Journal of the Korean
OR/MS Society
Vol.15, No.1, June, 1990

시설용량의 제한이 있는 동적 입지선정 문제를 위한 교차분해 기법의 응용*

김승권 · 김선오**

Application of the Cross Decomposition Method for a Dynamic Capacitated Facility Location Problem

Sheung Kown Kim · Sun Oh Kim

Abstract

A mathematical model for a dynamic capacitated facility location problem is formulated by a mixed integer problem. The objective of the model is to minimize total discounted costs that include fixed charges and distributed costs. The Cross Decomposition method of Van Roy is extended and applied to solve the dynamic capacitated facility location problem. The method unifies Benders Decomposition and Lagrangean relaxation into a single framework. It successively solves a transportation problem and a dynamic uncapacitated facility location problem as two subproblems. Computational results are compared with those of general mixed integer programming.

---

* 이 논문은 1988년도 문교부 학술연구조성비에 의한 자유공모과제로 선정되어 연구되었음.
** 고려대학교 산업공학과

1. 서 론

초기 설비투자비용이 많이 드는 프로젝트를 계획하거나, 생산계획을 수립할 경우 투자의 적정규모를 결정해야하는 문제가 발생하게 된다. 특히 계획기간이 긴 경우에는 설비투자수준의 적절한 결정이 중요한 문제로서 대두 된다. 이러한 문제는 계획기간내의 예측된 수요를 만족시키기 위해 설비를 언제, 얼마만한 크기로, 어느곳에 설치하는 것이 가장 경제적인가를 결정하는 것으로 설비확장 문제(Capacity Expansion Problem)의 일종이라고 할 수 있다.

본 연구에서는 특히 설비용량의 크기가 제한을 받을 경우의 문제를 다룬다. 이 문제는 설비용량의 제약이 있는 동적 입지선정 문제로서 다수의 설비를 가지고, 설비의 확장순서와 수요의 공간적 분포에 따른 배분을 고려하면서 요구된 수요를 만족시키기 위한 총 투자비용과 운용 및 운반비용을 최소화하고자 하는 문제이다.

일반적으로 비용이 공급량에 비례하는 선형구조를 갖고, 계획기간이 이산형인 설비의 입지선정 문제는 혼합정수계획 모델로 형성할 수 있으며, 이러한 혼합정수계획 모델은 설비의 확장순서의 고려 여부와 설비용량의 상한 여부에 따라 모델의 특성을 이용한 다양한 해법절차들이 개발되어 왔다. 지금까지 개발된 대표적인 설비의 입지선정문제에 대한 해법절차들을 용량의 제한이 있는가 여부에 따라 분류하여 살펴보면 다음과 같다.

Ross와 Soland〔10〕는 모든 설비의 입지선정 문제를 GAP(Generalized Assignment Problem)로 문제를 형성하였고, 이것을 그들이 개발한 분지한계법을 적용하여 해결하였다.

Efroymson과 Ray〔3〕, 그리고 Khumawala〔7〕는 정적인 설비의 입지선정 문제에 대해서 분지한계법을 이용하는 해법절차를 개발하였고, Roodman과 Schwarz〔9〕는 Efroymson과 Ray의 분지한계법을 확장하여 동적인 설비의 입지선정 문제에 적용하였다.

시설용량의 제한이 없는 문제에 대해서는 Erlenkotter〔4〕가 쌍대기준 절차를 개발하여 정적인 문제에 적용하였고, 그후 Van Ray와 Erlenkotter〔12〕는 쌍대기준 절차를 동적인 문제의 해법절차로 사용하였으며, 송재욱과 김승권〔13〕은 라그란지안 완화기법을 이용하여 해법이 용이한 2개의 부문제로 분해하여 근사해를 구하는 해법절차를 개발하였다.

시설용량의 제한이 있는 정적 입지선정 문제의 해법절차로는 Davis와 Ray〔2〕, Akinc과 Khumawala〔1〕, Geoffrion과 McBride〔5〕, Guignard와 Spielberg〔6〕, 그리고 Van Roy〔11〕등이 개발한 것이 있다. 그러나 시설용량의 제한이 있는 동적인 문제에 대해서는 Van Roy와 Erlenkotter〔12〕가 해를 구하기 위한 방향제시만 하였을 뿐이고, 실제로 해법을 적용하여 풀어본 경험을 제시한 예는 없으며, 아직까지도 구체적인 어떤 기법이 적용되어 있지 않은 상태이다.

본 연구에서는 Van Roy〔11〕가 시설용량의 제한이 있는 설비의 정적 입지선정 문제의 해법절차에 적용한 교차분해 기법을 근간으로, Van Roy와 Erlenkotter〔12〕의 쌍대기준 절차를 이용하여

시설용량의 제한이 있는 동적 입지선정 문제를 실제로 풀어봄으로써, 실제 적용시의 문제점을 밝히고 문제점을 개선해 보며, 그에 따른 계산경험을 제시해 보고자 한다.

2. 모델의 구성과 교차분해 형태

2.1 모델의 구성

본 연구에서 다루어질 설비입지 선정문제는 다음과 같은 형태가 된다.

$$
\begin{aligned}
\text{(P)}\quad & \underset{\substack{x>0 \\ Y\in\{0,1\}}}{\text{Minimize}} \ \sum_i\sum_j\sum_t C_{ijt}X_{ijt}+\sum_i\sum_t f_{it}Y_{it} && (1)\\
\text{s.t.}\quad & \sum_i X_{ijt}=1 \qquad \forall\, j,t && (2)\\
& X_{ijt}\le Y_{it} \qquad \forall\, i,j,t && (3)\\
& \sum_j D_{jt}X_{ijt}\le A_t Y_{it} \qquad \forall\, i,t && (4)\\
& Y_{it-1}\le Y_{it} \qquad \forall\, i,t && (5)
\end{aligned}
$$

여기서 첨자집합(index set)을 다음과 같이 정의한다.

$I=\{1,\cdots,M\}$: 설비입지(facility site)들의 집합

$J=\{1,\cdots,N\}$: 수요지역(demand region)들의 집합

$T=\{1,\cdots,L\}$: 계획기간들의 집합

그리고 각 변수들은 다음과 같은 의미를 갖고 있다.

