Journal of the Korean
OR/MS Society
Vol.15, No.1, June,1990

다단계 재고시스템의 안전재고의 결정

김정자* · 최규탁** · 심재홍**

Determination of Safety Stock in a Multi-Echelon Inventory System

J. J. Kim* · G. T. Choi** · J. H. Shim**

Abstract

The problem in this paper concerns the determination of safety stock for multi-echelon inventory system. In this model the criterion is to minimize system safety stock subject to a service level constraint and expected annual total cost.

Then, safety stock is determined by minimizing expected annual total cost and satisfying given service level.

The expected annual total cost is obtained by expected total inventory holding cost plus the expected total stockout cost.

Nemerical example is given in a three-echelon inventory system. The results obtained by the use of the Hill Algorithm.

* 동아대학교 공과대학 산업공학과
** 동아대학교 대학원 산업공학과

1. 서론

재고시스템내의 안전재고는 제품공급의 중단 또는 지연과 갑작스런 소비율의 증가에 따른 수요를 예방하는데 있다.

다단계 재고시스템에서의 공급중단의 결과는 네트워크상의 다른 재고점(location)에서의 품절을 야기시키게 되므로 각 재고점에 적절한 안전재고의 보유가 필요하게 된다.

안전재고 결정에 관한 연구로 단일단계(single echelon)에서 Aucamp[1]는 서비스 정의와 서비스 수준에 따른 모형을 연구하였고 Veen[2]은 서비스 수준과 안전재고의 함수관계로 안전재고를 결정하였으며, Laakso와 Thomopoulos[3]는 여러 재고점이 존재할때 각 재고점들간의 협력수준과 서비스 수준을 고려하여 안전재고 결정에 관한 연구를 했다. 다단계(multi-echelon)에 관한 연구로는 Chakravarty와 Shtub[4]는 수요와 조달기간이 확률적인 2단계(two-echelon) 재고시스템에서 시스템의 총 안전재고와 각 지점의 안전재고 할당문제를 다루었고 Salameh와 Schmidt[5]는 3단계(three-echelon) 재고시스템에서 시스템의 연간 총기대비용을 최소화하는 안전재고의 결정에 관한 모형을 연구하였다.

본 연구에서는 Salameh 등[5]이 시스템의 연간 기대 총비용의 최소화만을 고려한 최적 안전 재고 수준 결정모형에 각 재고점 I_L마다 90%이상의 서비스 수준을 동시에 만족시키는 모형의 알고리즘을 제시하고자 한다.

2. 모형의 개요

2.1 모형과 전제조건

M단계(M-echelon) 재고시스템을 고려한다.

M단계 시스템에서의 각 재고점(location)을 $(i_1, i_2, \cdots, i_M)$으로 표시하고 벡타의 성분의 수는 단계수를 표시한다. 즉, $I_L = (i_1, i_2, \cdots, i_M, 0, 0, \cdots, 0)$은 M단계 재고시스템에 존재하는 제L단계의 재고점을 나타낸다($L \leq M$). 단, I_L벡타의 성분수는 M으로 하고 이 I_L벡타 최초의 L개의 0이 아닌 수는 M단계 재고시스템에 존재하는 L단계의 재고점을 표시한다.

본 연구에서 사용한 3단계 시스템 〈Fig. 1〉을 예를 들면, 이 시스템의 첫번째 단계에서는 (1, 0, 0)으로 표시된 하나의 재고점(location)이 있고 두번째 단계에서는 첫번째 단계의 재고점(1, 0, 0)으로 부터 공급을 받는 2개의 재고점(1, 1, 0), (1, 2, 0)이 있다. 세번째 단계에서는 재고점(1, 1, 0)와 (1, 2, 0)에서 공급을 받는 3개의 재고점(1, 1, 1), (1, 1, 2) 와 (1, 2, 1)이 있다. 그리고 첫번째 단계의 재고점(1, 0, 0)에서의 단위시간당 소비율은 200단위이고 두번째 단계의 재고점(1, 1, 0), (1, 2, 0)의 단위시간당 소비율은 각각 120 단위, 60단위이며 세번째 단계의 재고점 (1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 2, 1)의 단위시간당 소비율은 각각 60단위, 60단위, 80단위이다. 또한 어떠한 재고점 I_L에서의 소비율은 I_L에 의하여 공급되는 재고점들의 소비율의 합과 같다.

