ i \neq q \\[2ex] \left[\begin{array}{ll} \dfrac{a_{qB_2(q)} - a_{qB_1(q)} - \bar{b}_0}{a_{qB_2(q)} - a_{qB_1(q)}}, & j = B_1(q) \\ \dfrac{\bar{b}_0}{a_{qB_2(q)} - a_{qB_1(q)}}, & j = B_2(q) \\ 1, \quad \forall j \in J(q), & j \neq B_1(q) \\ 0, \quad \forall j \in N(q) \setminus J(q), & j \neq B_2(q) \end{array}\right] & i = q \end{cases}$$

解法의 단계 3에서 최소 비율을 갖는 지수 q가 여러 개 존재할 경우, 최적조건을 만족하는 각 q에 대해 代案 最適解가 발생한다.

解法의 단계 1은 각 選擇集合마다 모든 변수들을 크기순으로 재배열하는 작업이므로 計算上 複雜度는 $O(\sum_i n_i \log(n_i))$이다. 단계 2는 각 選擇集合마다 목적함수의 계수가 가장 작은 r_i개 변수의 지수를 찾는 작업이므로 複雜度는 $0(\sum_i n_i)$이다. 단계 3에서 각 選擇集合에서의 최소의 비율은 $0(r_i n_i)$로서 계산되며, 따라서 모든 選擇集合에 대한 최소의 비율은 $0(n \cdot n_{max})$로서 계산된다. (n은 변수들의 총수, n_{max}는 각 選擇集合들의 원소수들중 최대수이다.) 단계 4 및 단계 5의 計算上 複雜度는 무시할 수 있다. 이상으로부터 解法(단계 3 및 단계 4)이 한회 적용될 때의 複雜度는 $0(n \cdot n_{max})$이다. 각 副問題에 대해 위의 解法이 r_i회 적용될 때마다 적어도 하나의 변수는 제거가 능하므로 解法이 적용될 수 있는 주요회수는 최대한 $\sum_i r_i n_i \le n \cdot n_{max}$ 이다. 따라서, 위 解法에 대한 計算上 複雜度는 $0((n \cdot n_{max})^2)$이다.

5. 數値例題

다음과 같은 一般 多重選擇 線型背囊問題(LGK)의 最適解를 구한다.

$$(\text{LGK}): \text{Minimize} \sum_{i\in I}\sum_{j\in N(i)} c_{ij}x_{ij},$$

$$\text{s.t.} \sum_{i\in I}\sum_{j\in N(i)} a_{ij}x_{ij} \geq 60,$$

$$\sum_{j\in N(1)} x_{1j}=2,$$

$$\sum_{j\in N(2)} x_{2j}=3,$$

$$0 \leq x_{ij} \leq 1,\ \forall j \in N(i) = \{1, \cdots, 6\},\ i \in I=\{1, 2\}.$$

c_{ij} 및 a_{ij}는 다음 표와 같다.

i	c_{ij}, a_{ij} \ j	1	2	3	4	5	6
1	c_{1j}	5	3	6	9	10	15
	a_{1j}	3	7	13	21	28	30
2	c_{2j}	8	5	7	9	11	17
	a_{2j}	3	5	9	15	24	30

〈1 회〉

단계 1. a_{ij}들은 증가하는 순서대로 배열됨. ($\forall j \in N(i), i=1, 2$)

단계 2. $J(1)=\{1, 2\},\ J(2)=\{1, 2, 3\}$

$\bar{b}_0=60-(3+7)-(3+5+9)=33>0$

단계 3. $\min_{i\in I}[\min_{j_1\in J(i)}\min_{j_2\in N(i)\setminus J(i),\ j_2>j_1}\{\theta(i, j_1, j_2)\}]=\theta(2, 1, 4)=1/12$

$\bar{b}_0(=33)>a_{24}-a_{21}(=15-3)$

단계 4. $\bar{b}_0=33-12=21$

$J(1)=\{1, 2\}, J(2)=\{2, 3, 4\}$, 단계 3으로 간다.