X_{ijt} = 계획기간 t에서 설비 i로 부터 수요지 j로 공급되는 양의 수요량 D_{jt}에 대한 비율.

$$
Y_{it}=\begin{cases}1, & \text{계획기간 t에서 설비 i가 수요지로 공급이 가능할 때,}\\ 0, & \text{그렇지 않은 경우}\end{cases}
$$

(단, $Y_{i0}=0,\ \forall\, i$)

D_{jt} = 계획기간 t에서 수요지 j에서의 수요량

C_{ijt} = 계획기간 t에서 설비 i로 부터 수요지 j의 모든 수요를 만족시킨다고 가정할 때의 현재가로 계산된 총 운반비 및 운영비.

F_{it} = 설비 i를 계획기간 t에 설치할 때의 고정비용

f_{it} = 설비 i를 계획기간 t에서 설치할 때 소요되는 고정비용 F_{it}를 t로부터 계획기간 말인 L까지 할인율을 고려하여 t의 함수로 분산시킨 값으로서 $f_{it}=F_{it}-F_{it+1}$ (단, $F_{iL+1}=0$)이다.

모델의 목적함수식 (1)은 전체 계획기간에서 발생되는 총 시설투자비와 운반 및 운영비의 현재가를 최소화하는 것을 나타낸다. 그리고 제약식을 살펴보면, 모든 계획기간에서 각 수요지의 수요는 반드시 만족되어야 하고(제약식(2)), 설치되지 않은 설비로 부터는 공급을 할 수가 없으며(제약식(3)), 각 설비가 설비능력의 한계를 가지고 있고(제약식(4)), 한번 설치된 설비는 폐기되지 않음(제약식(5))을 나타낸다.

여기서 변수상한 형태인 제약식(3)은 모델에서 제거되어도 제약식(4)에 의하여 최적해에는 영향을 미치지 않지만 교차분해 기법을 적용할 때 좋은 상・하한값을 구하기 위하여 모델에 포함시켰다. 그리고 제약식(5)는 본 모델이 동적 입지선정 문제임을 의미하는 것으로 이 제약식이 없으면 모델을 계획기간에 따라 분리할 수 있으며, 각각의 문제는 정적인 문제로서 이미 개발된 Van Roy의 교차분해 기법을 이용하여 최적해를 구할 수 있다. 그러나 제약식(5)에 의해서 설비의 설치 시기와

장소를 결정할 때 전체 계획기간을 고려하여야 한다. 그러므로 이 문제는 Van Roy가 정적인 문제에 적용한 교차분해 기법을 그대로 적용하여서는 해결이 불가능하고, 또한 그 해법절차도 복잡해진다.

2. 2 교차분해 형태

교차분해 기법이란 원 문제에 대해 두가지의 제한방법을 적용하여 원 부문제와 쌍대 부문제를 만들고, 이에 대응되는 분해형태의 두가지 주문제를 유도하여 원 문제와 쌍대 문제의 구조를 동시에 고려하면서 효과적으로 최적해를 얻어낼 수 있도록 하는 방법이다. 여기서는 4가지 형태의 문제에 대한 유도과정을 살펴보기로 한다.

먼저 원 문제(P)에서 Y_{it}를 0 또는 1로 고정시키므로써 원 부문제(SPy)를 얻을 수 있는데 이 원 부문제는 수송문제의 형태가 된다.

$$\text{(SPy)} \quad \underset{x>0}{\text{Minimize}} \sum_i\sum_j\sum_t C_{ijt}X_{ijt} + \sum_i\sum_t f_{it}Y_{it}$$
$$\text{s. t.} \quad (2), (3), (4)$$

그리고 라그란지안 완화형태를 갖는 쌍대 부문제(SDμ)는 다음과 같다.

$$\text{(SD}\mu\text{)} \quad \underset{\substack{Y\in\{0,1\}\\ x>0}}{\text{Minimize}} \ \sum_i\sum_j\sum_t (C_{ijt}+\mu_{it}D_{jt})X_{ijt} + \sum_i\sum_t (f_{it}-\mu_{it}A_i)Y_{it}$$
$$\text{s. t.} \quad \sum_i A_iY_{it} \geq \sum_j D_{jt} \quad \forall t \qquad (6)$$
$$(2), (3), (5)$$

여기서 완화할 제약식의 선택방법으로는 수요를 만족시켜야 하는 제약식 (2)를 완화시키는 방법과 능력한계에 대한 제약식 (4)를 완화시키는 방법이 있다. 그런데 제약식 (2)는 수요를 만족시켜야 한다는 것으로 문제의 가장 중요한 제약조건이고, 일반적으로 제약식의 수가(M<<N) 많으므로 (P)에 대한 좋은 하한치를 기대하기가 힘들다. 반면에 제약식 (4)를 완화하게되면 완화된 문제가 능력한계가 없는 설비의 동적 입지선정 문제가 되고 이것의 해법으로 계산효율이 좋은 쌍대기준 절차를 이용할 수 있으므로 본 연구에서는 제약식 (4)를 완화시키고 그 제약식에 대한 대리 제약식 (6)을 추가한 라그란지안 완화문제를 쌍대 부문제로 이용하기로 한다.

원 주문제를 유도하기 위해 (P)에 대리 제약식 (6)을 넣고 (SPy)로 나타내면 다음과 같게 된다.

$$\underset{Y\in\{0,1\}}{\text{Minimize}} \left[\begin{array}{l} \underset{x>0}{\text{Minimize}} \sum_i\sum_j\sum_t C_{ijt}X_{ijt} + \sum_i\sum_t f_{it}Y_{it} \\ \text{s. t.} \quad (2), (3), (4) \end{array} \right]$$
$$\text{s. t.} \quad (5), (6)$$

여기서 (SPy)의 쌍대변수를 각각 h_{jt}, v_{ijt}, u_{it}로 하여 쌍대문제로 바꾸면

$$\underset{Y\in\{0,1\}}{\text{Minimize}} \left[\begin{array}{l} \underset{\substack{h,v>0\\ \mu>0}}{\text{Maximize}} \sum_j\sum_t h_{jt} + \sum_i\sum_t f_{it}Y_{it} - \sum_i\sum_j\sum_t v_{ijt} \cdot Y_{it} - \sum_i\sum_t A_i\mu_{it}Y_{it} \\ \text{s. t.} \quad h_{jt}-v_{ijt}-D_{jt}\mu_{it} \leq C_{ijt} \\ \qquad\qquad \forall\, i, j, t \end{array} \right]$$
$$\text{s. t.} \quad (5), (6)$$

