Journal of the Korean
OR/MS Society
Vol.15, No.1, June,1990

제약을 갖는 최적화문제에 대한 파라메트릭 접근법과 구조문제의 최적화에 대한 응용*

양용준** · 김원석***

A Method using Parametric Approach for Constrained Optimization and its Application to a System of Structural Optimization Problems*

Y. J. Yang** · W. S. Kim***

Abstract

This paper describes two algorithms to Nonlinear programming problems with equality constraints and with equality and inequality constraints.

The first method treats nonlinear programming problems with equality constraints. Utilizing the nonlinear parametric programming technique, the method solves the problem by imbedding it into a suitable one-parameter family of problems. The second method is to solve a nonlinear programming problem with equality and inequality constraints, by minimizing a square sum of nonlinear functions which is derived from the Kuhn-Tucker condition.

Finally, computational results of two algorithms of solving a structural optimization problem are give.

---

* 본 논문은 1988년도 문교부지원 한국학술진흥재단의 자유공모과제 학술연구조성비에 의하여 연구되었음.
** 인하대학교 전자계산학과
*** 강릉대학 수학과

1. 서론

최적화문제에 있어서 등식제약조건과 부등식제약조건을 갖는 비선형계획문제는 이학 및 공학의 여러 계획분야에 자주 나타나는 문제이다. 본 논문은 구조물설계문제의 최적해를 구하기 위하여 두가지 방법을 제안한다. 처음 방법은 등식제약조건을 갖는 비선형계획문제의 해를 구하기 위하여 우선 풀려고 하는 문제와 이미 해를 알고 있는 같은 차원의 문제를 정의하고 파라메터에 의해 하나의 문제로 정식화한다. 이와 같이 정식화한 문제에 대하여 파라메터 $t=0$일 때 이미 알고 있는 문제로 되고 $t=\infty$일때는 구하려고 하는 문제로 되므로 $t=0$로 부터 $t=\infty$일때 까지 Kuhn-Tucker의 2차충분조건을 만족하는 알고리즘을 제안한다 [1, 5, 6, 9].

두번째 방법은 등식과 부등식제약조건을 갖는 비선형계획문제의 해를 구하기 위하여 정식화된 문제는 Kuhn-Tucker의 조건으로부터 유도한 비선형자승합으로 된 제약조건이 없는 최소화문제로 유도할 수 있다. 최적해를 구하는 방법으로서 미지수, 즉 변수와 Lagrange 승수에 대하여 Kuhn-Tucker의 조건을 만족하는 점을 찾는 알고리즘을 제안한다. 등식제약조건과 부등식제약조건을 갖는 비선형계획문제를 제약조건이 없는 최소자승문제로 유도하여 최적해를 구하는 연구로는 Luenberger[3]가 있다. 이 반복법은 Kuhn-Tucker의 조건에 기본을 두고 있다. 등식 및 부등식조건을 갖는 문제에 대하여 확장된 Lagrange함수를 이용하는 연구로는 Hestenes[2], Powell[7], Rockafellor[8] 등이 있다.

2절에서는 등식제약조건을 갖는 비선형계획문제를 정의하고 정의된 문제와 같은 차원의 문제를 도입하여 파라메트릭 비선형계획문제로 정식화한다. 정식화된 문제에 대하여 최적해가 만족해야 할 2차 충분조건을 구한다.

구해진 2차 충분조건에 의해 알고리즘을 제안한다. 3장에서는 등식과 부등식제약을 갖는 경우에 문제를 정의하고 Lagrange 함수로 표시한 다음 Kuhn - Tucker의 조건을 도입하고 Kuhn - Tucker의 조건에 맞도록 알고리즘을 제안한다. 4장에서는 실제 구조물 최적화 문제에 대하여 위의 알고리즘들을 적용하여 컴퓨터에 의해 계산함으로써 두 개의 알고리즘이 동등하게 최적해에 도달함을 보인다.

