Journal of the Korean
OR/MS Society
Vol.15, No.1, June, 1990

# 트리(Tree) 구조를 갖는 망설계 문제의 정식화에 관한 조사 연구+

차동완* · 윤문길**

# A Survey on Design Modelling of Networks with Tree Configuration+

D. W. Tcha*, M. G. Yoon**

**Abstract**

This survey is on modelling of various network design problems with tree configuration, which have a wide variety of practical applications, particularly in communication and transportation network planning. Models which can be classified as either minimum spanning tree or Steiner tree, are investigated. Various important variants of each basic model are then classified according to model structures. In addition to the classification, the typical solution method for each problem is briefly sketched, along with some remarks on further research issues.

* 한국과학기술원 경영과학과
** 한국전기통신공사 연구개발단
+ 이 논문은 아산사회복지사업재단의 1989년 연구비 지원에 의하여 이루어졌음.

# Ⅰ. 서 론

## 1.1 개 요

망 설계와 관련된 문제는 여러 분야에서 현실적인 적용 가능성이 높기 때문에 이제까지 많은 관심을 가지고 연구가 진행되어 왔다. 그러나 일반적인 망 설계 문제를 수리모형을 이용하여 정식화하게 되면 현실적인 제약요인을 나타내는 제약조건들 때문에 복잡한 형태의 문제로 정식화된다. 뿐만 아니라 정식화된 모형의 대부분이 혼합 정수계획문제(mixed-integer programming problem)로 표현되기 때문에 최적해를 구하는 데 많은 어려움이 따르게 된다.

그러나 일반적인 망 설계 문제인 경우에도 설계되는 망의 구조가 어떤 특별한 형태를 갖게 되는 경우에는, 망 구조의 특별한 형태를 이용하면 보다 쉽게 최적해를 찾을 수 있게 된다. 설계되는 망이 트리(tree)구조를 갖는 경우가 이같은 예라 할 수 있다.

최적망의 형태가 트리구조를 갖는 망 설계 문제는 주로 컴퓨터 통신망의 설계에 가장 많아 활용되고 있고, 가스, 수도, 하수처리 등과 관련된 파이프라인(pipeline)망의 설계 문제와 도로 및 수송망의 설계문제 등에 응용되고 있다. [38] 이러한 유형의 문제는 주로 MST(Minimum Spanning Tree) 모형을 기본으로하여 연구가 진행되고 있으며, 최근들어 Steiner문제를 네트웍상에서 정의한 Steiner 트리 문제가 이 분야에서 활발히 연구되고 있다.

그러나, 이와같이 트리구조를 갖는 망 설계문제가 현실적인 응용성이 풍부하고 많은 연구가 진행되고 있음에도 불구하고, 이 같은 유형의 문제에 대한 체계적인 조사는 최근들어 연구되기 시작하였을 뿐이다[57].

따라서, 본 연구에서는 일반적인 망설계 문제중에서 최적망의 형태가 트리구조를 갖는 대표적인 문제인 MST 유형의 문제와 Steiner 트리 문제를 대상으로 기존의 연구결과를 체계적으로 조사 분석하고자 하였다. 특히 수리모형을 통한 정식화 방법을 중심으로 조사하여, 기존의 연구결과에서 고려하였던 모형의 특성을 분석하고 이를 유형별로 정리 함으로써 앞으로 이 분야에 대한 연구시에 적절한 수리 모형을 수립하는데 도움이 되도록 하였다.

본 장의 2절과 3절에서는 네트웍상에서 트리를 표현하는 일반적인 방법과 트리구조를 갖는 망 설계문제의 유형을 소개한다. 2장과 3장에서는 MST 모형을 기본으로하는 문제와 Steiner 트리 문제에 대하여 각각 수리모형의 소개와 특성을 비교분석한다. 끝으로 4장에서는 트리구조를 갖는 망 설계문제에서 앞으로 연구되어야 할 연구과제에 대하여 간략히 언급한다.

## 1.2 트리(Tree)의 표현

일반적으로 그라프 상에서 표현되는 트리는 방향성이 없는 그라프(undirected graph)에서 정의되는 방향성이 없는 트리(undirected tree)와 방향성이 있는 그라프(directed graph)에서 정의되는 방향성이 있는 트리(directed tree)로 구분 될 수 있다. 방향성이 없는 트리는 [정리 Ⅰ]

과 같이 표현된다〔54〕.

〔**정리** I〕 방향성이 없는 그라프 G=(N, E)가 다음 조건중 어느 하나만 만족하여도 트리를 나타낸다. (N : 노드집합, E : 방향성이 없는 아크집합)

I-1 : G의 아크수가 (노드수-1)이고, G상에 사이클이 존재하지 않는다.

I-2 : G의 아크수가 (노드수-1)이고, 모든 노드가 연결되어 있다.

I-3 : G상의 어떤 두 노드간에도 오직 하나의 경로만 존재한다.

I-4 : G상에 싸이클이 없고, 인접하지 않은 두 노드를 연결했을 경우 G상에 정확히 하나의 싸이클만 존재한다.

한편 방향성이 있는 트리에서는 출발노드(또는, 종착노드)로 사용되는 노드가 반드시 하나 존재하게 되는데 이러한 노드를 루트(root)노드라 하고, 루트노드의 in(또는, out)-degree는 0이 된다. (in(out)-degree : 노드로 부터 들어오는(나가는) 방향으로 연결된 아크의 수)

방향성이 있는 그라프에서 미리 정해진 루트노드가 없는 경우에는 어떤 노드를 루트노드로 고려하느냐에 따라 얻어지는 트리의 형태가 달라지게 된다. 따라서 방향성이 있는 그라프에서 트리를 구하기 위하여는 미리 지정된 루트노드가 존재하여야 하고, 그 표현 양식은 〔**정리** II〕와 같다.

〔**정리** II〕 방향성이 있는 그라프 G=(N, A)가 다음 조건중 어느 하나만 만족하여도 방향성이 있는 트리(Dircted Tree)를 나타낸다. (N : 노드집합, A : 방향성이 있는 아크집합)

II-1 : 루트노드(r)로 부터 G상의 다른 모든 노드까지 방향이 지정된 단 하나의 경로가 존재한다.

II-2 : 루트노드(r)로 부터 모든 노드까지를 연결하는(또는, 모든 노드로부터 루트노드(r)까지 연결되는) 경로가 존재하고, 각 노드의 in(out)-degree는 루트노드(r)에서만 0이 되고 다른 모든 노드에서는 1이 된다.

II-3 : G상에 싸이클이 없고, 각 노드의 out(in)-degree는 루트노드(r)에서만 0이 되고, 다른 모든 노드에서는 1이 된다.

II-4 : G상에 싸이클이 없고, 루트노드(r)로 부터 G상의 모든 노드까지를 연결하는(또는, 모든 노드로 부터 루트노드(r)까지 연결되는) 경로가 존재한다.

이상의 〔**정리** I〕과 〔**정리** II〕를 이용하면, 망설계시에 고려되는 트리는 주어진 그라프의 형태와 표현양식에 따라 여러가지 모형으로 정식화 할 수 있음을 알 수 있다.

### 1.3 트리 구조를 갖는 주요 문제.

망 설계 문제에 있어서 트리구조를 갖는 경우에 대한 문제는 매우 다양하게 소개되고 있다. 그러나 대부분의 문제들이 MST문제를 기본으로하는 확장된 문제인 경우와 중간 매개노드를 고려하는 Steiner트리 문제로 분류할 수 있다.

1) MST 유형의 문제

MST유형의 문제는 노드집합 N과 아크집합 A를 갖는 그라프 G=(N, A)와 아크설치비용이 주어진 경우, 모든 노드를 최소의 비용으로 연결시켜 주도록 하는 MST문제를 기본으로 한다. 확장문제로는 각 노드의 트래픽 요구량이 주어지고 각 아크에서 처리할 수 있는 트래픽에 대한 용량의 제약이 주어지는 CMST (Capacitated Minimum Spanning Tree) 문제와 각 노드에 직접 연결될 수 있는 아크수의 제약이 주어지는 DCMST (Degree Constrained MST) 문제로 대별될 수 있다. 이 밖에 각 아크에서 소요되는 자원의 양에 대한 제약이 추가되는 자원제약하의 MST문제도 소개되고 있다.

2) Steiner 트리 문제

노드집합 N과 아크 집합 A를 갖는 그라프 G=(N, A)에서 노드집합 N이 두개의 노드집합 V와 S로 구분되고, 이 중 V집합에 속하는 모든 노드는 반드시 루트노드와 연결 되어야 한다. 이때 S집합에 있는 일부의 노드를 통하여 V집합의 노드를 연결하는 것이 비용이 적게드는 경우에는 S집합의 일부 노드도 트리에 포함되도록 하는 문제가 Steiner트리 문제이다 (그림 1). 노드집합 S를 Steiner집합이라 한다.