와 같이 되고, T_p를 (h, v, μ)에 대한 가능해 구역의 모든 극점들을 표시하는 첨자집합이라고 정의하여 $\{(h^k, v^k, \mu^k),\ k \in T_p\}$로 나타내면

$$\underset{Y\in\{0,1\}}{\text{Minimize}} \ \underset{k\in T_p}{\text{Maximize}} \ \sum_j\sum_t h^k_{jt} + \sum_i\sum_t (f_{it} - \mu^k_{it}A_i - \sum_j v^k_{ijt})Y_{it}$$
$$\text{s. t.} \quad (5), (6)$$

또는

$$\text{(MP)}\ \underset{Y\in\{0,1\},\beta}{\text{Minimize}}\quad \beta$$

$$\text{s.t.}\ \sum_j\sum_t h^k_{jt}+\sum_i\sum_t\left(f_{it}-\mu^k_{it}A_i-\sum_j v^k_{ijt}\right)\cdot Y_{it}\le\beta,\ k\in T_p \qquad (7)$$

$$(5),\ (6)$$

가 된다. 여기서 (MP)는 원 주문제이고 T_p의 첨자로 형성된 제약식(7)은 벤더스 또는 원 절단(primal cut)이 된다.

마지막으로 (SDμ)로 부터 쌍대 주문제 (MD)를 유도하면 다음과 같다.

$$\text{(D)}\ \underset{\mu>0}{\text{Maximize}}\left[\begin{array}{l}\underset{Y\in\{0,1\},\ x>0}{\text{Minimize}}\ \sum_i\sum_j\sum_t\left(C_{ijt}+\mu_{it}D_{jt}\right)\cdot X_{ijt}+\sum_i\sum_t\left(f_{it}-\mu_{it}A_i\right)Y_{it}\\ \\ \text{s.t.}\qquad (2),\ (3),\ (5),\ (6)\end{array}\right]$$

여기서, T_D를 (SDμ)에 대한 가능해 구역의 모든 가능해를 나타내는 첨자집합이라고 하고, (D)를 $\{(X^k, Y^k),\ k\in T_D\}$으로 나타내면 쌍대 주문제가 형성되는데 그 형태는 다음과 같다.

$$\text{(MD)}\ \underset{\mu>0,\delta}{\text{Maximize}}\quad \delta$$

$$\text{s.t.}\ \sum_i\sum_j\sum_t C_{ijt}X^k_{ijt}+\sum_i\sum_t f_{it}\cdot Y^k_{it}-\sum_i\sum_t\left(A_i\cdot Y^k_{it}-\sum_j D_{jt}X^k_{ijt}\right)\mu_{it}\ge\delta,\ \forall\ k\in T_D$$

여기서 제약식은 쌍대 절단(dual cut)이 된다. 이와같은 4개의 문제를 가지고 원문제와 쌍대문제를 번갈아 풀어가면서 원문제의 최적해 값에 대한 상한 값과 하한 값을 계속하여 개선해 나간다.

3. 해법절차

3. 1. 교차분해 기법

앞에서 유도된 원 주문제 (MP)는 풀고자 하는 원 문제 (P)와 동등한 문제이지만 (MP)를 풀기 위해서는 원 부문제 (SPy)에 대한 쌍대 문제의 모든 극점을 알아야 하므로 현실적으로 (MP)를 풀어서 한번에 (P)의 최적해를 구하기란 힘들다. 따라서 완전한 (MP)를 푸는 대신 필요할 때마다 생성시킨 절단을 갖는 완화된 주문제를 이용하여 최적해를 찾아야 한다. 그리고 라그란지안 완화형태를 갖는 쌍대 부문제(SDμ)와 벤더스 절단을 제약식으로 하는 원 주문제(MP)는 쌍대 관계가 있으므로 완화된 제약식을 갖는 원 주문제를 직접 풀지않고 쌍대 부문제를 이용하여 풀게 된다. 이때 쌍대 부문제의 라그란지안 승수는 원 부문제(SPy)로 부터 구하여 사용하게 된다. 그러므로 교차분해 기법은 다음과 같은 두 단계로 요약할 수 있다.

(1) Y를 고정시키고 새로운 μ를 생성시키기 위해 (SPy)를 푼다.

(2) μ를 고정시키고 새로운 Y를 생성시키기 위해 (SDμ)를 푼다.

이 두 단계를 교대로 풀어 나감으로써 연속적으로 원 문제 (P)에 대한 상·하한치가 구해지고 최적해에 접근해 간다.

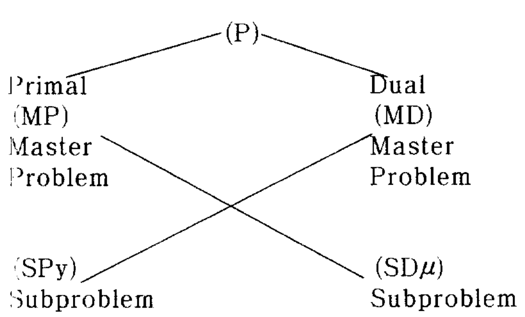

그림 1. 교차분해 기법의 해법절차

Van Roy는 부문제를 교대로 풀어 가는 과정에서 Y가 원문제의 최적해가 아니면 연속적으로 같은 값을 갖지 않음을 보였다[11]. 그러나 Y가 주기적으로 같은 값을 가질수 있으므로 항상 최적해에 접근해간다고는 할 수 없으므로 부문제로 부터 구한 해가 최적해에 접근해가고 있는가를 판단하기 위하여 각 부문제를 푼 후에 최적해에 접근검사를 하여 이를 만족시키지 못할 경우에는 주문제를 풀어 최적해에 도달할 수 있도록 하여야 한다. 본 연구에서는 쌍대 부문제와 원 부문제로 부터 쌍대 절단을 형성할 수 있으므로 최적해 접근검사에 실패한 경우에 쌍대 주문제를 풀기로 한다.

교차분해 기법을 이용한 시설용량의 제한이 있는 동적 입지선정 문제의 해법은 다음과 같다.

용어 : T_p는 원 절단의 집합;

T_D는 쌍대 절단의 집합;

T_y°는 원 부문제로 부터 생성된 쌍대 절단의 집합;

UB는 현재까지 가장 좋은 상한치;

LB는 현재까지 가장 좋은 하한치;

$\bar{Y}$는 UB를 목적함수 값으로 갖는 (SPy)의 Y 값;

$\bar{\mu}$는 LB를 목적함수 값으로 갖는 $(SD\mu)$의 μ 값;

PCT(DCT) = 0, 원(쌍대) 최적해 접근 검사를 만족시킴.