본 모형에서 사용된 가정은 다음과 같다.

1) 어떤 재고점에서 재고품목(stocked units)에 대한 수요율(rate of demand)은 확정적이고 전 기간동안 일정하다. 그러나 각 지점의 수요율은 반드시 같지는 않다.

2) 공급중단이 발생할 경우 영향을 받는 재고점은 즉시 그들의 안전재고를 소비한다.

3) 제품의 열화 또는 진부화를 통한 손실은 없다.

4) 공급중단외에 안전재고의 사용은 없다.

5) 같은 수준의 각 재고점들간의 상호 작용은 무시된다.

6) 단위당 재고유지비는 정상운영을 하는 동안과 공급중단기간동안에 동일하다.

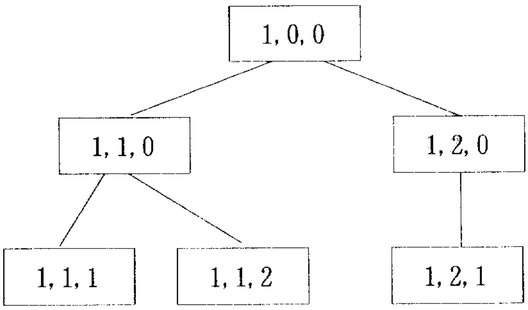

Fig. 1. 3-Echelon Inventory System

2. 2 정식화

〈기호정의〉

$S(I_L)$: 재고점 (I_L)에서의 안전재고(units)

$r(I_L)$: 재고점 (I_L)에서의 유지비($/units/unit time)

$C_s(I_L)$: 재고점 (I_L)에서의 품절비($/unit time)

$B(I_L)$: 재고점 (I_L)에서의 공급중단 사이의 평균시간

$C_1(I_L)$: 재고점 (I_L)에서의 유지비($/unit /unit time)

$A(I_L)$: 공급중단시간 t동안에 재고점 (I_L)에서 소비된 량

$N(I_L)$: 재고점 (I_L)에 의하여 공급되는 단계 $(L+1)$의 재고점수

$w(I_L)$: 재고점 (I_L)에서의 안전재고 공급시간

$$w(I_L) = \frac{S(I_L)}{r(I_L)}$$

$\sum_{j=1}^{L} w(I_j)$: 안전재고 공급시간의 합

t : 공급중단시간

$f(t)$: t의 확률밀도함수

$\bar{t}$: 품절시간

$E(\bar{t})$: 품절시간 $\bar{t}$의 기대값

$$E(\bar{t}) = \begin{cases} \int_w^\infty (t-w) f(t)\, dt, & t > w \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$S_L(I_L)$: 각 재고점의 서비스 수준

여기서 공급중단시간은 확률밀도함수 $f(t)$를 가지는 확률변수이고 이 시간동안 안전재고를 모두 소비한다면 나머지 공급중단시간은 품절시간 $\bar{t}$가 된다.

$\bar{t}(I_L)$을 재고점 (I_L)에서의 품절시간으로 두면 다음과 같으므로

$$\bar{t}(I_L) = \begin{cases} t - \sum_{j=1}^{L} w(I_j), & t \geq \sum_{j=1}^{L} w(I_j) \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

재고점 (I_L)에서의 단위시간당 기대품절비용 $SOC(I_L)$은 다음과 같다.

$$SOC(I_L) = \frac{C_s(I_L)}{B(I_L)} \int_0^\infty \bar{t}(I_L) f(t)\, dt \qquad (1)$$

따라서 단계L에서의 기대품절비용을 SOC(L)로 두면 다음과 같다.

$$SOC(L) = \sum_{i_2=1}^{N(I_1)} \sum_{i_3=1}^{N(I_2)} \cdots \sum_{i=1}^{N(L-1)} SOC(I_L) \tag{2}$$

그러므로 시스템의 총비용은 $\sum_{L=1}^{M} SOC(L)$로 둘 수 있다.