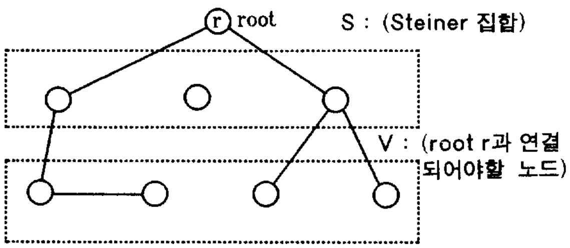


그림 1 Steiner 트리

### 1.4 사용변수 및 기호

본 연구에서 공통적으로 사용되는 변수와 기호는 다음과 같이 정의하여 사용하기로 한다. 특히 그라프 상에서 표현되는 아크는 방향성이 있는 경우에는 A로, 방향성이 없는 경우에는 E로 표현하기로 한다.

$G=(N, A^*)$ : 노드집합 N과 아크집합 $A^*$를 갖는 그라프 ($A^*=E$ 또는 A)

$G'=(N', A')$ : 노드집합 $N' \subset N$과 아크집합 $A' \subset A$를 갖는 G의 서브 그라프 (sub-graph)

$y_{ij}$ : 아크 (i, j)의 설치 여부를 나타내는 0-1 정수변수

$x_{ij}$ : 아크 (i, j) 상의 흐름량에 관한 변수

$x^k_{ij}$ : 품목 (commodity) k가 아크 (i, j)에 흐르는 양을 나타내는 변수

$f_{ij}$ : 아크 (i, j) 설치에 소요되는 비용 ($f_{ij} \geq 0$)

$c^k_{ij}$ : 아크 (i, j)에 흐르는 품목k의 흐름단위당 비용 ($c^k_{ij} \geq 0$)

o(k), d(k) : 품목 k의 출발노드와 종착노드

$|N|$ : 집합 N의 원소의 갯수

K : 품목 (commodity) k의 집합

Q : 아크의 트래픽 처리 용량

## Ⅱ. MST 유형의 문제

기본적으로 MST문제는 문제의 특수한 구조때문에 비교적 손쉽게 적용할 수 있는 효과적인 해법 [36, 43]이 개발되어 있다. 또한 기존의 MST 모형을 기본으로 하는 MST의 확장문제는 혼합정수계획 문제로 정식화될 수 있고, 여러가지 해법

을 통하여 문제를 해결할 수 있다.

그러나 MST의 확장문제가 대부분 NP-hard문제이므로 쉽게 적용할 수 있는 효과적인 해법을 개발하는 데는 많은 난점이 있으며, MST의 확장문제를 정식화하는 방법에 따라 개발되는 해법의 효율성이 달라지게 된다[43]. 뿐만 아니라 주어진 그라프의 형태(방향성의 유무)에 따라 트리를 나타내는 방법이 다르기 때문에 다양한 형태로 정식화 되고 있다.

따라서 본장에서는 MST유형의 문제를 방향성이 있는 그라프와 없는 그라프로 구분하여, 기존의 정식화모형을 조사하고 각 모형의 특성을 분석한다.

## 1. 방향성이 없는 그라프에서 MST 유형의 문제

방향성이 없는 그라프에서 MST를 수리모형으로 정식화 하는데에는 [정리 I]의 I-1, I-2, I-3이 주로 이용 되고 있다. 즉, 세가지 표현방법이 모두 동일하게 트리를 설명하고 있지만, 정식화 되는 방법은 서로 다르게 나타난다.

따라서 MST유형의 문제는 트리 표현양식의 차이에 따라 다음과 같이 3가지 유형으로 구분하여 정식화할 수 있다.

- Type 1 : 그라프 G안에 싸이클이 없도록 하면서, 아크수는 |N|-1이 되도록 정식화 한다. (I-1 이용)
- Type 2 : 그라프 G안에 모든 노드가 연결 되도록 하면서, 아크수는 |N|-1이 되도록 정식화한다. (I-2 이용)
- Type 3 : 그라프 G안에 모든 노드쌍간에 정확히 하나의 경로만 존재하도록 정식화 한다. (I-3 이용)

### 1.1 Type 1 모형

이 모형에서는 그라프 G상에 싸이클이 발생하지 않도록 하는 제약조건을 정식화하여야 한다. 이를 위하여 sub-tour방지 제약식을 이용한다. 즉, 임의의 노드집합 $N' \subset N$으로 만들어지는 서브그라프(sub-graph) G'상에 싸이클이 발생하지 않도록하고, 이같은 과정을 G의 모든 서브그라프에 적용하면 그라프 G상에는 싸이클이 존재하지 않게 된다.

Edmonds는 이같은 성질을 이용하여 MST를 LP로 정식화하였다[40].

(Ed)

$$\min \sum_{(i,j)\in E} f_{ij} y_{ij}, \qquad \text{(ed. 1)}$$

$$\text{s.t.} \sum_{(i,j)\in E} y_{ij} = |N|-1, \qquad \text{(ed. 2)}$$

$$\sum_{(i,j)\in E'} y_{ij} \le |N'|-1, \quad N' \subset N : |N'| \ge 2,$$
$$E' = E \cap (N' \times N') \qquad \text{(ed. 3)}$$

$$y_{ij} \ge 0, \qquad (i,j) \in E \qquad \text{(ed. 4)}$$

(ed. 3)식에서 노드집합 N의 임의의 부분집합 $N'$로 만들어지는 모든 서브그라프상에 설치되는 아크수를 $|N'|-1$ 이하로 제한하게 되면 G상에는 어떤 경우라도 싸이클이 발생하지 않는다. 따라서 (ed. 3)의 싸이클방지 제약식과 (ed. 2)의 아크수에 대한 제약으로 임의의 가능해에서도 spanning tree가 얻어지고, 비용을 최소화하면 MST가 된다. (ed. 2), (ed. 3)은 정수 다면체(integral polytope)를 만들기 때문에 (Ed)모형에서는 $y_{ij}$변수

에 대한 선형제약이 가능하다[15, 43].

〔(Ed) 모형의 확장〕

(Ed) 모형을 기본으로하는 확장모형은 다음과 같다.

1) DCMST (Degree Constrained Minimum Spanning Tree)

각 노드에 연결되는 아크수에 대한 제약조건 (ed. 5)를 (Ed)에 추가한다.

$$\sum_{j \in N} y_{ij} \leq b_i, \quad i \in N \qquad \text{(ed. 5)}$$

($b_i$ : 노드 i에 연결될 수 있는 최대 아크수)

즉, 각 노드에 직접 연결될 수 있는 최대한의 아크수를 $b_i$로 제한하는 제약식을 추가한 것이다. 이때 제약식 (ed. 5)가 추가되어 제약조건이 정수다면체를 만들지 못하기 때문에 변수($Y_{ij}$)에 정수 제약조건이 부여된다. DCMST는 NP-hard 문제이기 때문에 빠른 시간안에 해를 얻기 위하여 대부분 Heuristic해법을 사용한다.

2) RCMST (Resource Constrained Minimum Spanning Tree)

각 아크에서 일정량의 특정자원이 소요되는 경우 소요자원에 대한 제약식이 (Ed)에 추가된 형태이다. Shogan[52]은 (Ed)모형에 자원 제약식을 추가하여 RCMST를 고려하였고, 소요자원에 대한 제약식을 완화시켜 해를 구하는 Lagrangean 완화방법을 사용하여 해를 구하였다.

$$\sum_{(i,j) \in E} a_{ij}^k y_{ij} \leq b_k, \quad k = 1, \cdots, m$$

($a_{ij}^k$ : 아크 (i, j)에서 자원 k의 소요량
$b_k$ : 자원 k의 사용가능량)

이밖에 Aggarwal등[1]은 (Ed)의 제약조건하에서 이중목적(bi-objective)함수를 갖는 MST문제를 수리모형으로 정식화하였다.

〔Type 1 모형의 특성〕

이상에서 살펴본 Type 1 모형의 특성은 다음과 같이 정리할 수 있다.

1) 제약조건식으로 부터 얻어지는 실행가능해는 항상 트리가 된다.
2) 제약조건이 추가되고, 목적함수가 추가(트래픽량에 따른 변동비) 되어도 실행가능해는 트리가 되기 때문에 다양한 문제로 확장이 용이하다.
3) MST에서 확장된 대부분의 문제들이 NP-hard 문제가 되는데, 적절한 Heuristic 해법을 통하여 해를 구하더라도 트리구조를 보장할 수 있다.
4) 노드수가 많아지면 싸이클방지 제약식의 수가 방대해지므로 효과적인 해법을 개발하기가 용이하지 않다.