1, 그렇지 않은 경우.

v(•)는 최적화 문제(•)의 최적 목적함수 값.

(1) 초기치의 부여 :

$Y_{it}^{\circ} = 1, \forall i, t$:

$LB = -\infty$,

(2) 모든 설비가 전 계획기간에 설치되어 있다고 가정한다 :

(2.1) (h^1, v^1, μ^1)을 구하기 위해 (SPy°)를 푼다.

(2.2) 원 절단과 쌍대 절단을 형성한다.

$T_D = T^\circ y^\circ$, $T_p = \{0\}$.

(2.3) 초기치의 부여 :

$UB = v(SPy^\circ)$, $\bar{Y} = Y^\circ$

(3) 다음 절차를 반복한다. $(k = 1, 2, \cdots)$:

(3.1) 초기치의 부여 :

PCT = 0, DCT = 0

(3.2) $\mu = \mu^k$인 쌍대 부문제 $(SD\mu^k)$:

(3.2.1) (X^k, Y^k)를 구하기 위해 $(SD\mu^k)$을 푼다;

쌍대 절단을 만든다 : $T_D \leftarrow T_D + k$;

만약 $LB < v(SD\mu^k)$ 이면 $\bar{\mu} = \mu^k$, $LB = v(SD\mu^k)$;

만약 UB≦LB이면 STOP.

(3.2.2) 원 최적해 접근 검사 :

(3.2.1)에서 구한 Y^k에 대해서

$\sum_j \sum_t h_{jt}^q + \sum_i \sum_t (f_{it} - A_i \mu_{it}^q - \sum_j v_{ijt}^q)$

$Y_{it}^k \geq UB$, $q \in T_p$ 이면 PCT=1로 하고 단계 (3.4)로 간다.

(3.3) $Y = Y^k$인 원 부문제(SPy) :

(3.3.1) $(h^{k+1}, v^{k+1}, u^{k+1})$를 구하기 위해 (SPy)를 푼다 :

원 절단을 만든다 : $T_p \leftarrow T_p +$

$(k+1)$;

만약 UB $> v(SPy^k)$ 이면 $\bar{Y} = Y^k$, UB $= v(SPy^k)$:

만약 UB $\leqq$ LB이면 STOP.

(3. 3. 2) 쌍대 최적해 접근 검사;

(3. 3. 1) 에서 구한 μ^{k+1}에 대해서 $\sum_i\sum_j\sum_t C_{ijt}X^q_{ijt} + \sum_i\sum_t f_{it}Y^q_{it} - \sum_i\sum_t (A_i Y^q_{it} - \sum D_{jt}X^q_{ijt})\mu^{k+1}_{it} \leq$ UB, $q \in T_p$ 이면 DCT=1로 하고 단계 (3. 4) 로 간다.

(3. 3. 3) (SPy^k) 로 부터 쌍대 절단을 만들어 $T^o y^k$로 표시하여 (MD) 의 제약식에 추가한다.

$T_D \leftarrow T_D \cup T^o y^k$

단계 (3) 을 반복한다.

(3. 4) 쌍대 주문제 (MD) :

T_D의 절단을 가진 완화된 주문제를 단체법으로 푼다 :

만약0v (MD) $\leqq (1+\alpha)$ LB이면 단계 (4) 로 간다. ;

(MD) 의 최적해를 u^{k+1}로 하여 단계 (3) 을 반복한다.

(4) 분지한계법을 적용하여 최적해를 확인한다.

이러한 해법절차에서 교차분해 기법을 통하여 구한 해는 최적해가 되었거나 최적해에 대해 근사한 값 (보통 α는 0. 005) 을 구하게 된다. 근사값이 얻어진 경우에는, 분지한계법을 적용하여 dual gap 여부를 판정하여야 하나, 본 연구에서는 계산의 실용성을 고려하여 적절한 근사값을 얻는것으로 단순화시켰다. 만약에 dual gap이 커져서 얻어진 근사값의 효용에 의문이 생기면, 그때 분지한계법을 적용하여 최적해 여부를 판정할 수 있을 것이다.

전체 해법절차의 흐름도는 그림2와 같다.

3. 2 부문제의 해법절차

원 부문제 (SPy) 는 수송문제이므로 일반적인 수송문제의 해법절차에 의해 해결될 수 있으므로 여기서는 교차분해 기법의 핵심적인 절차인 쌍대 부문제 (SDμ) 의 해법절차에 대해서 살펴보기로 한다.

쌍대 부문제 (SDμ) 는 대리 제약식를 제외하면 시설용량의 제한이 없는 동적 입지선정 문제의 형태가 된다. 시설용량의 제한이 없는 동적 입지선정 문제에 대한 해법은 여러가지가 있으나 본 연구에서는 가장 효율적인 쌍대 기준 절차를이용하기로 한다.

먼저 쌍대기준 절차를 적용하기 위해 Erlenkotter가 사용한 형태[12]로 변환시켜야 하며, 다음과 같은 변수를 정의한다.

여기서, Z_{it}는 Y_{it}의 정의와는 달리 주어진 시점 t에서 설비가 선정될 경우에만 1값을 갖는 것을 주목하면, (SDμ) 로의 변환을 이해할 수 있을 것이다.

$$Z_{it} = Y_{it} - Y_{it-1} \geq 0$$

$$\bar{C}_{ijt} = C_{ijt} + \mu_{it}D_{jt}$$

$$\bar{F}_{it} = \sum_{k=t}^{L} (f_{ik} - \mu_{ik}A_i)$$

$$\bar{D}_t = \sum_j D_{jt}$$

정의한 변수를 사용하여 (SDμ) 를 다시쓰면

$$(SD\mu)\ \underset{\substack{Y \in \{0,1\} \\ Z > 0}}{\text{Minimize}}\ \sum_i\sum_j\sum_t \bar{C}_{ijt}X_{ijt} + \sum_i\sum_t \bar{F}_{it}Z_{ik}$$