〈2 회〉

단계 3. $\min_{i\in I}[\min_{j_1\in J(i)}\min_{j_2\in N(i)\setminus J(i),\ j_2>j_1}\{\theta(i, j_1, j_2)\}]=\theta(1, 1, 3)=1/10$

$\bar{b}_0(=21)>a_{13}-a_{11}(=13-3)$

단계 4. $\bar{b}_0=21-10=11$

$J(1)=\{2, 3\}, J(2)=\{2, 3, 4\}$, 단계 3으로 간다.

〈3회〉

단계 3. $\min_{i\in I}[\min_{j_1\in J(i)}\min_{j_2\in N(i)\setminus J(i),\ j_2>j_1}\{\theta(i, j_1, j_2)\}]=\theta(2, 4, 5)=2/9$

$\bar{b}_0(=11)>a_{25}-a_{24}(=24-15)$

단계 4. $\bar{b}_0=11-9=2$

$J(1)=\{2, 3\}, J(2)=\{2, 3, 5\}$, 단계 3으로 간다.

〈4 회〉

단계 3. $\min_{i\in I}[\min_{j_1\in J(i)}\min_{j_2\in N(i)\setminus J(i),\ j_2>j_1}\{\theta(i, j_1, j_2)\}]=\theta(1, 3, 5)=4/15$

$\bar{b}_0(=2)<a_{15}-a_{13}(=28-13)$, 단계 5로 간다.

단계 5. 最適解는 다음과 같다.

$x_{12}=1, x_{13}=13/15, x_{15}=2/15, x_{1j}=0,\ \forall j \neq 2, 3, 5$

$x_{22}=x_{23}=x_{25}=1, x_{2j}=0, \forall j \neq 2, 3, 5$

6. 結論 및 討議

본 研究에서는 기존의 多重選擇 線型背囊問題를 특수한 경우로서 포함하는 새로운 一般 多重選擇 線型背囊問題를 제시하고, 一般 特性을 연구하여 효율적인 解法을 개발하였다. 一般化에 수반된 난점들을 해결하기 위하여 母數分析의 概念을 도입하였으며, 제시된 解法의 計算上 複雜度는 $O((n \cdot n_{max})^2)$이다. 여기서, n은 총 변수의

수, n_{max}는 각 選擇集合들의 원소수들중 최대수를 의미한다.

一般 多重選擇 線型背囊問題에서 모든 選擇常數의 값이 1이 되는 특수한 경우, 分枝限界技法에 활용될 수 있는 기존의 가장 효율적인 解法〔6〕은 그 複雜度가 $0(n\log(n_{max}))+0(m\log^2(n/m))$이다. (m은 選擇集合들의 수이다.) 이 경우 본 硏究에서 제시한 解法의 복잡도는 $0(n^2)$이나, 이는 一般化에 기인한 결과라고 생각된다.

본 硏究의 定理들에 사용된 母數分析에서는 자원할당양이 증가하는 경우만 고려하였으나, 동일한 논리로 자원할당양이 감소하는 경우에로도 전개 가능하다. 分枝限界解法의 여러 후보문제에 대한 線型緩和問題에 사용할 경우, 쉽게 구해지는 整數解에 따라 증가나 감소하는 형태의 母數分析을 적용하므로써 더욱 효율적으로 最適解를 찾을 수 있다.