1.2 Type 2 모형

이 모형에서는 모든 노드의 연결성을 보장해 주는 제약조건이 필요하다. 모든 노드의 연결성을 유지하기 위해서는 모든 노드쌍간에 연결되는 경로가 존재하여야 한다. 즉, 각 노드쌍간에 1단위의 트래픽을 주고 받도록 하고, 이들 트래픽이 흐를 수 있는 아크를 최소비용으로 설치하도록 정식화 한다.

이를 위하여 각 노드쌍간의 트래픽을 품목(commodity)으로 정의하고, 각 품목별로 출발노드, 종착노드, 중간기착노드를 구분한다. 품목별로 구분된 각 노드에서 흐름보존법칙(flow conservation rule)이 만족되도록 하면 각 품목별 노드쌍간에 트래픽이 흐를 수 있는 경로가 설

정되게됨과 동시에 모든 노드쌍간을 연결하는 경로가 설정되게 된다.

아크상을 흐르는 트래픽은 방향성을 갖고 있기 때문에 트래픽 변수($x^k_{ij}$)는 방향성이 있는 아크에 대하여 정의되어야 한다. 따라서 방향성이 없는 그라프에서는 아크(i, j)를 방향성이 있는 아크((i, j)∈A)로 바꾸어 트래픽 변수를 사용하여야 한다. 그러나 트래픽량에 따른 비용을 고려하지 않기 때문에 목적함수에는 아무런 영향을 미치지 않는다.

정식화 모형에서 트리를 만들기 위해서는 설치되는 아크수에 제약을 두어야 하는데, 이때는 다음의 두가지 방법을 사용할 수 있다. 첫째는 Type 1에서와 같이 설치되는 아크 수가 (노드수-1)이 되도록하는 제약식을 사용하는 방법이고, 둘째는 모든 노드의 연결성(Connectivity)을 나타내는 제약식을 이용하는 간접제약 방법이다. 즉, 모든 노드를 연결하도록 하는 제약식을 사용하면 그라프 G상에는 적어도 (노드수-1)개 이상의 아크가 필요하게 되는데 이때 아크 설치비용을 최소화하면 설치되는 아크수는 노드수 보다 하나 적게 되어 MST가 얻어지게 된다.

Magnanti & Wong[38]은 일반적인 망설계 문제에서 목적함수로 아크비용만 고려하게 되면 아크수에 대한 간접제약 방법을 통하여 MST문제로 정식화될 수 있음을 보여주었다.

(MW) :

$$\min \sum_{(i,j)\in E} f_{ij} y_{ij}, \qquad \text{(mw. 1)}$$

$$\text{s. t.} \quad \sum_{j\in N} x^k_{ij} - \sum_{j\in N} x^k_{ji} = \begin{cases} 1, & \text{if } i=o(k), \\ -1, & \text{if } i=d(k), \quad k\in K \\ 0 & \text{otherwise}, \end{cases} \qquad \text{(mw. 2)}$$

$$x^k_{ij} \le y_{ij}, \quad (i, j)\in E, \quad k\in K, \qquad \text{(mw. 3)}$$

$$x^k_{ji} \le y_{ij}, \quad (i, j)\in E, \quad k\in K, \qquad \text{(mw. 4)}$$

$$x^k_{ij}, \ x^k_{ji} \ \ge 0, \quad y_{ij}\in(0, 1), \quad (i, j)\in E, \quad k\in K, \qquad \text{(mw. 5)}$$

(mw. 2)는 각 노드에서 품목 k에 대한 흐름보존법칙을 나타내고 있고, 이 제약식으로 모든 노드의 연결성이 유지된다. (mw. 3), (mw. 4)는 아크가 설치된 경우에만 트래픽이 흐를수 있음을 나타내고 있고, (mw. 2), (mw. 3), (mw. 4)에 의해 최소한 (N-1)개의 아크가 필요하게 된다. 따라서 (MW)의 최적해에서는 항상 MST가 얻어지게 되나 임의의 가능해에 대하여는 트리를 보장해주지 못한다. 여기서 (mw. 3), (mw. 4)식은 (mw. 6)식으로 바꾸어도 동일한 표현이 된다[7].

$$x^k_{ij} + x^k_{ji} \ \le y_{ij}, \quad (i, j)\in E, \quad k\in K, \qquad \text{(mw. 6)}$$

[(MW)모형의 확장]

(MW)의 모형의 확장문제로 노드쌍간에 일정량의 트래픽이 있고($r_k$), 트래픽량에 따른 변동비용을 고려하는 communication트리 문제는 다음과 같이 정식화 된다[40].

$$\min \sum_{(i,j)\in E} c^k_{ij} x^k_{ij} + \sum_{(i,j)\in E} f_{ij} y_{ij}$$

$$\text{s. t.} \quad \sum_{j\in N} x^k_{ij} - \sum_{j\in N} x^k_{ji} = \begin{cases} r_k, & \text{if } i=o(k), \\ -r_k, & \text{if } i=d(k), \quad k\in K, \\ 0 & \text{otherwise}, \end{cases}$$

$$x^k_{ij} \le r_k y_{ij}, \quad (i, j)\in E, \quad k\in K,$$

$$x^k_{ji} \le r_k y_{ij}, \quad (i, j)\in E, \quad k\in K,$$

$$\sum_{(i,j)\in E} y_{ij} \le |N| - 1$$

$$x^k_{ij}, \ x^k_{ji} \ \ge 0, \quad y_{ij}\in(0, 1), \quad (i, j)\in E, \quad k\in K,$$

Communication트리 모형은 (MW)모형에 비하여 목적함수에 트래픽의 양에 따른 변동 비용이 추가되어, 일반적인 망 설계문제의 형태를 갖게 된다. 이 경우에 (MW)모형에서와 같이 설치되는 아크수에 대하여 간접 제약방식을 적용하면, 비용구조에 따라 싸이클이 발생할 수 있다. 따라서 최대로 설치되는 아크수를 |N-1|로 제약하게 되면 모든 노드의 연결성을 나타내는 제약식과 함께 비용구조와는 무관하게 항상 트리를 구성 할 수 있다.

(MW)모형에서도 Type 1 모형에서와 같이 각 노드에 Degree 제약을 추가하면 DCMST문제로 확장될 수 있다. 그러나 아크용량에 제약이 있는 CMST문제로의 확장은 용이하지 않다. (MW)모형에서 아크용량에 대한 제약식을 추가하여 CMST문제로 정식화 하게 되면, 설치되는 아크수를 직접 제약하지 않기 때문에 아크의 용량부족으로 (|N-1|)개 이상의 아크가 설치되게 되어 싸이클이 발생할 수 있다. 따라서 CMST문제로 확장하기 위하여는 설치되는 아크수에 대한 직접적인 제약식을 추가하여야 한다.

〔Type 2 모형의 특성〕

Type 2 모형의 특성은 다음과 같다.

1) 대규모 망에서는 Type 1보다 제약식의 수가 현저히 줄어들게 되나, 새로운 변수의 도입에 따라 변수수가 증가하게 된다.
2) 아크 수에 대한 별도의 제약이 없어도 최적해에서는 항상 트리가 얻어진다.
3) (MW)모형이 최적해에서만 트리를 보장해주기 때문에 확장된 문제의 Heuristic해법 개발시에는 얻어지는 해가 트리가 되도록 하는 과정이 필요하다.

1.3 Type 3 모형

각 노드쌍간에 유일한 경로가 존재하도록 하는 제약조건을 필요로 하는 모형이다. 이를 위하여 각 노드쌍간에 가능한 경로를 미리 결정하고, 결정된 경로 중에서 하나를 선택하도록 하는 제약조건을 사용한다. 이때 아크 설치비용을 최소화하게 되면 모든 노드쌍간에 유일한 경로가 존재하게 된다.

Balakrishinan〔6〕은 이같은 제약조건을 이용하여 일반적인 망설계 문제를 정식화하였는데, 여기서 아크의 설치에 따른 비용만 고려하면 MST 문제로 정식화될 수 있다.