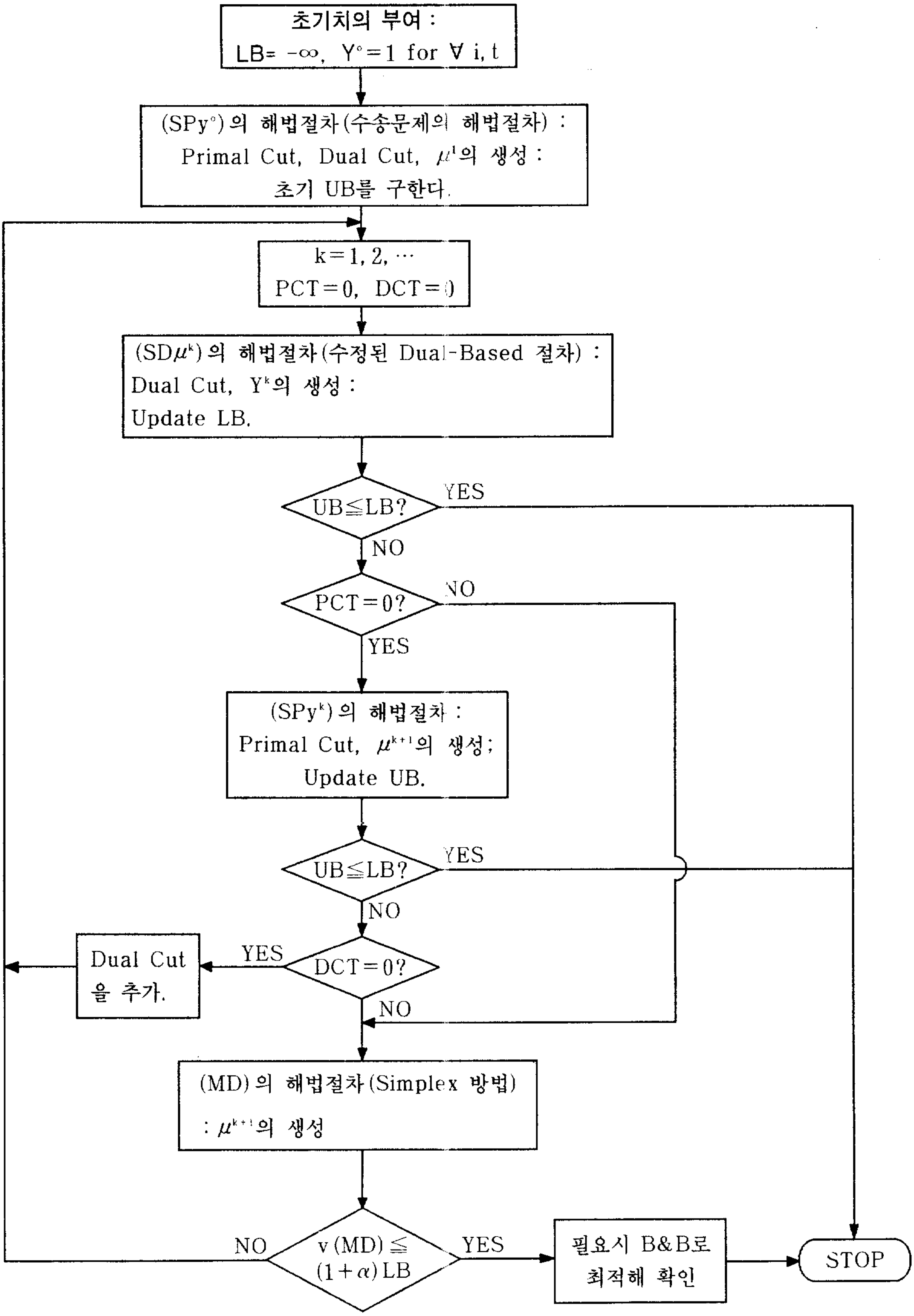

그림2. 교차분해기법의 해법절차의 흐름도

$$\text{s. t.} \quad \sum_j X_{ijt} = 1 \qquad \forall\, j, t \qquad (8)$$

$$X_{ijt} \le \sum_{k=1}^{t} Z_{ik} \qquad \forall\, i, j, t \qquad (9)$$

$$\sum_i A_i \sum_{k=1}^{t} Z_{ik} \ge \bar{D}_t \quad \forall\, t \qquad (10)$$

이고, π_{jt}, w_{ijt}, r_t를 제약식 (8), (9), (10)에 대한 쌍대변수라고 하면

$$\underset{\pi,\, w>0,\, r>0}{\text{Maximize}} \ \sum_j \sum_t \pi_{jt} + \sum_t \bar{D}_t r_t$$

$$\text{s. t} \quad \pi_{jt} - w_{ijt} \le \bar{C}_{ijt} \qquad \forall\, i, j, t \qquad (11)$$

$$\sum_j \sum_{k=t}^{L} w_{ijt} + \sum_{k=t}^{L} A_i r_k \le \bar{F}_{it} \qquad \forall\, i, t \qquad (12)$$

와 같이 되고, 제약식 (11)과 $w_{ijt} \geqq 0$을 묶어 w_{ijt} 대신 $\max.\{0, \pi_{jt} - \bar{C}_{ijt}\}$을 넣은 함축된 쌍대문제 (CD)를 만들면 다음과 같다.

$$\text{(CD)} \quad \underset{r>0}{\text{Maximize}} \ \sum_j \sum_t \pi_{jt} + \sum_t \bar{D}_t r_t$$

$$\text{s. t.} \quad \sum_j \sum_{k=t}^{L} \max\{0, \pi_{jk} - \bar{C}_{ijk}\} \le \bar{F}_{it} - \sum_{k=t}^{L} A_i r_k \qquad \forall\, i, t \qquad (13)$$

(CD)에서 r_t가 어떤 값으로 고정되면 쌍대 기준 절차를 이용할 수 있고, 제약식 (13)에 의해서 고정된 r_t값에 대한 (CD)의 가능해는 r_t값을 줄여도 계속 가능해로 남아있다는 사실을 이용하여 r_t값을 최대값에서 부터 줄여가면서 적당한 값을 정하여 쌍대기준 절차를 적용한다. 여기서 r_t는 제약식 (10)의 쌍대변수인데 (13)식에서 r_t값은 최대한 크게 유지하여 (10)식을 구속 제약식 (binding constraint)으로 유지시키므로써 궁극적로 좋은 라그라지안 승수값, μ를 얻고자 한다.