參考文獻

1. Armstrong, R.D., Kung, D.S., Sinha, P., and Zoltners, A.A., "A Computational Study of a Multiple-Choice Knapsack Problem," *J. ACM.* 9, pp. 184~198, 1983.
2. Armstrong, R.D., Sinha, P., and Zoltners, A.A., "The Multiple Choice Nested Knapsack Model," *Management Sci.* 28, pp. 34~43, 1982.
3. Balas, E. and Zemel, E., "An Algorithm for Large Zero-One Knapsack Problems," *Opns. Res.* 28, pp. 1130~1154, 1980.
4. Balintfy, J.L., Ross, G.T., Sinha, P., and Zoltners, A.A., "Mathematical Programming System for Preference and Compatibility Maximized Menu Planning and Scheduling," *Math. Progr.* 15, pp. 63~76, 1978.
5. Beale, E.M.L. and Forrest, J.J.H., "Global Optimization Using Special Ordered Sets," *Math. Progr.* 10, pp. 52~69, 1976.
6. Dudzinski, K. and Walukiewicz, S., "A Fast Algorithm for the Linear Multiple-Choice Knapsack Problem," *Opns. Res. Letters.* 3, pp. 205~209, 1984.
7. Dyer, M.E., "An o(n) Algorithm for the Multiple-Choice Knapsack Linear Problem," *Math. Progr.* 29, pp. 57~63, 1984.
8. Fisher, M.L., "Optimal Solution of Scheduling Problems Using Lagrange Multipliers : Part I," *Opns. Res.* 21, pp. 1114~1127, 1973.

9. Garey, M. R. and Johnson, D. S., *Computers and Intractibility-A Guide to the Theory of NP-Completeness*, Freeman, San Francisco, 1979.

10. Geoffrion, A. M. and Marsten, R. E., "Integer Programming Algorithms : A Framework and State-of-the-art Survey," *Management Sci.* 18, pp. 465~491, 1972.

11. Glover, F., "Surrogate Constraint Duality in Mathematical Programming," *Opns. Res.* 23, pp. 434~451, 1975.

12. Glover, F. and Klingman, D., "A O(nlogn) Algorithm for LP Knapsacks with GUB Constraints," *Math. Progr.* 17, pp. 345~361, 1979.

13. Healy, W. Jr., "Multiple Choice Programming," *Opns. Res.* 12, pp. 122~138, 1964.

14. Hummeltenberg, W., "Implementations of Special Ordered Sets in MP Software," *Europ. J. Opnl Res.* 17, pp. 1~15, 1984.

15. Ibaraki, T., "Approximate Algorithms for the Multiple-Choice Continuous Knapsack Problems," *J. Opnl Res. Soc. of Japan.* 23, pp. 28~63, 1980.

16. Johnson, E. L. and Padberg, M. W., "A Note on the Knapsack Problem with Special Ordered Sets," *Opns. Res. Letters.* 1, pp. 18~22, 1981.

17. Johnson, M., Zolters, A., and Sinha, P., "An Allocation Model for Catalog Space Planning," *Management Sci.* 25, pp. 117~129, 1979.

18. Lasdon, L. S. and Terjung, R. C., "An Efficient Algorithm for Multi-Item Scheduling," *Opns. Res.* 19, pp. 946~969, 1971.

19. Lorie, J. and Savage, L., "Three Problems in Capital Rationing," *J. Buiness.* 28, pp. 229~239, 1955.

20. Martin, K. and Sweeney, D., "An Ideal Column Algorithm for Integer Programs with Special Ordered Sets of Variables," *Math. Progr.* 26, pp. 48~63, 1983.

21. Nauss, R. M., "The 0-1 Knapsack Problem with Multiple-Choice Constraints," *Europ. J. Opnl Res.* 2, pp. 125~131, 1978.

22. Pressmar, D. B., "Formulation of Multiple-Choice Situations in Linear Programming Models Using Binary Coding Matrices," *Europ. J. Opnl Res.* 21, pp. 106~112, 1985.

23. Sinha, P. and Zoltners, A. A., "The Multiple Choice Knapsack Problem," *Opns. Res.* 27, pp. 503~515, 1979.

24. Zemel, E., "The Linear Multiple Choice Knapsack Problem," *Opns. Res.* 28, pp. 1412～1423, 1980.

25. Zoltners, A. A. and Sinha, P., "Integer Programming Models for Sales Resource Allocation," *Management Sci.* 26, pp. 242～260, 1980.

26. 元重淵, 鄭聖進, "修正된 多重選擇 背囊問題의 解法에 관한 硏究," 大韓產業工學會誌, 第9券, 第2號, pp. 3～8, 1983.

27. 元重淵, "一般 多重選擇 背囊問題," 博士學位論文, 서울대학교, 1989, 12.