공급중단시간 t동안에 재고점(I_L)에서 $A(I_L)$단위를 소비한다고 하면

$$A(I_L) = \begin{cases} 0 & , t < \sum_{j=1}^{L-1} w(I_j) \\ \dfrac{r(I_L)}{2} \left[t - \sum_{j=1}^{L-1} w(I_j)\right]^2, & \sum_{j=1}^{L-1} w(I_j) \le t < \sum_{j=1}^{L} w(I_j) \\ \dfrac{w(I_L)\, r(I_L)}{2} \left[2t - \sum_{j=1}^{L-1} w(I_j) - \sum_{j=1}^{L} w(I_j)\right], & \text{otherwise} \end{cases}$$

이므로, 재고점(I_L)에서의 기대재고유지비 $HC(I_L)$은 다음과 같다.

$$HC(I_L) = C_1(I_L)\, w(I_L)\, r(I_L) - \frac{C_1(I_L)}{B(I_L)} \int_0^\infty A(I_L) f(t)\, dt \tag{3}$$

따라서 단계L에서의 단위시간당 기대재고 유지비 HC(L)은 다음과 같다.

$$HC(L) = \sum_{i_2=1}^{N(I_1)} \sum_{i_3=1}^{N(I_2)} \cdots \sum_{i=1}^{N(I_{L-1})} HC(I_L)$$

그러므로 시스템 총재고유지비는 $\sum_{L=1}^{M} HC(L)$이다. TC(D)를 단위시간당 시스템의 총기대비용으로 두면

$$TC(D) = \sum_{L=1}^{M} [HC(L) + SOC(L)] \tag{4}$$

여기서 D는 시스템의 모든 안전재고의 공급시간을 성분으로 하는 벡타(vector)이다. 시스템의 각 재고점(I_L)에서의 서비스수준에 관한식은 다음과 같다.

$$SL(I_L) = \frac{\int_0^\infty \bar{t}(I_L) f(t)\, dt}{B(I_L) + \int_0^\infty t f(t)\, dt} \tag{5}$$

여기서,

$B(I_L) + \int_0^\infty t f(t)\, dt$: 재고점(I_L)에서 어떤 공급중단 시작과 다음 공급중단 시작간의 기대간격시간

$E(t) = \int_0^\infty t f(t)\, dt$: 공급중단의 기대시간

$E[\bar{t}(I_L)] = \int_0^\infty \bar{t}(I_L) f(t)\, dt$: 각 재고점(I_L)에서의 기대품절시간

최적 안전재고 결정에 관한 모형은 다음과 같다.

Minimize TC(D)

Subject to

$D \ge 0$

$SL(I_L) \le 0.1$, for all I_L

2.3 수치예

〈Fig. 1〉의 3단계(three-echelon) 시스템을 고려한다. 이 시스템에 대한 데이타는 〈Table 1〉에 주어져 있다.

공급중단시간의 확률밀도함수는 다음과 같다.

$$f(t) = \begin{cases} 0.05e^{-0.05t}, & t > 0 \\ 0 & , \text{otherwise} \end{cases}$$

최초 공급재고점(source location) (1, 0, 0)에서의 공급중단사이의 평균시간은 100시간이다. 재고점(i_1, i_2, i_3)에서의 단위당 안전재고의 기대재고유지비와 품절비의 합을 $EC(i_1, i_2, i_3)$로 표시하면

$$EC(i_1, i_2, i_3) = SOC(i_1, i_2, i_3) + HC(i_1, i_2, i_3)$$

Table 1.

Location Parameters	(1, 0, 0)	(1, 1, 0)	(1, 2, 0)	(1, 1, 1)	(1, 1, 2)	(1, 2, 1)	measure
$C_l(I_3)$	.02	.01	.01	.015	.012	.01	$/unit/unit time
$r(I_3)$	200	120	80	60	60	80	units/unit time
$C_s(I_3)$	300	250	240	300	300	300	$/unit time
Maximum Storage Capacity	5000	3500	3000	2000	2000	2000	units