2. 파레메트릭 비선형계획 문제

풀어야 할 비선형계획 문제틀

$$\text{minimize} \quad f_1(x)$$

$$\text{subject to} \quad g_1(x) = 0 \quad a \le x \le b, \qquad (1)$$

이라 하자. 여기서 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$는 n차원 백터이고 함수 $f_1 : R^n \to R$, $g_1=(g_1, g_2, \cdots, g_m) : R^n \to R^m$는 x에 대하여 2회 연속미분가능이라 하자. 여기서 이미 해 x^0를 알고 있는 문제

$$\text{minimize} \quad f_0(x)$$

$$\text{subject to} \quad g_0(x) = 0 \quad a \le x \le b, \qquad (2)$$

를 도입한다. f_0와 g_0는 위의 문제(1)에서 $f_1(x)$, $g_1(x)$와 같은 차원이다. 문제(1)과 문제(2)를 파라메트릭 문제

$$\text{minimize} \quad (1-e^{-t})f_1(x) + e^{-t} f_0(x)$$
$$\text{subject to} \quad (1-e^{-t})g_1(x) + e^{-t}g_0(x) = 0,\ a \le x \le b, \tag{3}$$

로 변환 할 수가 있다. t는 스칼라 파라메터이다. 문제(1)의 최적해는 문제(3)을 초기값 $x=x^0$, $t=0$를 가시고 출발하고 $t=\infty$까지 t를 증가하면서 계산하면 얻을 수 있다.

기호를 간단하게 하기 위하여 $f(x,t)=(1-e^{-t})f_1(x)+e^{-t}f_0(x)$, $g(x,t)=(1-e^{-t})g_1(x)+e^{-t}g_0(x)$로 표시하면 문제(3)은 $t \in T$에 대하여

$$\text{minimize} \quad f(x,t)$$
$$\text{subject to} \quad g(x,t)=0,\quad a \le x \le b, \tag{4}$$

와 같이 쓸 수 있다. 여기서 $T=[0, +\infty)$이다.

문제(4)에 대하여 음함수 정리를 응용하면 다음의 비퇴화가정(nondegeneracy assumption)을 얻는다. 즉, $g(x,t)=0$, $a \le x \le b$을 만족하는 실행가능해 x와 $t \in T$에 대하여 $(m \times m)$ 행렬 $\nabla_y g(y,z,t)$, $a_y \le y \le b_y$가 정측(nonsingular)일 때 x를 m차원벡터 y와 (n-m)차원벡터 z로 분할 할수 가 있다. y를 기저변수, z를 비기저변수라 한다. $x=(y,z)$에 대하여 행렬 $\nabla_x f(x,t)$와 $\nabla_x g(x,t)$는 $[\nabla_y f(x,t), \nabla_z f(x,t)]$, $[\nabla_y g(x,t), \nabla_z g(x,t)]$로 각각 분할 할 수 있다. $\bar{t} \in T$에 대하여 $\bar{x}$가 문제(4)의 실행가능해라고 하자. 비퇴화가정에 의해 비선형 방정식 $g(y,z,t)=0$ (5) 을 $(\bar{z},\bar{t})$의 근방에서 모든 (z,t)에 관하여 풀어서 결정할 수 있는 2회 미분가능함수 $h: R^{n-m} \times T \to R^m$을 구할 수 있다. 즉,

$$\bar{y}=h(\bar{z},\bar{t}),\quad g(h(z,t),z,t)=0 \tag{6}$$

이다. 따라서 다음의 파라메틱 문제 즉 $t \in T$에 대하여

$$\text{minimize} \quad F(z,t) \triangleq f(h(z,t),z,t)$$
$$\text{subject to} \quad a_z \le z \le b_z \tag{7}$$

여기서 h는 방정식(5)에서 정의한 음함수이고 목적함수 F는 x와 t에 대하여 2회 연속 미분가능한 함수이다.

문제(4)와 (6)에 대한 국소 최소값을 구하기 위하여 2차 충분조건을 구해보자. 구배(gradient) $\nabla_z F(z,t)$와 Hessian행렬 $\nabla^2_{zz} F(z,t)$는 f와 g의 구배와 Hessian으로 나타낸다.

$$\nabla_z F(z,t)=\nabla_z f(h(z,t),z,t)+\nabla_y f(h(z,t),z,t)\nabla_z h(z,t) \tag{8}$$

z에 관하여 방정식(6)을 미분하면

$$\nabla_z g(h(z,t),z,t)+\nabla_y g((z,t),z,t)\nabla_z h(z,t)=0 \tag{9}$$

이 된다. 행렬 $\nabla_y g(h(z,t),z,t)$는 정측이므로 식(8)과 식(9)에서 $\nabla_z h(z,t)$를 소거하면

$$\nabla_z F(z,t)=\nabla_z f(h(z,t),z,t)-\nabla_y f(h(z,t),z,t)[\nabla_y g(h(z,t),z,t]^{-1}\nabla_z g(h(z,t),z,t) \tag{10}$$