(Ba) :

$$\min \sum_{(i,j)\in E} f_{ij} y_{ij} \qquad \text{(ba. 1)}$$

$$\text{s.t.} \sum_{p\in P(k)} x_p^k = 1, \quad k\in K \qquad \text{(ba. 2)}$$

$$x_p^k \le y_{ij}, \ (i,j)\in E, \ p\in P(k), \ k\in K \qquad \text{(ba. 3)}$$

$$x_p^k \ge 0, \quad y_{ij}\in (0,1), \quad p\in P, \quad (i,j)\in E, \quad P = U_k P(k) \qquad \text{(ba. 4)}$$

(P(k) : 품목 k가 흐를 수 있는 경로의 집합
$x_p^k$ : 품목 k가 경로 p에 흐르는 트래픽 양)

(ba. 2)는 노드쌍간에 한단위 트래픽이 흐를 수 있는 경로를 하나만 선택하도록 한다. (ba. 3)은 경로를 구성하는 모든 아크가 설치된 경우에만 트래픽이 흐를 수 있음을 나타내 준다. (ba. 2), (ba. 3)으로 부터 모든 노드쌍간에 하나 이상의 경로가 만들어질 수 있으나, 아크 설치비용을 최소화하게 되면 사이클이 제거되어 각 노드쌍간에 유일

〈표 1〉 MST 모형의 유형별 특성 비교

| 구 분 | 모 형 의 특 성 | 실행가능해 | 최적해 | 주 요 연 구 |
|---|---|---|---|---|
| Type Ⅰ | sub-tour 방지 제약식을 이용 싸이클 방지 | 트 리 | MST | Edmond〔40〕 Volgenant〔56〕 |
| Type Ⅱ | 트래픽 변수를 이용하여 모든 노드의 연결성 보장 (Multi-commodity 형태 이용) | 노드간의 연결 보장 | MST | Magnanti Wong〔38〕 |
| | | 트 리 | MST | Migdalas〔40〕 |
| Type Ⅲ | 모든 노드쌍간의 가능한 경로 중에서 하나만 선택 | 노드간의 연결 보장 | MST | Balakrishnan〔6〕 |

한 경로만 존재하게 되어 MST가 구해진다.

〔Type 3 모형의 특성〕

Type 3 모형의 특성은 다음과 같다.

1) 문제를 정의하는데 사용되는 변수와 제약식이 Type 1, Tpye 2에 비해 대폭 줄어들어 문제가 비교적 간단해 진다.
2) 모든 node pair간에 가능한 경로를 미리 결정해야 되기 때문에 대규모 문제에는 적합하지 않다.
3) 최적해가 아닌 경우에는 Spannign tree를 보장해 주지 못하는 단점이 있다.
4) CMST, DCMST등의 문제로 확장이 곤란하다.

### 1.4 방향성이 없는 MST유형 문제의 특성 비교

방향성이 없는 그라프에서의 MST유형의 문제에 대한 각 모형별 특성은 〈표 1〉과 같이 정리할 수 있다.

Type 1 모형의 경우에는 임의의 가능해가 항상 트리를 갖게되나 제약식으로 sub-tour 방지 제약식을 사용함으로써 대규모 망을 대상으로 하는 경우에는 방대한 제약식을 갖게되는 단점을 갖고 있다. 반면에 Type 2 모형에서는 트래픽 변수를 도입하여 노드의 연결성 문제를 해결하였지만, 아크수에 대한 간접제약 방식을 적용함으로써 최적해에서만 트리구조를 보장해주는 단점을 갖고 있다. Type 3 모형의 경우에는 비교적 간단한 형태로 표현되고 있으나 모든 노드쌍간의 가능한 경로를 미리 선정해야 하는 문제가 있다. 따라서 망 규모가 커지게 되면 적용하기 곤란할 뿐만 아니라, Type 2 모형에서와 같이 아크수에 대하여 간접제약 방법을 채택함으로써 최적해인 경우에만 트리구조를 보장하는 단점이 있다.

## 2. 방향성이 있는 그라프에서의 MST 유형 문제

방향성이 있는 그라프에서의 MST유형 문제는 주로 컴퓨터 통신망의 설계분야에 이용되고 있다. 방향성이 있는 그라프에서는 모든 노드 방향으로 나가는 아크 혹은 모든 노드로 부터 들어오는 아

크만 존재하는 특정한 노드가 존재하는데 이를 루트노드(root node)라 한다. 본 절에서는 루트노드로 부터 모든 노드까지의 방향성을 갖고 연결되는 MST를 찾거나, 모든 노드로 부터 루트노드까지 방향성을 갖고 연결되는 MST를 구하는 문제인 MDST (Minimum Directed Spanning Tree) 모형에 대하여 설명한다.

MDST를 수리모형으로 표현하는 방법은 〔정리 Ⅱ-2〕와 〔정리 Ⅱ-3〕이 주로 이용 되고 있다. 그러나 〔정리 Ⅱ-2〕와 〔정리 Ⅱ-3〕은 표현양식으로만 달리 나타날 뿐 수리모형에서는 동일한 모형으로 표현되게 된다. 즉, 루트노드를 제외한 모든 노드의 in-degree (out-degree)를 1로 제한하고, 루트노드로 부터 모든 노드까지 연결하는 경로가 존재하면 그라프 G상에는 싸이클이 존재하지 않게 된다. 또한 루트노드를 제외한 모든 노드에서 in (out) degree를 1로 제한하고, 그라프 G상에 싸이클이 없는 경우에는 루트노드로 부터 모든 노드 까지 연결하는 경로가 존재하게 된다. 따라서 본절에서는 방향성이 없는 그라프상에서 MST를 구하는 문제와는 달리, 표현양식에 따른 모형의 유형을 구분하지 않기로 한다.

Chandy & Russell〔14〕은 컴퓨터망설계 문제를 방향성이 있는 MST형태의 문제로 정식화 하였다. 이들이 다룬 문제는 중앙의 주 컴퓨터(root)와 (n-1)개의 단말기를 최소의 비용으로 연결하기 위한 것으로, 각 단말기에서는 중앙의 컴퓨터로 보낼 트래픽($r_i$)을 가지고 있고, 각 아크의 처리용량에 제약이 주어지는 CMST문제로 정식화하였다.

$$\text{(CR)}\quad \min \sum_{(i,j)\in E} f_{ij} y_{ij} \qquad \text{(cr. 1)}$$

$$\text{s.t.}\quad \sum_{j\in N} x_{ij} - \sum_{j\in N'} x_{ji} = r_i,\ \ i\in N', \qquad \text{(cr. 2)}$$

$$\sum_{j\in N} y_{ij} = 1,\ \ i\in N' \qquad \text{(cr. 3)}$$

$$x_{ij} \le Q\ y_{ij},\ \ i\in N',\ \ j\in N, \qquad \text{(cr. 4)}$$

$$x_{ij} \ge 0,\ \ y_{ij}\in(0,1),\ \ i\in N',\ \ j\in N,\ \ N'=(N\setminus 1) \qquad \text{(cr. 5)}$$

(cr. 2)식은 각 노드에서 root로 보낼 $r_i$만큼의 트래픽을 갖고 있음을 나타내고, (cr. 3)식은 루트 노드를제외한 모든 노드의 out degree가 1임을 나타내고 있다. (cr. 4)는 아크가 설치된 경우에만 트래픽이 흐를 수 있음을 나타냄과 동시에 아크상에 흐를 수 있는 트래픽의 용량에 대한 제약을 표시한다.

(CR)모형이 방향성이 있는 그라프에서의 CMST모형이 되기 위하여는 degree 제약조건인 (cr. 3) 이외에 사이클이 발생하지 않은 제약조건이 필요하다. 그러나 이같은 제약은 별도의 제약식 없이 (cr. 2)와 (cr. 3)의 두 제약식으로 해결이 가능하다. 즉, (cr. 3)의 제약식이 만족되면서 싸이클이 발생하게 되면 싸이클상의 어느 한 노드에서는 (cr. 2)의 제약식을 위배하게 된다. 따라서 (cr. 2)와 (cr. 3)을 동시에 만족시키는 경우에는 싸이클이 발생하지 않게 되고, (CR)모형으로 부터 방향성이 있는 CMST가 얻어지게 된다. 이에 대한 구체적인 증명은 Gavish〔25〕를 참조하면 된다.

Chandy & Russell은 해를 얻는 방법으로 용량의 제약이 없는 MST에서 루트 노드에 직접 연결된 아크는 항상 CMST의 최적해에 포함된다는 정리를 이용하여 분지한계법(Branch-Bound)을

적용하여 최적해를 구하였다〔14〕.

Gavish〔25〕는 중앙집중식 컴퓨터망의 설계문제를 방향성이 있는 MST문제로 정식화하였고, 제약조건의 추가에 따른 다양한 형태의 모형과 해법을 제시하였다.

Gavish는 (CR)모형에서 각 노드에서의 트래픽을 한 단위로 가정하고, 아크의 용량을 무시함으로써 MDST 모형을 제시하였다.