식 (1), (3)을 이용하면

$$SOC(1) = \frac{C_s(1)}{B(1)} \int_{w(1)}^{\infty} [t-w(1)] f(t)\,dt$$

$$HC(1) = C_l(1)w(1)r(1) - \frac{C_l(1)}{B(1)} \int_{0}^{w(1)} \frac{r(1)}{2} t^2 f(t)\,dt$$

$$- \frac{C_l(1)}{B(1)} \int_{w(1)}^{\infty} \frac{w(1)r(1)}{2} [2t-w(1)] f(t)\,dt$$

$$SOC(1) = \frac{300}{100} \int_{w(1)}^{\infty} [t-w(1)]\,0.05e^{-0.05t}dt = 60e^{-0.05w(1)}$$

$$HC(1) = .02(200)w(1) - \frac{0.02}{100} \int_{0}^{w(1)} \frac{200}{2} t^2 (0.05) e^{-0.05t}dt$$

$$- \frac{.02}{100} \int_{w(1)}^{\infty} \frac{200w(1)}{2} [2t-w(1)]\,0.05e^{-0.05t}dt$$

$$= 4w(1) + 16e^{0.05w(1)} - 16$$

그러므로

$$EC(1) = 4w(1) + 76e^{-0.05w(1)} - 16$$

비슷한 방법으로

$$EC(1,1) = 1.2w(1,1) - \frac{480e^{-0.05w(1)}}{100+w(1)} + \frac{5480e^{-0.05[w(1)+w(1,1)]}}{100+w(1)}$$

$$EC(1,2)=0.08w(1,2)-\frac{320e^{-0.05w(1)}}{100+w(1)}+\frac{5480e^{-0.05w[w(1)+w(1,2)]}}{100+w(1)}$$

$$EC(1,1,1)=0.9w(1,1,1)-\frac{360e^{-0.05[w(1)+w(1,1)]}}{100+w(1)+w(1,1)}+\frac{6720e^{-0.05[w(1)+w(1,1)+w(1,1,1)]}}{100+w(1)+w(1,1)}$$

$$EC(1,1,2)=0.72w(1,1,2)-\frac{288e^{-0.05[w(1)+w(1,1)]}}{100+w(1)+w(1,1)}+\frac{6864e^{-0.05[w(1)+w(1,1)+w(1,1,2)]}}{100+w(1)+w(1,1)}$$

$$EC(1,2,1)=0.8w(1,2,1)-\frac{320e^{-0.05[w(1)+w(1,2)]}}{100+w(1)+w(1,2)}+\frac{6960e^{-0.05[w(1)+w(1,2)+w(1,2,1)]}}{100+w(1)+w(1,2)}$$

기대 총재고비용 TC(D)는

$$TC(D)=EC(1)+EC(1,1)+EC(1,2)+EC(1,1,1)+EC(1,1,2)+EC(1,2,1)$$

재고점(1, 0, 0)의 최대저장용량은 5000이므로 이 재고점에서의 안전재고수준은 5000을 초과할 수 없다. 즉,

$$S(1)\le 5000$$

그러므로

$$w(1)=\frac{S(1)}{r(1)} \qquad \therefore\ w(1)\le\frac{5000}{200}=25$$

비슷한 방법으로

$$w(1,1)=\frac{S(1,1)}{r(1,1)} \qquad \therefore\ w(1,1)\le\frac{3500}{120}=29.167$$

$$w(1,2)=\frac{S(1,2)}{r(1,2)} \qquad \therefore\ w(1,2)\le\frac{3000}{80}=37.5$$

$$w(1,1,1)=\frac{S(1,1,1)}{r(1,1,1)} \qquad \therefore\ w(1,1,1)\le\frac{2000}{60}=33.33$$

$$w(1,1,2)=\frac{S(1,1,2)}{r(1,1,2)} \qquad \therefore\ w(1,1,2)\le\frac{2000}{60}=33.33$$

$$w(1,2,1)=\frac{S(1,2,1)}{r(1,2,1)} \qquad \therefore\ w(1,2,1)\le\frac{2000}{80}=25$$

(5)식을 이용한 각 재고점의 서비스 수준에 관한 제약식은 다음과 같다.