3. 2. 1 r_t의 최대값 결정 절차

수정된 쌍대기준 절차를 적용하기 위해 먼저 (CD)에서 r_t가 가질수 있는 최대값을 구해야 하는데, 이것은 다음과 같은 연속 다단계 배낭 문제가 된다.

$$\underset{r>0}{\text{Maximize}} \ \sum_t \bar{D}_t r_t$$

$$\text{s. t.} \quad \sum_{k=t}^{L} A_i r_k \le \bar{F}_{it} \qquad \forall\, i, t \qquad (13)$$

이때

$$F_t^* = \min_i \left\{ \frac{\bar{F}_{it}}{A_i} \right\}$$

를 정의하면

$$\text{(KP)} \quad \underset{r>0}{\text{Maximize}} \quad Z_p = \sum_t \bar{D}_t r_t$$

$$\text{s. t.} \quad \sum_{k=t}^{L} r_k \le F_t^* \qquad \forall \quad t$$

가 된다. 여기서 (KP)로 부터 직접 최적해를 구하지 않고 쉽게 최적해를 구할 수 있는 쌍대문제를 풀고 상보 여유조건을 이용하여 r_t의 최대치를 구한다. 쌍대변수를 g_t로 하면 쌍대문제는 다음과 같다.

$$\text{(DKP)} \quad \underset{g>0}{\text{Maximize}} \quad Z_D = \sum_t F_t^* g_t$$

$$\text{s. t.} \quad \sum_{k=1}^{t} g_k \ge \bar{D}_t \qquad \forall\, t$$

이때 $j(k) = \arg\min_t \{t : F_t, t \leqq k\}$로 정의하고 계획기간 $1, 2, \cdots, L$에서 $i_1, i_2, \cdots, i_s$를 다음과 같이 선택한다.

$$i_1 = 1$$

$$i_k = \arg\min_t \{t : D_t \rangle D_{ik-1}\} \quad k = 2, 3, \cdots, s$$

다시 $i_1, i_2, \cdots, i_s$로부터 $i_1^*, i_2^*, \cdots, i_c^*$를 다음과 같이 선택한다.

$$i_c{}^* = i_s$$

$$i_k{}^* = \arg\max_{i(t)} \{i_t : j(i_{k+1}^*) \ne j(i_t),\, i_t \langle i_{k+1}^*\}$$

$$k = 2, \cdots, c\text{-}1$$

〔정리〕 (KP)의 최적해는 $r_{i_c^*} = F_{j(i_c^*)}^*$

$r_{i_c^*} = F_{j(i_k^*)}^* - F_{j(i_{k+1}^*)}^*$ $k = 1, 2, \cdots, c\text{-}1$ 이고 나머지 r_t값은 0이며, 쌍대문제 (DKP)의 최적해는

$g_{j(i_1^*)} = D_{i_1^*}$

$g_{j(i_k^*)} = D_{i_k^*} - D_{i_{k-1}^*}$ $k=2, 3, \cdots, c$이고 나머지 g_t값은 0이 된다.

〔증명〕원 문제에 대한 해는 제약식 $j(i_1^*)$가 등식이 되고 나머지 제약식은 비음수인 여유변수를 갖게 되므로 가능해이고, 쌍대문제에 대한 해는 제약식 i_1^* 등식이되고 나머지 제약식은 비음수인 잉여변수를 갖게되므로 가능해이다. 그리고 각 목적함수값은 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
Z_P &= D_{i_1^*}(F^*_{j(i_1^*)} - F^*_{j(i_2^*)}) + \cdots + D_{i_{c-1}^*} \\
&\quad - (F^*_{j(i_{c-1}^*)} - F^*_{j(i_c^*)}) + D_{i_c^*} F^*_{j(i_c^*)} \\
&= F^*_{j(i_1^*)} D_{i_1^*} + F^*_{j(i_2^*)} (D_{i_2^*} - D_{i_1^*}) + \cdots \\
&\quad + F^*_{j(i_c^*)} (D_{i_c^*} - D_{i_{c-1}^*}) \\
&= Z_D
\end{aligned}
$$

그러므로 구한 해는 최적해이다.

3. 2. 2 쌍대 부문제 $(SD\mu)$의 해법절차

위에서 구한 r_t의 최대값을 $rmax_t$라하고 이것으로 수정된 쌍대기준 절차를 적용하여 $(SD\mu)$를 푸는 방법을 요약하면 다음과 같다.

(1) 다음과 같이 초기치를 준다.

$t \in T$에 대해, $r_t^- = 0$, $r_t^+ = rmax_t$, $\triangle_t^- = -\bar{D}_t$, $\triangle_t^+ = \Sigma A_i - \bar{D}_t$, $r_t = r_t^+$로 하고, $\delta = 0$, $\bar{\pi}_{jt} = \min\{\bar{C}_{ijt}\}$ for $\forall$ j, t로 한다.

(2) $r_k^+ > 0$인 r_k에 대해서 다음을 반복하면서 적정한 r_k값을 찾는다.

$k = 1, 2, \cdots$.

(2. 1) 쌍대 향상절차(Dual Ascent Procedure)를 적용한다〔12〕;

이때의 해를 π^*로 한다.

(2. 2) 원 조정절차(Primal Adjustment Procedure)를 적용한다〔12〕;

이때의 해를 (X^*, Y^*)로 한다.

(2. 3) 대리 제약식을 만족하는지 알아본다 :

$\triangle_t = \Sigma A_i Y_{it}^* - \Sigma D_{jt}$를 구한다;

만약 (X^*, Y^*)가 반복되면 $\delta = \delta + 1$, 아니면 $\delta = 0$로 한다.

이때 $\delta = 5$이면 단계 (2. 5)로 간다.

만약 $\triangle_t \geqq 0$, $\forall$ $t \geqq k$이면 $r_k^+ = r_k$, $\triangle_k^+ = \sum_{t=k}^{L} \triangle_t$, $\bar{\pi} = \pi^*$로 한다.

만약 $\triangle_k < 0$, $t \geqq k$이면 $r_k^- = r_k$, $\triangle_k^- = \sum_{t=k}^{L} \min\{0, \triangle_t\}$로 한다.

만약 $\triangle_k = 0$이고 $\triangle_t \geqq 0$, $\forall$ $t > k$이면 단계 (2. 5)로 간다.

(2. 4) 새로운 r_k를 계산한다 :

$$r_k = r_k^- + (r_k^+ - r_k^-) \frac{|\triangle_k^-|}{\triangle_k^+ - \triangle_k^-}$$

만약 $r_k = r_k^+$ 또는 $r_k = r_k^-$이면 단계 (3)으로 간다.