을 얻는다

$$\lambda(x,t) \triangleq \nabla_y f(x,t)[\nabla_y g(z,y)]^{-1} \tag{11}$$

라 놓으면 식(10)은

$$\nabla_z F(z,t)=\nabla_z f(h(z,t),z,t)-\lambda(h(z,t)z,t)\nabla_z g(h(z,t),z,t) \tag{12}$$

로 쓸 수 있다. 식(11)은

$\nabla_y f(h(z,t),z,t)-\lambda(h(z,t),z,t)\nabla_y g(h(z,t),z,t)=0$를 의미하므로 이것을 z에 관하여 미분하면

$$\nabla^2_{yz}f-\lambda\nabla^2_{yz}g+[\nabla^2_{yy}f-\lambda\nabla^2_{yy}g]\nabla_z h-\nabla_y g\ \frac{Td\lambda}{dz}=0 \tag{13}$$

가 된다. 여기서 예를 들면

$$\lambda\nabla^2_{yy}g=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\nabla^2_{yy}g_i$$

이다. 마찬가지로 식(12)를 미분하면

$$\nabla^2_{zz}F(z,t)=\nabla^2_{zz}F-\lambda\nabla^2_{zz}g+[\nabla^2_{zy}f-\lambda\nabla^2_{zy}g]\nabla_z h-\nabla_z g\ \frac{Td\lambda}{dz}=0 \tag{14}$$

이 되고 식(14)에서 식(9)와 식(13)을 이용하면

$$\nabla^2_{zz}F(z,t)=[\nabla^2_{zh}{}^T,\ I_{n-m}]\begin{bmatrix}\nabla^2_{yy}f-\lambda\nabla^2_{yy}g & \nabla^2_{yz}f-\lambda\nabla^2_{yz}g- & -\nabla_z h\\ \nabla^2_{zy}f-\lambda\nabla^2_{zy}g & \nabla^2_{zz}f-\lambda\nabla^2_{zz}g- & -I_{n-m}\end{bmatrix}$$

$$=r^T[\nabla^2_{xx}f-\lambda\nabla^2_{xx}g]r \tag{15}$$

단,

$$r=\begin{bmatrix}-\nabla_{yg}{}^{-1}\nabla_z g\\ I_{n-m}\end{bmatrix}$$

이다. 여기서 문제(4)와 (7)에서 국소적 최소값에 대한 2차충분조건을 생각하여보자. 보다 일반적인 조건에 대하여는 다른 연구에 많이 언급되어 있으로 (예를들면 [4]) 여기서 증명은 피한다. $t\in T$ 에 대하여 $x(t)$가 $g(x(t),t)=0$, $a_i\le x_i\le b_i$를 만족하고

$\nabla x_I f(x(t),t)-\lambda\nabla x_I g(x(t),t)=0$, $a_i\le x_i\le b_i$

$x_{J1}=a_{J1}\nabla x_{J1}f(x(t),t)-\lambda\nabla x_{J1}g(x(t),t)\ge 0$

$x_{J2}=b_{J2}\nabla x_{J2}f(x(t),t)-\lambda\nabla x_{J2}g(x(t),t)\le 0$

$s^T[\nabla^2_{xx}f(x(t),t)-\lambda\nabla^2_{xx}(x(t),t)]s>0$

를 만족하는 λ가 존재하면 $x(t)$는 문제(4)의 국소적 최소값이다. 여기서 $I\cup J_1\cup J_2=\{1,2,\cdots,n\}$이다. $\nabla_x g(x(t),t)s=0$ 인 $s\in R^n$는 0이 아닌 벡터이며, $i\in\{i:[\nabla_x f(x(t),t)-\lambda\nabla_x g(x(t),t]i>0\}$에 대하여 $s_i=0$ 이다.

$t\in T$에 대하여 $z(t)$가

$\nabla_{zI}F(z(t),t)=0$ $a_I\le z_I\le b_I$

$z_{J_1}=b_{J_1}$ $\nabla_{zJ_1}F(z(t),t)z(t)\ge 0$

$z_{J_2}=b_{J_2}$ $\nabla_{zJ_2}F(z(t),t)z(t)\le 0$

$v^T\nabla^2_{zz}F(z(t),t)v>0$

를 만족하면 $z(t)$는 문제(7)의 국소적 최소값이다. 여기서 $I\cup J_1\cup J_2=\{1,2,\ldots,n\text{-}m\}$이다. $v\in R^{n-m}$은 0이 아닌 벡터이고, $j\in\{j:\nabla z_j F(z(t),t)>0\}$에 대하여는 $v_j=0$ 이다.