(G1) :

$$\min \sum_{i \in N'} \sum_{j \in N, j \neq i} f_{ij} y_{ij} \qquad (g1.1)$$

$$\text{s.t.} \sum_{j \in N, j \neq i} x_{ij} - \sum_{j \in N, j \neq i} x_{ji} = 1, \ i \in N', \qquad (g1.2)$$

$$\sum_{j \in N', j \neq i} y_{ij} = 1, \ i \in N' \qquad (g1.3)$$

$$x_{ij} \le (n-1) y_{ij} = 1, \ i \in N', \ j \in N, \ i \neq j, \qquad (g1.4)$$

$$x_{ij} \ge 0, \ y_{ij} \in (0, 1), \ i \in N', \ j \in N, \ i \neq j, \qquad (g1.5)$$

$$N' = (N \setminus 1)$$

(g1.4)에서 아크가 설치된 경우에만 트래픽이 흐를 수 있음을 나타냄과 동시에 아크 상에 흐를 수 있는 트래픽이 최대 (n-1)이 되도록 제한하였다. 그러나 실질적으로 아크를 흐르는 최대한의 트래픽이 (n-1)이 되기 때문에 아크의 용량에 대한 제한은 없는 것과 동일하다. (G1)모형도 (CR)모형과 같이 degree에 대한 제약과 싸이클이 발생하지 않는 특성 때문에 방향성이 있는 MST를 구할 수 있다〔25〕.

〔(G1) 모형의 확장〕

(G1) 모형은 다음과 같이 DCMST, CMST 문제로 확장이 가능하다.

1) DCMST

(G1)모형에서 노드 i로 부터 나가는 아크의 갯수에 대한 제약조건을 추가하면 방향성이 있는 DCMST로 확장할 수 있다. DCMST는 degree 제약조건식을 완화한 Lagrangean 완화방법 등을 통하여 문제를 해결할 수 있다.

2) CMST

(G1)모형에서 (g1.4)식 대신에 아크상에 흐를 수 있는 최대한의 트래픽 양에 제약을 주는 식 (g1.4')를 사용함으로써 CMST문제로 확장할 수 있다.

$$x_{ij} \le Q y_{ij} \quad i \in N', \ j \in N, \ i \neq j, \qquad (g1.4')$$

Gavish는 이 문제를 Benders 분해방법을 이용하여 해결하였다.

CMST문제는 NP-hard 문제로서 최적해를 구하기 위하여 분지한계법이 이용 된다. 분지한계법을 적용하여 빠른 시간에 최적해를 찾기 위하여는 목적함수의 최적값에 근사한 효과적인 하한(Lower Bound)를 구하여야 한다. Gavish는 CMST문제에서 목적함수의 하한을 보다 증가 시키기 위해 새로운 형태의 모형을 제시하였다〔26〕.

(G2) :

$$\min \sum_{i \in N'} \sum_{j \in N} f_{ij} y_{ij} \qquad (g2.1)$$

$$\text{s.t.} \sum_{j \in N} y_{ij} = 1, \ i \in N', \qquad (g2.2)$$

$$\sum_{j \in N} x_{ij} + \sum_{j \in N'} x_{ji} = 1, \ i \in N' \qquad (g2.3)$$

$$y_{ij} \le x_{ij} \le (Q-1) y_{ij}, \ i, j \in N', \qquad (g2.4)$$

$$y_{i1} \le x_{i1} \le Q y_{i1}, \ i \in N', \qquad (g2.5)$$

$$x_{ij} \ge 0, \ y_{ij} \in (0, 1), \ i \in N', \ j \in N, \qquad (g2.6)$$

$$N' = (N \setminus 1)$$

(G2) 모형은 (G1) 모형의 (g1. 4)을 루트 노드 (1)와 기타 노드(N′)로 구분하여 표현한 (g2. 4), (g2. 5)식을 사용하였다. 이 제약식들은 설치된 아크에 트래픽이 없으면 그 아크를 제거함으로써 전체 비용을 감소시킬 수 있기 때문에, 설치된 아크상에는 반드시 트래픽이 흘러야 한다는 조건을 나타내는 것이다. 또한 목적함수의 하한을 보다 증가시키기 위하여 다음과 같은 중복되는 제약식을 추가하였다.

$$\sum_{i \in N'} x_{i1} \geq [(n-1)/Q] = N_q$$

($N_q$ : (n-1)/Q를 넘는 최소의 정수)

즉, 루트노드에 직접 연결될 수 있는 아크수는 아크의 용량제약 때문에 최소한 Nq 이상이 되어야하는 제약을 추가하여, 실행가능 영역을 축소함으로써 하한 값을 증가시킬 수 있다.

Gavish는 (G2) 모형에서 (g2. 3)을 완화시킨 Lagrangean 완화방법을 통하여 목적함수의 하한을 구하였고, 이 값을 이용하여 분지한계법을 실행하면 최적해를 효과적으로 구할 수 있음을 보였다[26].

3) 설치되는 아크의 종류가 서로 다른 CMST

설치되는 아크 종류가 다른 경우에는 다음 두가지 방법으로 정식화할 수 있다[25]. 첫째는 아크의 설치비용을 설치되는 아크의 종류에 따라 다르게 가정하여 (G1) 모형을 적용하는 방법이다. 둘째는 목적함수로서 아크의 설치비용 이외에 아크상을 흐르는 트래픽의 양에 따른 비용을 추가로 고려하는 방법으로, 아크의 설치비용과 트래픽의 양에 따른 비용이 동시에 고려되어 일반적인 망설계문제의 형태를 갖게되나, 제약조건으로 부터 항상 트리구조를 보장 받을 수 있다.

[방향성이 있는 MST모형의 특성]

방향성이 있는 MST모형의 특성은 다음과 같다.

1) 루트노드로 부터 각 노드까지 방향성이 있는 경로를 만들기 위하여 트래픽 변수를 이용한다.
2) 아크의 용량제약을 추가하거나 degree에 대한 제약을 추가함으로써 CMST, DCMST 등으로의 확장이 가능하고, 확장된 문제는 Lagrangean 완화방법이나, 분해방법을 이용하여 해를 구할 수 있다.
3) 루트노드가 주어짐으로 인하여 제약식과 변수의 수가 대폭적으로 줄어들 수 있다.
4) 제약조건식으로 부터 얻어지는 실행가능해가 항상 방향성이 있는 트리가 되기 때문에 Heuristic 해법의 개발이 용이하다.
5) 특정 노드를 미리 루트노드로 지정해야 되기 때문에 미리 루트노드를 결정할 수 없는 문제에 대하여는 적용할 수 없다.

## Ⅲ. Steiner 트리 문제

Steiner 트리 문제는 노드집합 N 중에서 루트노드와 반드시 연결 되어야 할 노드집합 V를 최소의 비용으로 연결하기 위하여, 필요한 경우 Steiner 집합 S에 속해있는 노드를 경유할 수 있도록 하는 것이다[37, 57]. 기존의 MST문제가 노드집합 N에 속해있는 모든 노드가 연결 되도록 하는데 반하여, Steiner 트리 문제는 집합 V에

속해 있는 노드는 반드시 연결하여야 하는 반면에 Steiner 집합 S에 속해있는 노드는 반드시 연결될 필요가 없는 문제이다.

Steiner 문제도 근본적으로 트리구조를 갖는 문제이다. 따라서 정식화 모형에서 트리를 표현하기 위하여 주어진 그라프의 방향성 유무에 따라 〔정리 Ⅰ〕과 〔정리 Ⅱ〕를 이용한다. 또한 Steiner 트리 문제도 MST의 확장문제와 같이 NP-hard 문제로서 정식화 하는 방법에 따라 개발되는 해법의 효율성에 영향을 미칠 수 있다〔37〕.

## 1. 방향성이 없는 그라프에서의 Steiner 트리(STUG) 문제

방향성이 없는 그라프에서 Steiner 트리를 구하는 문제는 Aneja〔4〕, Beasley〔9, 10〕등에 의하여 모형화 되었다.

Aneja〔4〕는 STUG문제를 set covering 문제로 모형화 하였다.

(An) $\min \sum_{(i,j)\in E} f_{ij} y_{ij},$ (an. 1)

s. t. $\sum_{i\in N_1} \sum_{j\in N_1'} y_{ij} \geq 1, \ N_1 \subset N;$

$1\in N_1; N_1' \cap V \neq 0,$ (an. 2)

$y_{ij} \in (0, 1), \ (i, j) \in E$ (an. 3)

(an. 2)에서 노드집합 N을 $N_1$과 $N_1'$로 구분한다. 이때 루트노드는 $N_1$에 포함되도록 하고, $N_1'$에는 V집합 중 적어도 하나는 포함되도록 한다. V집합의 일부가 포함된 $N_1'$와 루트노드가 포함된 $N_1$간의 cut중에서 적어도 하나 이상의 아크가 존재하도록하면 루트노드와 V집합간의 연결성이 보장된다. (an. 1)의 목적함수에서 아크비용만을 고려하기 때문에 비용을 최소화하면 싸이클은 발생하지 않게된다. 따라서 (AN)모형으로 부터 STUG를 구할 수 있고, 이 모형은 set covering 해법으로 해결할 수 있다. 그러나 (AN)모형을 적용하기 위하여는 그라프 상에 존재하는 모든 cut을 고려해야하기 때문에 대규모 망의 경우에는 이용이 곤란하다.