① 단계1의 재고점(1, 0, 0)

$$SL(1) = \frac{\int_{w(1)}^{\infty} [t-w(1)]f(t)dt}{B(1) + \int_{0}^{w(1)} tf(t)dt + \int_{w(1)}^{\infty} tf(t)dt} \leq 0.1$$

$$0 \leq e^{-0.05w(1)} \leq 0.6$$

② 단계2의 첫번째 재고점(1, 1, 0)

$$SL(1,1) = \frac{\int_{w(1)+w(1,1)}^{\infty} [t-w(1)-w(1,1)]f(t)dt}{B(1,1) + \int_{0}^{w(1)+w(1,1)} tf(t)dt + \int_{w(1)+w(1,1)}^{\infty} tf(t)dt} \leq 0.1$$

여기서, $B(1,1) = 100 + w(1)$

$$0 \leq 200e^{-0.05[w(1)+w(1,1)]} - w(1) \leq 120$$

③ 단계2의 두번째 재고점(1, 2, 0)

$$SL(1,2) = \frac{\int_{w(1)+w(1,2)}^{\infty} [t-w(1)-w(1,2)]f(t)dt}{B(1,2) + \int_{0}^{w(1)+w(1,2)} tf(t)dt + \int_{w(1)+w(1,2)}^{\infty} tf(t)dt} \leq 0.1$$

여기서, $B(1,2) = 100 + w(1)$

$$0 \leq 200e^{-0.05[w(1)+w(1,2)]} - w(1) \leq 120$$

④ 단계3의 첫번째 재고점(1, 1, 1)

$$SL(1,1,1) = \frac{\int_{w(1)+w(1,1)+w(1,1,1)}^{\infty} [t-w(1)-w(1,1)-w(1,1,1)]f(t)dt}{B(1,1,1) + \int_{0}^{w(1)+w(1,1)+w(1,1,1)} tf(t)dt + \int_{w(1)+w(1,1)+w(1,1,1)}^{\infty} tf(t)dt} \leq 0.1$$

여기서, $B(1,1,1) = 100 + w(1) + w(1,1)$

$$0 \leq 200e^{-0.05[w(1)+w(1,1)+w(1,1,1)]} - w(1) - w(1,1) \leq 120$$

⑤ 단계3의 두번째 재고점(1, 1, 2)

$$SL(1,1,2) = \frac{\int_{w(1)+w(1,1)+w(1,1,2)}^{\infty} [t-w(1)-w(1,1)-w(1,1,2)]f(t)dt}{B(1,1,2) + \int_{0}^{w(1)+w(1,1)+w(1,1,2)} tf(t)dt + \int_{w(1)+w(1,1)+w(1,1,2)}^{\infty} tf(t)dt} \leq 0.1$$

여기서, $B(1,1,2)=100+w(1)+w(1,1)$

$$0 \le 200e^{-0.05[w(1)+w(1,1)+w(1,1,2)]}-w(1)-w(1,1) \le 120$$

⑥ 단계3의 3번째 재고점 (1, 2, 1)

$$SL(1,2,1) = \frac{\int_{w(1)+w(1,2)+w(1,2,1)}^{\infty}[t-w(1)-w(1,2)-w(1,2,1)]f(t)\,dt}{B(1,2,1)+\int_{0}^{w(1)+w(1,2)+w(1,2,1)} tf(t)\,dt+\int_{w(1)+w(1,2)+w(1,2,1)}^{\infty} tf(t)\,dt} \le 0.1$$

여기서, $B(1,2,1)=100+w(1)+w(1,2)$

$$0 \le 200e^{-0.05[w(1)+w(1,2)+w(1,2,1)]}-w(1)-w(1,2) \le 120$$

그러므로 최소화 문제에 관한 모형은 다음과 같다.