문제(4)와 문제(7)에 있어서의 2차 충분조건의 증명에 대해서는 이미 앞의 연구에서 언급되었으므로 여기서는 생략한다[6]. 모든 $t\in T$에 대하여 $x(t)$가 문제(4)와 (7)의 2차 충분조건을 만족하므로 문제(4)를 풀기위한 알고리즘을 제안할 수 있다.

알고리즘 1

step 1.1 : $t=0$에 대하여 적당한 방법으로 문제 (4)의 최적해 $x(0)$를 구한다. 충분히 작은수 $\gamma \geq 0$을 정하고 $t'=0$로 놓고 step 1.2로 간다.

step 1.2 : x를 기저변수 y와 비기저변수 z로 분할한다. 이때 대응하는 기저행렬은 정측(nonsingular)이고 $y(t')$의 모든 요소는 γ보다 크게 하도록 한다. step 1.3으로 간다.

step 1.3 : $\{j : \nabla z_j F(z(t'), t') > 0\} \subset J_1 \subset \{j ; z_j (t') = a_j\}$

$\{j : \nabla z_j F(z(t'), t') < 0\} \subset J_2 \subset \{j ; z_j (t') = b_j\}$

를 만족하는 집합 I와 J를 정한다. 이때 $J=J_1 \cup J_2$이고 $I=\{1, 2, \ldots, n-m\}-J$이다. step 1.4로 간다.

step 1.4 : 방정식

$$\nabla z_I F(z, t) = 0$$

$$z_{J1} = a_{J1}$$

$$z_{J2} = a_{J2} \qquad (16)$$

를 계산하여 해 $z(t)$를 얻는다. z_I와z_J는 각각 z_i, $i \in T$와 z_j, $j \in T$인 벡터이다. $y(t)h(z(t), t)$를 구하기 위하여 t를 t'로부터 $t=t^0 \triangleq \min\{t^*, t^{**}\}$까지 증가시키면서 방정식 (5)를 푼다. 이때 t^*와 t^{**}는

$t^* = \sup\{t ; a_i + \tau < y_i(\tau) < b_i - \tau,\ t' < \tau < t < +\infty$ 를 만족하는 모든 τ에 대하여

$t^{**} = \sup\{t ; \nabla z_{J1} F(z(\tau), \tau) \geq 0,\ \nabla z_{J2} F(z(\tau), \tau) \leq 0,\ a_i \leq z_i \leq b_i,\ t' \leq \tau \leq t \leq \infty$를 만족하는 모든 τ에 대하여$\}$ (17)

이다. step 1.5 로 간다.

step 1.5 : $t^0=\infty$이면 완료한다. 그렇지않으면 $t'=t^0$로 놓고 $t^0=t^*$이면 step 1.2로 가고 $t^0=t^{**}$이면 step 1.3으로 간다.

3. 등식과 부등식제약을 갖는 비선형계획 문제

등식과 부등식 제약을 갖는 비선형계획 문제

최소화 $f(x)$ (18)

제약조건 $g_j(x)=0 \quad (j=1, 2, \cdots, 1)$

$h_i(x) \leq 0 \quad (i=1, 2, \cdots, m)$

를 생각하여 보자. 여기서 $f : R^n \to R^1$, $g_j : R^n \to R^1 (j=1, 2, \cdots, 1)$, $h_i : R^n \to R^1 (i=1, 2 \cdots, m)$인 실수치 함수이고, $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in R^n$이다.

문제 (18) 의 국소적 최소치(local minimum)를 구하기 위하여 문제(18)의 Lagrange 함수 $\phi(x, \lambda, \mu)$를 도입한다.

$$\phi(x, \lambda, \mu) = f(x) + \lambda h(x) + \mu g(x)$$

여기서 $\lambda=(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \in R^m$, $\mu=(\mu_1, \mu_2, \cdots \mu_1) \in R^1$,

$h(x) = (h_1(x), h_2(x), \cdots, g_m(x))$, $g(x) = (g_1(x), g_2(x), \cdots, g_1(x))$이다. $f, g_j (j=1, 2, \cdots, 1)$, $h_i (i=1, 2, \cdots, m)$는 R^n에서 3회 연속미분 가능하다고 가정한다. $\partial g(x)/\partial x$와 $\partial h(x)/\partial x$ 는 $\partial g_i(x)/\partial x_j$와 $\partial h_i(x)/\partial x_j$로서 (i, j) 요소를 갖는 $1 \times n$ 및 $m \times n$ Jacobian 행렬이다.