Beasley〔9〕는 MST의 모형을 이용하여 다품목(multi-commodity) 형태로 STUG를 정식화하였다.

STUG 문제의 정식화는 트래픽 변수를 이용한 MST의 정식화 과정과 같으나, 트래픽은 루트노드에서 V집합으로만 한단위씩 보내어지고, V집합의 노드들만 한단위의 트래픽을 받게된다. Steiner 집합의 노드들은 단지 중계노드로만 고려된다.

(B1) :

$\min \sum_{(i,j)\in E} f_{ij} y_{ij}$ (b1. 1)

s. t. $x_{ij}^k + x_{ji}^k \leq y_{ij}, \ k\in V, \ (i, j)\in E$ (b1. 2)

$P_l \leq \sum_{(i,j)\in E} y_{ij} \leq P_u$ (b1. 3)

$\sum_{(1,i)\in A} x_{1i}^k \geq 1, \quad k\in V$ (b1. 4)

$\sum_{(i,k)\in A} x_{ik}^k \geq 1, \quad k\in V$ (b1. 5)

$\sum_{(i,j)\in A} x_{ij}^k - \sum_{(j,i)\in A} x_{ji}^k \geq 0, \ k\in V, i\in S$ (b1. 6)

$x_{ij}^k, \ x_{ji}^k \geq 0, \ y_{ij} \in (0, 1),$

$(i, j)\in E, k\in V$ (b1. 7)

($P_l, P_u$ : 설치되는 아크 수의 상한과 하한)

(b1. 2)는 설치된 아크 상에는 동일한 품목에 대하여 한방향으로의 트래픽만 가능하게함을 나타낸다. 여기서 $x_{ij}^k$는 루트노드에서 V집합의 각 노드로 보내는 트래픽을 나타낸다. (b1. 3)은 설치되는 아크 수에 대한 제약식인데, V집합의 모든

노드를 루트노드와 연결시키기 위해서는 최소한 |V|개의 아크가 필요하고, Steiner 집합의 노드가 포함될 경우라도 (|N|-1)개의 아크를 초과할 수 없음을 나타내고 있다. 그러나 목적함수값을 최소화하게 되면 결국 루트노드와 트리로 연결되는 노드 수 만큼의 아크만 설치되게 된다.

(b1. 4)-(b1. 6)은 각 품목별로 출발노드, 중계노드, 종착노드를 고려한 흐름보존법칙을 이용한 제약식으로, 이들 조건을 만족하게 되면 루트노드와 V집합 간의 연결성이 보장된다.

Beasley는 이 문제의 해결을 위하여 (b1. 4)-(b1. 6)을 완화시킨 Lagrangean 완화방법을 이용하였다.

Winter[57]는 V집합의 노드들간에 트래픽($r_{kl}$)이 존재하는 확장된 모형을 제시하였다.

(Wt) :

$$\min \sum_{(i,j)\in E} f_{ij}y_{ij} \qquad \text{(wt. 1)}$$

$$\text{s.t.} \quad x_{ij}^{kl} + x_{ji}^{kl} \le y_{ij}, \quad k, l \in V, \quad (i,j)\in E, \quad k \neq l, \qquad \text{(wt. 2)}$$

$$\sum_{(k,j)\in A} x_{kj}^{kl} \ge r_{kl}, \quad k, l\in V, \quad k \neq l \qquad \text{(wt. 4)}$$

$$\sum_{(i,l)\in A} x_{il}^{kl} \ge r_{kl}, \quad k, l\in V, \quad k \neq l \qquad \text{(wt. 5)}$$

$$\sum_{(p,j)\in A} x_{pj}^{kl} - \sum_{(i,p)\in A} x_{ip}^{kl} \ge 0, \quad k, l\in V, p\in N, \quad k \neq l, \qquad \text{(wt. 6)}$$

$$x_{ij}^{kl}, \quad x_{ji}^{kl} \ge 0, \quad y_{ij} \in (0, 1), \quad (i,j)\in E, k, l \in V \qquad \text{(wt. 7)}$$

($x_{ij}^{kl}$ : 노드 k에서 노드 1까지의 트래픽이 아크 (i, j)를 흐르는 량)

(Wt)모형은 (B1)모형과 유사하지만 트래픽 변수의 표현에서 각 노드쌍을 표시해 주었고, 루트노드를 정하지 않은 점이 차이가 있다.

Beasley[10]는 Steiner 트리문제를 DCMST 모형으로 표현하는 새로운 형태의 정식화 모형을 제시하였다. 즉, 기존의 노드와 아크집합에 인위적으로 노드와 아크를 추가하여 새로운 그라프 G*를 정의 하였다. 새로 정의된 그라프 G*를 대상으로 하여 특정 제약식이 추가된 MST를 구하는 문제는 그라프 G 상에서 Steiner 트리를 구하는 것과 동일한 문제가 된다. [10]

Steiner 트리에 대한 새로운 모형의 작성과정은 다음과 같고, 새로운 모형은 (B2)와 같다.

- 가상 노드(0)를 도입하여 원래 그라프 G=(N, E)를 G*=(N', E')로 확장한다. N'=N+{0}, E'=E+{i, 0}, i∈S∪{1}} (그림 2).
- 추가되는 아크는 S집합과 루트노드(1)로 부터 가상노드(0)까지 연결되는 것으로, 목적함수값에 영향을 주지 않도록 하기 위해 비용은 0으로 한다.
- 확장된 G*에서 원문제의 특성을 유지하기 위하여는 S집합의 노드 중에서 가상노드와 연결되는 노드는 반드시 degree가 1이 되어야 한다는 제약조건을 추가한다.

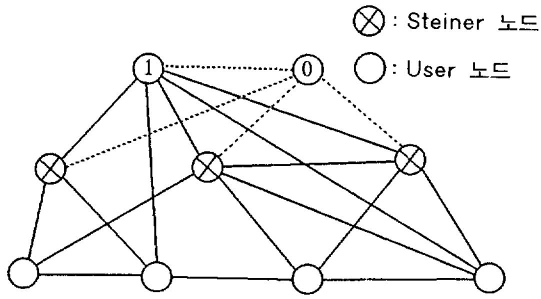


그림 2 확장된 그라프

이 같은 과정에 따라 얻어지는 최적해는 (그림 3)과 같은 CMST로 표현되게 된다.

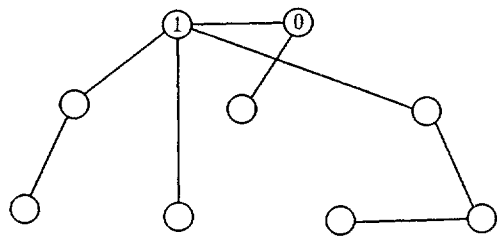


그림 3 CMST로 표현되는 Steiner 트리

Beasley에 의해 새로이 정의된 모형은 (B2)와 같다.

(B2) :

$$\min \sum_{(i,j)\in E'} f_{ij} y_{ij} \qquad (b2.1)$$

$$\text{s.t. } [y_{ij} \text{ form a spanning tree on } (N', E') \qquad (b2.2)$$

$$y_{0i} + y_{pq} \le 1, \quad (p,q)\in P_i,\ i\in S, \qquad (b2,3)$$

$(P_i$ : incident arc of node i in $E')$

(b2. 2)로 표현되는 제약식은 $G^* = (N', E')$상에 MST를 표현하는 기존의 여러 방법을 이용할 수 있다. (b2. 3)의 제약식은 Steiner 집합에 속한 노드를 대상으로하여 새로 추가된 노드(0)와 연결되는 노드는 다른 어떤 노드와도 연결될 수 없음을 나타내주고 있다.

Beasley는 (B2)모형으로 부터 (b2. 3)을 완화시켜 Lagrangean 부 문제를 구하면 그것이 G*에서 MST 를 구하는 문제가 되어 Steiner 문제를 쉽게 해결할 수 있도록 하였다.

## 2. 방향성이 있는 그라프에서 Steiner 트리(STDG) 문제

STDG는 방향성이 있는 그라프에서 Steiner 트리를 구하는 문제로서, Gavish & Graves, Wong 등에 의해 정식화 되었고, STUG 모형을 일부 확장하여 이용할 수 있다.

STUG의 (An) 모형에서 고려하는 아크를 방향성이 있는 아크로 확장하게 되면 STDG로 표현될 수 있다. 즉, 아크(i, j)와 (j, i)를 각각 별개의 아크로 구분하여 아크의 설치비용을 고려하면 (An) 모형이 STDG를 나타내게 된다[57].