(2. 5) 만약 $k = L$이면 단계(3)으로 간다; 그렇지 않으면 $k = k+1$로 하고 $\bar{\pi}$를 가지고 단계 (2. 1)로 간다.

(3) r_t를 고정시키고 쌍대기준절차(Dual Based Procedure)를 적용한다〔12〕.

3. 3 벤더스 절단의 생성방법

원 부문제(SPy)의 쌍대 최적해는 벤더스 절단을 형성할 뿐만 아니라 다음에 풀어야 하는 쌍대

부문제(SDμ)의 라그란지안 승수로 사용된다. 따라서 쌍대 최적해의 선택은 전체 교차분해 절차의 효율에 결정적인 역할을 하게 된다. 그런데 본 연구의 원 부문제(SPy)는 수송문제의 형태를 갖기 때문에 여러개의 쌍대 최적해가 존재하게 되고, 이 쌍대 최적해 중에서 하나를 선택하여야 한다.

여기에서는 여러개의 쌍대 최적해로 부터 강력한 절단을 형성하는 쌍대 최적해를 생성하는 방법에 대해서 살펴보기로 한다[11].

원 부문제(SPy)의 쌍대문제는

$$\text{(DSP)} \underset{h,\,v>0,\,\mu>0}{\text{Maximize}} \quad \sum_j\sum_t h_{jt} + \sum_i\sum_t (f_{it} - \sum_j v_{ijt} - A_i\mu_{it})Y_{it}$$

$$\text{s.t.} \quad h_{jt} - v_{ijt} - D_{jt}\mu_{it} \le C_{ijt} \quad \forall\ i, j, t$$

와 같고$(\bar{h}, \bar{v}, \bar{\mu})$를 원 부문제(SPy)로 부터 구한 쌍대 최적해라고 하면 이것에 대응되는 절단은 식 (7)로 부터

$$\sum_j\sum_t \bar{h}_{jt} + \sum_i\sum_t (f_{it} - \sum_j \bar{v}_{ijt} - A_i\bar{\mu}_{it})Y_{it} \le \beta$$

이다. 위의 절단과 (DSP)의 관계에서 v_{ijt}와 μ_{it}가 (DSP)의 가능해로 남아 있으면서 목적함수값을 변화시키지 않는 범위내에서 절단의 Y_{it}계수가 증가되도록 수정하여 강력한 절단을 만들 수 있다. 이것은 $Y_{it}=0$인 설비 i와 계획기간 t에 대해서 $\bar{h}_{jt}$값을 고정시킨 선형문제로 다음과 같은 형태를 갖는다.

$$\text{(GC)} \quad \underset{\mu>0,\,v>0}{\text{Maximize}}\ f_{it} - A_i\mu_{it} - \sum_j \bar{v}_{ijt}$$

$$\text{s.t.} \qquad \bar{h}_{jt} - v_{ijt} - D_{jt}\mu_{it} \le C_{ijt} \quad \forall\ j$$

여기서, $v_{ijt} = \max\{0, \bar{h}_{jt} - C_{ijt} - D_{jt}\mu_{it}\}$로 하면,

$$\underset{\mu>0,}{\text{Maximize}}\ f_{it} - A_i\mu_{it} - \sum_j \max\{0, \bar{h}_{jt} - C_{ijt} - D_{jt}\mu_{it}\}$$

와 같이 된다. 이 문제는 j에 대해 v_{ijt}가 순차적으로 양수값을 갖도록 v_{ijt}값과 μ_{it}의 값을 점진적으로 수정하면서 최적해를 구하게 되는데 그 절차는 다음과 같다.

(1) $Y_{it}=0$인 i와 t에 대해서 다음 절차를 적용한다.

(2) 초기치의 부여 :

$H=0,\ J_{it}=0,\ v_{ijt}=0 \quad \forall\ j.$

(3) 다음 과정을 반복해서 적용한다 :

(3. 1) v_{ijt}를 증가시킬 때 처음으로 양수값으로 변화되는 j를 찾는다 :

$j' = \arg\min_j\{(\bar{h}_{jt} - C_{ijt})/D_{jt},\ j \in J \mid J_{it}\}$,

$J_{it} \leftarrow J_{it} \cup \{j'\}$.

(3. 2) μ_{it}를 감소시키고 v_{ijt}를 증가시켜서 (GC)의 목적함수를 증가시킬 수 있는지를 검사한다 :

만약 $\sum_{j\in J_{it}} D_{jt} > A_i$이면 단계(1)로 간다;

그렇지 않으면 $\triangle = \min\{(\bar{h}_{jt} - C_{ijt})/D_{jt} - H, \mu_{it})$로 한다.

(3. 3) v_{ijt}와 μ_{it}을 수정한다 :

$v_{ijt} \leftarrow v_{ijt} + D_{jt}\triangle$;

$\mu_{it} \leftarrow \mu_{it} - \triangle$.

(3. 4) 만약 $\mu_{it}=0$이면 단계(1)로 간다;

그렇지 않으면 $H = (\bar{h}_{ijt} - C_{ijt})/D_{ijt}$로 하고 단계(3. 1)로 간다.

4. 적용예제 및 결과분석

본 연구에서 제시한 해법절차를 FORTRAN으

로 프로그램밍하여 계산상의 효율성을 평가하였다. 쌍대문제는 Erlenkotter의 쌍대기준 절차를 수정하여 프로그램밍하였고, 원 부문제인 수송문제는 초기해를 Vogel근사법으로 구하여 원-쌍대절차를 적용하는 방법으로, 쌍대 주문제인 선형계획 문제이 해법으로는 Kuenzi, Tzschach, 그리고 Zehnder[8]의 해법절차를 기초로 프로그램밍하였다. 해법의 실용성을 유지하기 위하여, 해법절차의 정지규칙은 상한과 하한이 같은 값을 갖고 최적해에 도달했거나, 쌍대주문제의 최적 목적함수값과 하한값의 차이가 하한값의 α%(일반적으로 0.5%)이내에 있을 경우 정지하게 하였다. 본 해법절차와 비교를 하게 되는 혼합 정수계획법은 David Kendrick(The University of Texas)이 개발한 GAMS(General Algebraic Modeling System)를 이용하였는데, 이것은 일반 혼합 정수계획법보다 효율적인 것으로 여기에는 선형계획법, 발견적 기법, 그리고 분지한계법이 적용되어 있다.