ϕx 와 ϕxx 는 각각 요소 $\partial \phi/\partial x_i$인 구배(gradient) 행벡터와 요소 $\partial^2 \phi/\partial x_i \partial x_j$인 (i, j)

Hessian 행렬이라 하자.

문제(18)의 국소적 최소치에 대하여 잘 알려진 정리(예를들면 Fiacco-McCormick, 1964)를 도입한다.

〔정리 1〕 다음의 조건 (1)-(6)이 만족한다면 x는 문제(18)의 극소치이다.

$V(h_i(\bar{x}=))^*_x=0 \qquad (i \in \bar{B})$ 와

$V(g_j(\bar{x})^*_x=0 \qquad (j=1, 2, \cdots, 1)$

를 만족하는 0이 아닌 v에 대하여

(1) $h(\bar{x}) \leq 0$

(2) $g(\bar{x}) = 0$

(3) $h(\bar{x})(\mathrm{diag}(\bar{\lambda})) = 0$

(4) $\bar{\lambda}_i > 0$ (모든 $i \in \bar{B} = \{i : h_i(x) = 0\}$ 에 대하여)

(5) $\phi_x(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) = 0$

(6) $V\phi_{xx}(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu})V^* > 0$

을 만족한다고 하자. 여기서 diag $\bar{\lambda}$는 i 번째의 대각 요소인 $\bar{\lambda}_i$를 갖는 대각행렬이다. *는 전치를 의미한다. 또한 벡터

(7) $\{h_i(\bar{x}))_x ; i \in \bar{B}\}, \{(g_j(\bar{x})_x ; j=1, 2, \cdots, 1\}$

은 1차 독립이라고 하자.

기호를 간단히 표시하기위해 (n+m+1)차원 벡터 (x, λ, μ)를 z로 나타내고 조건 (1)-(7)을 만족하는 $(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu})$를 $\bar{z}$ 표시하기로 한다.

문제(18)의 국소적 최적치를 구하는 반복법을 생각하여보자.

문제(18)을 풀기위해 제약이 없는 문제

$$E(z) = \| \phi_x(z) \|^2 + \sum_{i=1}^{m} (\lambda_i h_i(x))^2 + \sum_{j=1}^{l} (g_j(x))^2 \tag{19}$$

를 최소화하는 방법에 기본을 둔 반복법 〔10〕을 적용한다.

$\bar{z}$가 조건 (1)-(7)을 만족한다면 $\bar{z}$는 문제(18)의 국소적 최소치이고, E(z)=0이다. 문제(19)를 최소화하기 위해 반복법

$$Z^{(k+1)} = z^{(k)} - \alpha \frac{1}{\| A(z^k) \|_E^2} y(Z^k) A(Z^k) \tag{20}$$

을 제안했다〔10〕.

$$y(z) = (\phi_{xx}(z), h(x)(\mathrm{diag}(\lambda)), g(x))$$

$$A(z) = \begin{bmatrix} \phi_{xx}(z) & (\partial h(x)/\partial x)^* & (\partial g(x)/\partial x)^* \\ \mathrm{diag}(\lambda)(\partial h(x)/\partial x) & \mathrm{diag}\ h(x) & 0 \\ \partial g(x)/\partial x & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

이고 α는 $0<\alpha<2$를 만족하는 상수이다. $\|A(z)\|_E$는 행렬A(z)의 Euclidean norm 을 의미한다. 여기서 $W=(\lambda, \mu)$인 (m+1)차원 벡터 W를 도입한다. 그러면 A(z)는

$A(z) = (A_1(z), A_2(z))$와 같이 분할 할 수가 있다. 여기서

$$A_1(z) = \begin{bmatrix} \phi_{xx}(z) \\ \mathrm{diag}(\lambda)(\partial h(x)/\partial x) \\ \partial g(x)/\partial x \end{bmatrix}$$

$$A_2(z) = \begin{bmatrix} (\partial h(x)/\partial x)^* & (\partial g(x)/\partial x)^* \\ \mathrm{diag}\ h(x) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

이다.

$Z=(X, W)$로 두면 문제(18)를 풀기위해 식 (19)로 부터

$$\min_z E(z) = \min_x \min_w E(X, W)$$

이 됨은 분명하다.