Minimize TC(D)

Subject to

$$0 \le w(1) \le 25$$
$$0 \le w(1,1) \le 29.167$$
$$0 \le w(1,2) \le 37.5$$
$$0 \le w(1,1,1) \le 33.33$$
$$0 \le w(1,1,2) \le 33.33$$
$$0 \le w(1,2,1) \le 25$$
$$0 \le e^{-0.05w(1)} \le 0.6$$
$$0 \le 200e^{-0.05[w(1)+w(1,1)]}-w(1) \le 120$$
$$0 \le 200e^{-0.05[w(1)+w(1,2)]}-w(1) \le 120$$
$$0 \le 200e^{-0.05[w(1)+w(1,1)+w(1,1,1)]}-w(1)-w(1,1) \le 120$$
$$0 \le 200e^{-0.05[w(1)+w(1,1)+w(1,1,2)]}-w(1)-w(1,1) \le 120$$
$$0 \le 200e^{-0.05[w(1)+w(1,2)+w(1,2,1)]}-w(1)-w(1,2) \le 120$$

목적함수와 제약식이 비선형이므로 본 연구에서는 Rosenbrock H. H.[6]에 의하여 제안된 비선형 부등제약식이 있는 다변수 비선형함수의 최대화 최소화문제를 해결하는데 효율적인 방법이라고 증명된 연속탐색기법인 Hill Algorithm을 사용하여 풀면 안전재고의 최적공급시간은 다음과 같다.

$w^*(1)=9.71908$, $w^*(1,1)=14.7978$,
$w^*(1,2)=18.2148$, $w^*(1,1,1)=0.6302$,
$w^*(1,1,2)=0.0272$, $w^*(1,2,1)=11.9877$

$S^*(I_L)=w^*(I_L)\times r(I_L)$ 이므로

1) 시스템의 총비용과 각 재고점들의 서비스 수준을 고려한 안전재고수준설정에 관한 최적정책은 다음과 같다.

재고점(1, 0, 0) : 1944개
재고점(1, 1, 0) : 1776개
재고점(1, 2, 0) : 1457개
재고점(1, 1, 1) : 38개
재고점(1, 1, 2) : 2개
재고점(1, 2, 1) : 969개
TC(D) : $158. 3

2) 시스템 총비용만을 고려한 Salameh[5)]의 최적정책은 다음과 같다.

재고점(1, 0, 0) : 2400개
재고점(1, 1, 0) : 3120개
재고점(1, 2, 0) : 2666개
재고점(1, 1, 1) : 0개
재고점(1, 1, 2) : 0개
재고점(1, 2, 1) : 0개
TC(D) : $ 157. 13

3. 결 론

본 연구에서는 다단계 재고시스템에서 최적안전재고결정에 관한 모형을 제시하였다. 수치예로서 3단계 시스템이 고려되었고, 기대 총재고유지비와 기대 총품절비를 최소화 하면서 요구된 서비스 수준을 만족시키는 최적안전재고수준을 결정하였다.

따라서 본 연구에서 설정한 모형이 다단계 재고모형에서 보다 현실적이고 효과적인 모형이라고할 수 있다.

본 연구에서 제시하지 않은 수요율이 확률적인 모형과 각 재고점들간의 상호작용을 고려한 모형이 앞으로의 연구과제라고 하겠다. 그렇게 하여 본 모형을 좀더 일반화하므로서 보다 더 현실적인 다단계 재고시스템의 관리정책을 설정할 수 있을 것이다.

References

1. Donald C. Aucamp, "The Evaluation of Safety Stock," Production and Inventory Management-Second Quarter, pp. 126~132, 1986.
2. B.Van der Veen, "Safety Stocks - An Example of Theory and Practice in O. R.," European Journal of Operational Research, pp. 367~371, 1981.
3. Clyde A. Laakso, Nick T. Thomopoulos, "Safety Stocks and Service Levels for the Multi-Warehouse Case," Production and Inventory Management, Second Quarter, pp. 72~83, 1979.

4. Amiya K. Chakaravarty and Avraham Shtub, "Simulated Safety Stock Allocation in a Two-Echelon Distribution System," International Jounal of Production Research, Vol. 24, No. 5, pp. 1245~1253, 1986.
5. M. K. Salameh and J.W. Schmidt, "Safety Stock Analysis in a Multi Level Inventory System", IIE Transactions, Vol. 16, No. 4, pp. 348~354, 1984.
6. Rosenbrock, H. H., "An Automatic Method for Finding the Greatest or Least Value of Function," Computer Journal, 3, pp. 75~184, 1960.
7. Rosenbrock, H. H. and C. Storey, Computational Techniques for Chemical Engineer, Pergamon Press, New York, 1966.