Gavish & Graves는 루트노드와 V집합과의 연결성을 유지하고, 설치되는 아크수에 대한 제약은 간접제약 방식을 적용하여 다음과 같이 정식화 하였다. [40]

(GG) :

$$\min \sum_{(i,j)\in A} f_{ij} y_{ij}, \qquad (gg.1)$$

$$\text{s.t. } \sum_{j\in S_i} x_{ij} - \sum_{j\in T_i} x_{ji} = \begin{cases} 0, & \text{if } i\in S \\ 1, & \text{if } i\in V, \end{cases} \qquad (gg.2)$$

$$x_{ij} \le |V|\ y_{ij}, \quad (i,j)\in A, \qquad (gg.3)$$

$$x_{ji} \ge 0, \quad y_{ij}\in(0,1), \quad (i,j)\in A \qquad (gg.4)$$

($S_i$ : 노드 i를 출발지로하여 연결된 노드 집합, $T_i$ : 노드 i를 종착지로하여 연결된 노드 집합)

(gg. 2)식은 V집합에 있는 모든 노드를 대상으로 하여 루트 노드(1)로 1단위의 트래픽을 보내도록 하고, Steiner집합에 속하는 노드는 트래픽을 중계만 하도록 함으로써 V집합과 루트 노드와의 연결성을 유지하도록 한다. (gg. 3)은 설치된 아크상에만 트래픽이 흐를 수 있고, 아크에 대한 용량 제한을 하고 있으나 실제 트래픽을 보유하고

있는 노드수가 $|V|$이므로 아크에 대한 용량제한은 고려하지 않아도 된다.

(GG)모형도 간접제약 방식을 이용하여 설치되는 아크수를 제한함으로써, 최적해에서만 트리구조를 보장해주는 단점을 가지고 있다.

Wong[28]은 (B1)과 같이 다품목 형태로 STDG를 정식화 하였다.

(Wo) :

$$\min \sum_{(i,j)\in A} f_{ij}y_{ij}, \qquad \text{(wo. 1)}$$

$$\text{s. t.} \quad \sum_{j\in N} x^k_{ij} - \sum_{j\in N} x^k_{ji} = \begin{cases} 1, & \text{if } i=1, \\ -1, & \text{if } i=k,\ k\in V \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases} \qquad \text{(wo. 2)}$$

$$x^k_{ij} \le y_{ij}, \quad (i, j)\in A, \quad k\in V, \qquad \text{(wo. 3)}$$

$$x^k_{ij} \ge 0,\ y_{ij}\in(0, 1),\ (i, j)\in A,\ k\in V \qquad \text{(wo. 4)}$$

(Wo)모형에서 사용한 제약식은 (GG)모형에서 사용한 제약식을 다품목으로 나누어 각 품목별로 정식화한 것이다. 여기서 품목 k는 루트 노드(1)로 부터 V집합의 k번째 노드로 보내는 트래픽의 종류를 나타내고 있고, 트래픽량은 각 품목별로 1 단위씩이다.

(Wo)모형도 (GG)모형과 같이 아크수에 대한 간접제약 방식을 채택하고 있다. Wong은 Erlenkotter[21]가 입지선정 문제(Location Problem)를 위해 개발한 Dual ascent방법을 (Wo)모형에 적용하여 효율적인 하한을 구하였고, 용량의 제약이 없는 설비의 입지 선정문제가 Steiner트리의 특별한 경우가 됨을 제시하였다.

Maculan[37]은 (Wo)와 동일한 모형에 대하여 Benders 분해방법을 이용하여 해를 구하였다.

STDG에서 문제의 정식화 방법에 따른 목적함수 간의 관계는 [정리 Ⅲ]과 같다. (증명은 [37, 57] 참조.)

[정리 Ⅲ] (An), (GG), (Wo)의 최적 목적함수 값을 V(An), V(GG), V(Wo)라 할때 다음관계가 성립한다.

$$V(GG) \le V(Wo) = V(An)$$

따라서 정식화 모형의 결정시에는 문제의 복잡성과 목적함수 값의 관계를 고려하여 결정하여야 한다.

## 3. Node Weighted Steiner Tree (NWST) 문제

Steiner트리의 특별한 경우로 NWST문제가 있다. 즉, 루트 노드를 제외한 모든 노드를 Steiner 집합 S로하고, 그 중 하나의 노드가 트리로 연결될 때마다 노드에 일정한 weight(고정 비용 등)가 부가되는 문제이다.

Segev[51]은 방향성이 없는 그라프를 대상으로 하여 이문제를 고려하였으나 문제의 정식화를 위하여 모든 아크를 방향성이 있는 아크로 변환하였다. 이때 아크 설치 비용은 $f_{ij}=f_{ji}$가 되도록 하였고, Tree type(S1)과 Flow type(S2)으로 구분하여 정식화 하였다.

(S1) :

$$\min \sum_{j\in N}\sum_{j\in T} f_{ij}y_{ij} + \sum_{j\in T} g_j z_j \qquad \text{(sl. 1)}$$

$$\text{s. t.} \quad \sum_{i\in N} y_{ij} = z_j, \quad j\in T \qquad \text{(sl. 2)}$$

$$\sum_{i\in N} x_{ij} - \sum_{i\in T} x_{ji} = z_j, \quad j\in T \qquad \text{(sl. 3)}$$

$$x_{ij} \le (|N|-1)\,y_{ij}, \quad i\in N, \quad j\in T \qquad \text{(sl. 4)}$$

$$z_j,\ y_{ij}\in(0, 1),\quad x_{ij} \ge 0,\ i\in N,\ j\in T \qquad \text{(sl. 5)}$$

$T = (N\setminus 1)$

$z_j$ : 노드 j의 설치 여부를 결정하는 0-1변수

$g_j$ : 노드 j의 설치에 따른 수익($g_j \le 0$)

(S1)에서는 $g_j$의 수익이 발생하는 노드 j가 설치되는 경우에만 노드 j가 트리상에 연결될 수 있다. 따라서 (s1. 2)는 노드 j가 설치되는 경우에만 in-degree가 1이 되고 노드 j가 설치되지 않은 경우에는 in-degree가 0이 되어 트리상에 연결되지 않음을 나타낸다. (s1. 3)식은 설치된 노드에서만 루트 노드(1)로 부터 1단위의 트래픽을 받을 수 있도록하여 루트노드에서 노드 j까지 연결되는 경로를 만들 수 있도록 한다. (s1. 4)식은 아크가 설치된 곳에만 트래픽이 흐를 수 있음을 나타내고 있고, MST의 (G1) 모형에서와 같이 아크 용량에 대한 제약은 갖지 않는다. (CR)모형에서와 같은 성질 때문에 (s1. 2)과 (s1. 3)식에 의해 이 모형에서도 싸이클이 발생하지 않는다. 따라서 노드 j가 설치되면 반드시 루트 노드(1)와 트리형태로 연결된다.

(S2) :

$$\min \sum_{i\in N}\sum_{j\in T} f_{ij}y_{ij} + \sum_{i\in T} g_i z_i \qquad (s2.\ 1)$$

$$\text{s. t.} \quad \sum_{j\in T} x^k_{ij} - \sum_{j\in N} x^k_{ji} = \begin{cases} z_i, \text{ if } i=1, \\ -z_i, \text{ if } i=k,\ k\in T, \\ 0, \text{ otherwise,} \end{cases} \qquad (s2.\ 2)$$

$$x^k_{ij} \le y_{ij},\ \ i\in N,\ \ j\in T,\ \ k\in T \qquad (s2.\ 3)$$

$$z_i,\ y_{ij} \in (0,1),\ \ x^k_{ij} \ge 0,\ \ i\in N,\ j\in T,\ k\in T$$

$$T = (N\setminus 1) \qquad (s2.\ 4)$$

(s2. 2)식은 루트 노드에서 트리로 연결되는 노드에만 1단위의 트래픽을 보낼 수 있도록하는 흐름보존 법칙으로, 설치되는 노드는 $g_i$의 수익이 발생하며 모두 루트 노드와 연결될 수 있다. (s2. 3)식은 설치된 아크 상으로만 트래픽이 흐르도록 하는 제약식이다. 설치되는 아크수는 간접제약 방식으로 제한하여, 비용이 최소화될 경우에만 싸이클이 존재하지 않음을 알 수 있어 설치된 노드와 루트 노드가 트리로 연결됨을 보장해 준다.

따라서 (S2)모형의 경우는 (S1)모형 보다 간단한 형태로 표현되지만 임의의 가능해에서 트리를 보장해주지 못하는 단점을 갖고 있다.