따라서 E(z)를 최소화하는 대신 E(X, W)를 처음에 x를 고정시키고 W에 대하여 최소화한 다음

$\bar{W}(x)$를 이용하여 $E(x, \bar{W}(x))$를 X에 관하여 최소화 함으로써 $E(X, W)$를 최소화 하는 방법을 제안한다. 식(19) 의 $E(X, W)$는

$$E(x, w) = \|A_2(x)w^* + (f_x(x), 0, g(x))^*\|^2$$

와 같이 쓸 수 있으므로 x를 고정시키고 w에 관하여 $E(x, w)$를 최소화하기 위해서는 1차 방정식

$$A_2(x)w^* + (f_x(x), 0, g(x))^* = 0$$

을 (최소노름의 의미에서) 풀면 충분하다. 고정된 x에 대하여 $E(x, w)$를 최소하하는 w의 값은 $A_2(x)^*A_2(x)w^* = -A_2(x)^*(f_x(x), 0, g(x))^*$에 의해 결정할 수 있다. 결정된 w의 값을 가지고 x에 관하여 $E(x, w)$를 최소화 한다. 최기값 $x^{(0)}$가 주어졌다고 하자. $x^{(0)}$에 대응하여 $E(x^{(0)}, w)$를 최소화하는 Lagrange 승수 $w^{(1)} = (\lambda^{(1)}, \mu^{(1)})$을 구할 수 있다. 즉, $w^{(1)}$은 다음의 (m+1)개 의 1차 방정식

$$A_2(x^{(0)})^*A_2(x^{(0)})w^* = -A_2(x^{(0)})^*(f_x(x^{(0)}), 0, g(x^{(0)}))^*$$

을 풀어 구할 수 있다. $w^{(1)}$에 의해 문제(18)을 풀기 위하여 $x^{(1)}$은 $E(x, w^{(1)})$을 최소화함으로써 얻을 수 있다. 위의 과정을 정리하여 최적해 $\bar{x}$를 구하는 알고리즘을 구한다.

알고리즘 2

step 2. 1 : 초기값 $x^{(0)}$를 정한다. k=0로 놓고 $\varepsilon > 0$를 결정한다.

step 2. 2 : (m+1)개의 1차방정식 $A_2(X^{(k)})^*A_2(X^{(k)})W^* = -A_2(X^{(k)})^*(f_x(X^{(k)}), 0, g(X^{(k)}))^*$을 풀어 해 $W^{(k+1)} = (\lambda^{(k+1)}, \mu^{(k+1)})$로 놓는다.

step 2. 3 : $E(X, W^{(k+1)})$를 최소로 하는 $X^{(k+1)}$를 구한다. $\max_j |X_j^{(k+1)} - X_j^{(k)}| < \varepsilon$이면 끝내고 아니면 k=k+1로 두고 step 2. 2로 간다.

위의 step 2. 3에서 $X^{(k+1)}$을 구하는 방법으로는 $E(x, w^{(k+1)})$이 비선형자승합의 형식으로 반복법 〔10〕을 적용한다. 즉 $E(x, w^{(k+1)})$을 최소화 하기 위해 p=0로 놓고 $\hat{x}^{(0)} = x^{(k)}$로 둔다. $\hat{x}^{(p+1)}$은 $\hat{X}^{(p+1)} = \hat{x}^{(p)} - \{\alpha\ y(\hat{x}^{(p)}, w^{(k+1)})A_1(\hat{x}^{(p)}, w^{(k+1)}) / \|A_1(\hat{x}^{(p)}, w^{(k+1)}\|_E^2$에 의해 계산한다. $\max_j |\hat{x}_j^{(p+1)} - \hat{x}_j^{(p)}| < \varepsilon_1$이면 끝낸다. 여기서 ε_1은 초기값 $x^{(k)}$에 대해 충분히 작도록 정한다. α는 $0 < \alpha < 2$를 만족하도록 정한다. $x^{(k+1)} = \hat{x}^{(p+1)}$로 둔다. 위의 알고리즘의 반복법에 대한 국소적 수렴정리에 관해서는 생략한다. 〔10〕

4. 구조물 최적화문제

아래 그림은 빔(beam)의 I 형 단면도이다. 이 빔의 상하표면에 있어서 휨 모멘트(bending moment) M을 갖는 최대응력(stress) σ_{max}는

$$\sigma_{max} = M/[T_w \cdot H^3/12(H/2+T_f) + (H/2+T_f)BT_f] \quad (21)$$

로 주어져 있다. 이 경우 응력 σ_{max}는 허용응력 σ_{all}보다는 크지 않다는 필요조건이 있다. 즉,

$$\sigma_{max} \le \sigma_{all} \quad (22)$$

이다. 이 외에 다음 조건을 둔다.