본 연구에서는 모두 7개의 예제를 적용하여 보았는데 각 예제는 객관성을 유지하기위하여 운영 및 운반비의 자료를 난수표에 의해서 형성하였다. 본 연구에서 개발한 교차분해 기법의 해법절차와 혼합 정수계획법과의 효율성의 비교는 (표1)과 같다.

(표 1)에서 알 수 있듯이 본 연구의 해법은 혼합 정수계획법을 사용할때 많은 분지과정이 적용되는 문제에 대해서도 강력한 해법절차를 사용하였기 때문에 적은 반복횟수만에 최적해를 구할 수

표 1. 예제의 적용 결과

	문제 크기* (i×j×t)	Cross Decomposition				M I P		
		시간**	하한값	상한값	반복 횟수	시간**	검사노드 (전체노드)	최적해
예제 1	3×4×3	1	506	506	1	16	57 (454)	506
예제 2	4×5×4	1	1158	1158	1	85	100 (496)	1158
예제 3	4×8×5	3	2517	2517	1	245	114 (520)	2517
예제 4	5×8×5	3	1637	1643	1	747	220 (550)	1643
예제 5	5×10×5	3	2268	2268	1	1107	189 (550)	2268
예제 6	6×12×5	47	4335	4341	1	2650	262 (580)	4341
예제 7	7×15×5	9	4339	4339	1	***	***	***

* : i=후보대상 설비위치(Facility Site) 수.
j=수요지역(Demand Center) 수.
t=계획기간(Planning Period).
** : 16bit PC를 사용하였으며 단위는 초임.
*** : 문제의 크기가 커져서 혼합 정수계획법을 이용하여 풀 수 없다.

있었으며 문제의 크기가 커져서 혼합 정수계획법으로 해결할 수 없는 문제에 대해서도 쉽게 최적해를 구하였다.

5. 결 론

본 연구에서는 발전소나, 댐, 통신 시스템 또는 공장 생산설비와 같이 초기 설비투자비용이 많이 드는 프로젝트를 계획할 경우 경제적인 중·장기 투자계획의 수립에 근거가 될 수 있는 수학적 모델의 해법을 연구하여 실용화하였다.

즉, 시설용량의 제한이 있는 정적 입지선정 문제를 위하여 개발된 Van Roy의 교차분해 기법을 장기 투자계획 모델의 근간이 되는 동적 입지선정 문제에 확대 적용시켜 원 문제를 수송문제와 시설용량의 제한이 없는 동적 입지선정 문제로 분리하므로써 효율적인 해를 구할 수 있었다. 쌍대 부문제는 시설용량의 제한이 없는 동적 입지선정 문제로서 원 문제에서 능력한계에 대한 제약조건을 완화한 라그란지안 완화형태를 하고 있는데 여기에 대리 제약식을 포함시켜 제약조건의 완화로 약해진 모델을 보강하고 이것에 수정된 쌍대기준 절차를 적용하므로써 최적해가 될 가능성을 높였다. 이때 대리제약식은 Van Roy가 연구한 정적인 경우에는 단일 제약식이므로 쉽게 처리가 가능하였으나, 본 연구에서는 매 계획기간 마다 한개씩의 대리제약식을 갖게 되므로 이에 대한 쌍대 변수값을 정하기 위해서 배낭문제를 이용하여 Van Roy의 교차분해 기법을 확대 적용시켰다. 이와같이 하므로써 혼합 정수계획 문제를 이용하였을 경우에 발생하는 계산상의 어려움을 극복할 수 있었고 PC에서도 상당한 크기의 모델을 다룰 수 있게 되었다.

본 연구는 장기 투자분석을 할 경우 예측하기 힘든 미래상황의 변동에 대해 손쉽게 투자전략을 분석함으로써 계획기간중 적절한 시설투자 계획의 방향을 제시해 주고 투자선락의 수정 및 전반적인 투자상황을 파악할 수 있도록 하여 투자개발 정책 결정에 참고로 이용될 수 있을 것이다.

참 고 문 헌

(1) Akinc, U. and B. M. Khumawala, "An Efficient Branch Algorithm for the Capacitated Warehouse Location Problem," *Management Science*, Vol.23, pp.585~594(1977).

(2) Davis, P. C. and T. L. Ray, "A Branch-Bound Algorithm for the Capacitated Facility Location Problem," *Naval Res. Logist. Quart.*, Vol.16, pp.331~344(1969).

(3) Efroymson, M. A. and T. L. Ray, "A Branch-Bound Algorithm for Plant Location," *Operation Research*, Vol.14, pp.361~368(1966).

(4) Erlenkotter, D., "A Dual-Based Procedure for Uncapacitated Facility Location," *Operation Research*, Vol.26, pp.992~1009(1978).

(5) Geoffrion,A.M., and R.McBride, "Lagrangian Relaxation Applied to Capacitated Facility Location Problem," *AIIE trans.*, Vol.10, pp.40~47(1978).

(6) Guignard,M., and K.Spielberg, "A Direct Dual Method for the Mixed Plant Location Problem with Some Side Constraints," *Math. Program.*, Vol 17, pp.198~228(1979).

(7) Khumawala,B.M., "An Efficient Branch and Bound Algorithm for the Uncapacitated Warehouse Location Problem," *Naval Res. Logist. Quart.*, Vol.20, pp.109~121(1973).

(8) Kuenzi,H.P., Tzschach,H.G., and Zehnder,C.A., *Numerical Methods of Mathematical Optimization*, Academic Press(1971).

(9) Roodman,G.M., and Schwarz L.B., "Optimed and Heuristic Facility Phase-Out Strategies," *AIIE trans.*, Vlo.7, pp.177~184(1975).

(10) Ross,G.T., and Soland,R.M., "Modeling Facility Location Problems as Generalized Assignment Problems," *Management Science*, Vol.24, pp.345~357(1977).

(11) Van Roy,T.J., "A Cross Decomposition Algorithm for Capacitated Facility Location," *Operation Research*, Vol.34, pp.145~163(1986).

(12) Van Roy,T.J., and D.Erlenkotter, "A Dual-Based Procedure for Dynamic Facility Location," *Management Science*, Vio.28, pp.1091~1105(1982).

(13) 송재욱, 김승권, "An Application of Lagrangian Relaxation and Subgradient Method for a Dynamic Uncapacitated Facility Location Problem," 한국경영과학회지, Vol.13, No.2, pp.47~57(1988).