$$H - 170T_w \le 0 \quad (23)$$

$$H \le 40 \quad (24)$$

$$B - 24T_f - T_w \le 0 \quad (25)$$

$$T_w, T_f \geqq 0.8 \quad (26)$$

여기서 조건(23)은 좌굴(Buckling)을 방지하기 위한 복부(web)의 길이와 두께에 대한 제약식이고 조건(24)는 시공에 있어서의 제약이다. 조건(25)는 필요한 플랜지(flange)의 유효폭에 대한 것이고, 조건(26)은 크기의 제약이다.

문제는 조건(22)에서 조건(26)까지 제약을 가지고 I형 빔의 면적

$$A = H \cdot T_w + 2B \cdot T_f$$

를 최소화하는 것이다.

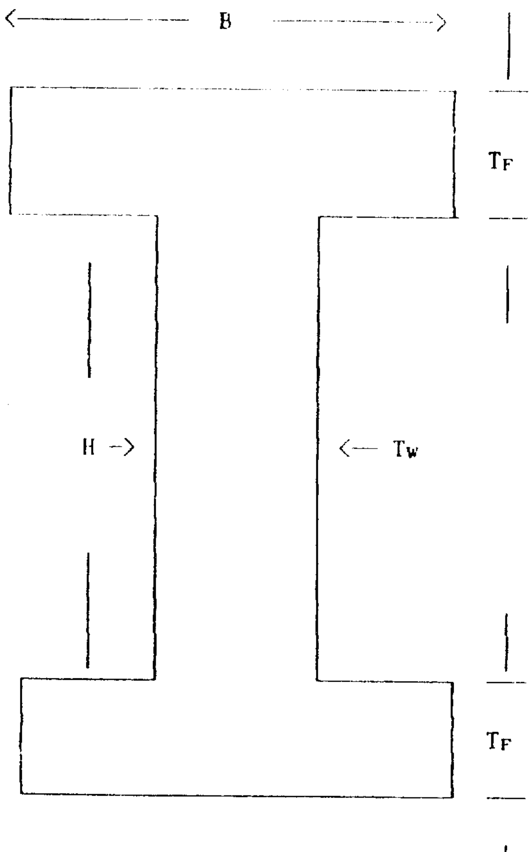

그림 I 형 단면

편의상 변수를 $x_1 = T_w$, $x_2 = T_f$, $x_3 = H$, $x_4 = B$로 나타내면 목적함수는 $f = x_1x_3 + 2x_2x_4$로 표시할 수 있다. 슬랙변수(slack variable) x_5, x_6, x_7을 추가하면 제약조건식(21)은

$$M(6x_3 + 12x_2) - \sigma_{all}(x_1x_3^3 + 3x_2x_3^2x_4 + 12x_2^2x_3x_4 + 12x_2^3x_4) + x_5 = 0$$

로 나타낼 수 있고 식(23), (24), (25), (26)은

$$x_3 - 170x_1 + x_6 = 0$$

$$x_4 - 24x_2 - x_1 + x_7 = 0$$

$$x_1x_2 \geqq 0.8$$

$$x_3 \leq 40$$

$$x_5, x_6, x_7 \geqq 0$$

로 표시할 수 있다. 실제로 계산하기 위하여 $M = 5 \times 10^5(kg \cdot (m))$, $\sigma_{all} = 1500(kg/cm^2)$으로 가정하고 계산하였다. 알고리즘 1과 알고리즘 2에 대한 계산실험은 인하대학교에 설치되어 있는 MV/10000에 의하여 계산하였다.

2절의 알고리즘 1을 적용하기 위하여 위의 문제를

minimize $f_1(x)$

subject to $g_1(x) = 0$, $a \leq x \leq b$ 로 놓고,

초기문제를

minimize $f_o(x)$

subject to $g_o(x) = 0$, $a \leq x \leq b$

로 놓는다.

여기서 $f_o(x) = \| x - x_o \|^2$, $g_o(x) = g_1(x) + \nu$로 놓는다. x_o와 P는 $a \leq x_o \leq b$, $g_1(x) = -\nu$를 만족하도록 결정한다. 이때 파라미터 t는 t = 6까지 증가시켰다. 알고리즘 1에 대한 계산결과는 다음 표 1과 같다.

알고니즘 2를 계산하기 위하여 문제를

minimize $f(x) = x_1x_3 + 2x_2x_4$

subject to $h_1(x) = -x_1x_3^3 + 4\times10^3[(x_3/2)+x_2] - 12[(x_3/2)+x_2]^2x_2x_4 \le 0$

$h_2(x) = -170x_1 + x_3 \le 0$

$h_3(x) = x_3 - 40 \le 0$

$h_4(x) = -x_1 - 24x_2 + x_4 \le 0$

$h_5(x) = -x_1 + 0.8 \le 0$

$h_6(x) = -x_2 + 0.8 \le 0$

로 놓고 함수 E(z) 즉,

$$E(z) = \|\phi_x(z)\|^2 + \sum_{i=1}^{6}(\lambda_i h_i(x))^2$$

를 최소화 한다. 이 ϕ는 Lagrange 함수이고, λ_i는 Lagrange 승수이다. $\alpha=1.9$로 하였다. 계산결과는 다음 표 2와 같다.

표1 알고리즘1의 계산결과

초기값		최적해
x_1	2.	0.800000D+00
x_2	2.	0.106995D+01
x_3	30.	0.400000D+02
x_4	20.	0.580354D+01
x_5	0, 1941469489	0.0
x_6	3.1	0.960000D+00
x_7	3.	0.206524D+01
f		0.444189D+02

표2 알고리즘2의 계산결과

초기값		최적해
x_1	2.	0.800000D+00
x_2	2.	0.107042D+01
x_3	30.	0.399996D+02
x_4	20.	0.580062D+01
f		0.444179D+02
E(z)		2.79×10^{-3}

5. 결 론

본 논문에서는 등식제약조건을 갖는 비선형계획 문제와 등식 및 부등식을 동시에 갖는 비선형계획 문제에 대하여 알고리즘에 의해 구조물 최적화 문제를 계산함으로서 두 알고리즘이 동등하게 근사해에 도달함을 보였다. 등식제약을 갖는 경우에 파라메터의 결정이 반복법의 수렴에 중요한 역할을 하고있다. 또한 Jacobian 행렬이 정측이 되는 것이 필요조건이라 하겠다. 두번째 방법 역시 α의 크기를 결정하는 것이 수렴 조건으로서 중요하며 최적해를 구하기 위한 방정식의 크기가 (n+m+1)에서 n으로 축소됨에 따라 컴퓨터 메모리를 축소하는 관점에서 볼 때 효율적이라고 볼수있다.

참 고 문 헌

1. Avriel M. and Dauer J. P., "*A Homotopy based Approach to Unconstrained Opimization,*" Applicable Analysis, Vol. 8, pp. 319~336, 1979.

2. Hestenes M. R., "*Multiplier and Gradient Method,*" J. Opt. Th. Appl., Vol. 4, pp. 303~320, 1969.

3. Luenberger D. G., "*An Approach to Nonlinear Programming,*" J. Opt. Th. Appl., Vol. 11, pp. 219~227, 1973.

4. Luenberger D. G., Introduction to Linear and Nonlinear Programming, Addisoon Wesley, Reading, Mass., 1984.

5. Meyer G. H., "*On Solving Nonlinear Equations With a One Parameter Operator Imbedding,*" SIAM Journal on Numerical Analysis, Vol. 5, pp. 739~752, 1968.

6. Mine H., Fukushima M., and Ryang Y. J., "*Methods of Parametric Nonlinear Programming,*" Int. J. System Sci., Vol. 12, No. 1., pp. 95~100, 1981

7. Power M. J. D., A Method for Nonlinear Constraints in Minimization Problems, in Optimization ed. by Fletcher R., Academic Press, New York, 1969.

8. Rockafellor R. T., *The Mulitiplier Method of Hestenes and Powell Applied to Convex Programming,*" J. Opt Th. Appl., Vol. 12, pp. 555~562, 1973.

9. Ryang Y. J. and Kim W. S., "*A Method Using Parametric Approach With Quasi-Newton Method for Constrained Optimization,*" The Korean Math. Society, Vol. 26, No. 2., pp. 127~134, 1989.

10. Ryang Y. J., "*A Deformation Method for Solving Nonlinear Programming Problems,*" Bull. Inst. Basic Sci. Inha Univ., Vol. 11, pp. 47~54, 1990.