## 4. Steiner트리 문제의 특성

Steiner 문제는 MST문제의 특별한 확장 문제로 볼 수 있다. 따라서 정식화 모형의 기본적인 형태는 MST모형과 유사하게 나타난다. 다만 MST모형에서는 설치 되는 아크수에 대한 직접적인 제약이 가능하지만, Steiner문제에서는 트리상에 포함되는 Steiner집합의 노드수에 따라 설치되는 아크수가 달라지게 되므로 설치 되는 아크수에 대하여는 일반적으로 간접 제약방식을 적용하게 된다. 또한 Steiner문제는 Steiner집합의 노드를 트리상에 포함 시켜야 하는 가를 결정해야 되기 때문에 일반적인 MST문제의 확장문제 보다 더욱 해결하기 어려운 문제가 된다.

Steiner트리 문제가 정식화 되는 방법에 따라 해법의 효율성이 달라질 수 있기 때문에, Steiner 트리와 관계된 문제의 해법을 개발할 경우에는 목적함수에 대한 〔정리 Ⅲ〕의 관계와 문제의 복잡성을 동시에 고려하여 대상문제의 정식화 방법을 결정하여야 한다.

## Ⅳ. 결론 및 앞으로의 연구과제

본 연구에서는 트리구조를 갖는 망 설계문제의 정식화 방법에 대하여 중점적으로 조사하였다. 특히, 트리구조를 갖는 여러유형의 문제중에서 가장 대표적인 유형인 MST유형과 Steiner트리 유형의 문제에 대하여, 기존의 연구에서 다루어졌던 모형들을 조사하고 그 특성에 따라 체계적인 분석을 시도하였다. 한편 문제의 유형에 따른 다양한 해법에 관하여는 본 연구에서 구체적으로 소개하지 않고 앞으로의 연구과제로 남겨두었다.

MST형태의 문제는 현실적인 응용성이 매우 많아 여러 부분에서 다루고 있지만 여러 제약조건이 추가되는 경우에는 NP-hard 문제가 되기 때문에 효과적인 해법개발이 무엇보다 중요한 문제로 대두되고 있다. 따라서 MST모형을 기본으로하는 확장된 모형에 대하여는 효과적인 해법을 개발하기 위한 계속적인 연구가 수행되어야 한다. 또한 고려되는 루트 노드가 여러개 존재하는 MST (Multiple rooted MST)문제에 대하여도 보다 많은 연구가 이루어져야 한다.

최근들어 활발히 연구 되어온 Steiner트리문제는 트리구조를 갖는 망 설계문제에 많은 연구 과제를 남기고 있다. 즉, 기존의 Steiner트리문제는 대부분 Steiner노드에 아무런 제약 조건이 없는 문제를 다루었다. 그러나 보다 현실적인 문제에 있어서는 MST의 확장 문제에서와 같이 Steiner노드에 직접 연결될 수 있는 아크수에 제약이 있을 수 있고(degree-constrained Steiner tree problem), 혹은 Steiner집합의 노드와 연결되는 아크의 트래픽 처리 용량에 대한 제약이 추가(capacitated Steiner tree problem)될 수 있다. 또한 Steiner집합의 노드가 중계노드로 사용될 경우 Steinter집합의 노드에 고정비용이 추가되는 문제도 고려할 수 있다.

이와 같이 MST유형의 문제와 Steiner트리문제는 여러 유형의 문제로 확장이 가능하지만 대부분이 NP-hard문제가 되어 해결하기 힘든 문제가 된다. 따라서 트리구조를 갖는 망 설계문제는 현실문제에 대한 보다 근접한 모형으로의 확장과 더불어 효과적인 해법개발에 대하여도 깊이있는 연구가 진행되어야 할 것이다.

## 참 고 문 헌

〔1〕 Aggarwal, V., Aneja, Y.P., and Nair, K.P.K, "Minimal spanning tree subject to a side constraint", *Computer & Operations Research*, Vol.9, 287~296, 1982.

〔2〕 Agarwal, S., Mittal, A.K., and Sharma, P., "Constrained optimum communication trees and sensitivity analysis", *SIAM J. Computer*, Vol.13, 315~328, 1984.

[3] Ahuja, R.K. and Murty, V.V.S., "Exact and heuristic algorithms for the optimum communication spanning tree problem", *Transportation Science*, Vo. 21, 163~170, 1987.

[4] Aneja, Y.P., "An integer linear programming approach to the Steiner problem in graphs", *Networks*, Vol. 10, 167~178, 1980.

[5] Aneja, Y.P., Aggarwal, V., and Nair, K.P.K, "Shortest chain subject to side constratins", *Networks*, Vol. 13, 295~302, 1983.

[6] Balakrishnan, A., "LP extreme points and cuts for the fixed-charge network design problem", *Mathematical Programming*, Vol. 39, 263~284, 1987.

[7] Balakrishnan, A., Magnanti, T.L. and Wong, R.T., "A dual-ascent procedure for large-scale uncapacitated network design", *Operations Research*, Vol. 37, 716~740, 1989.

[8] Balakrishnan, A. and Patel, N., "Problem reduction methods and a tree generation algorithm for the Steiner network problem", *Networks*, Vol. 17, 65~85, 1987.

[9] Beasley, J.E., "An algorithm for the Steiner problem in graphs", *Networks*, Vol. 14, 147~159, 1984

[10] Beasley, J.E., "An SST-based algorithm for the Steiner problem in graphs", *Networks*, Vol. 19, 1~16, 1989.

[11] Birge, J.R., and Malyshko, V., "Methods for a network design problem in solar power systems", Compter & Operatins Research, Vol. 10, 125~138, 1985.

[12] Chandrasekaran, R., "Minimal ratio spanning trees," *Networks*, Vol. 7, 335~342, 1977.

[13] Chandy, K.M., and Lo, T., "The capacitated minimum spanning tree," *Networks*, Vol. 3, 173~182, 1973.

[14] Chandy, K.M., and Russell, K.M., "The design of multipoint linkages in a teleprocessing tree networks", *IEEE Tr. on Comm.*, Vol. 21, 062~1066, 1972.

[15] Chopra, S., "On the spanning tree polyhedron", *O.R. Letters*, Vol. 8, 25~29, 1989.

[16] Current, J.R., "The design of a hierarchical transportation network with transhipment facilities", *Transpotation Science*, Vol. 22, 270~277, 1988.

[17] Current, J.R., ReVelle, C.S., and Cohon, J.L., "The hierarchical network design problem", *European J. of Operational Research*, Vol. 27, 57~66, 1986.

〔18〕 Dionne, R., and Florian, M., "Exact and approximate algorithms for optimal network design", *Networks*, Vol. 9, 37～59, 1979.

〔19〕 Duin, C. W., and Volgenant, A., "Some generalizations of the Steiner problem in graphs", *Networks*, Vol. 17, 353～364, 1987.

〔20〕 Elias, D., and Ferguson, M. J., "Topological design of multipoint teleprocessing networks", *IEEE Tr. on Comm*, Vol. 22, 1753～1762, 1974.

〔21〕 Erlenkotter, D., "A dual-based procedure for uncapacitated facility location", *Operations Research*, Vol. 26, 992～1009, 1978.

〔22〕 Frank, H., Frisch, I. T., Van Slyke, R., and Chou, W. S., "Optimal design of centralized computer networks", *Networks*, Vol. 1, 43～57, 1971.

〔23〕 Gabow, H. N. and Myers, E. W., "Finding all spanning trees of directed and undirected graphs", *SIAM J. Computer*, Vo. 7, 280～287, 1978.

〔24〕 Gabow, H. N., "A good algorithm for smallest spanning trees with a degree constraint", *Networks*, Vol. 8, 201～208, 1978.

〔25〕 Gavish, B., "Topological design of centralized computer networks – formulations and algorithms", *Networks*, Vol. 12, 355～377, 1982.

〔26〕 Gavish, B., "Formulations and algorithms for the capacitated minimal directed tree problem", *J. of ACM*, Vol. 30, 118～132, 1983.

〔27〕 Gavish, B., "Augmented Lagrangean based algorithms for centralized network design", *IEEE Tr. on Comm.*, Vol. 33, 1247～1257, 1985.

〔28〕 Goldstein, M. C., "Design of long-distance telecommunication networks-the Telepak problem", *IEEE Tr. on Circuit Theory*, Vol. 20, 186-192, 1973.

〔29〕 Held, M., and Karp, R. M., "The traveling salesman problem and minimum spanning trees, Part I", *Operations Research*, Vol. 18, 1138～1162, 1970.

〔30〕 Held, M., and Karp, R. M., "The traveling salesman problem and minimum spanning trees, Part II", *Mathematical Programming*, Vol. 1, 6～25, 1971.

〔31〕 Hoang, H. H., "Topological optimization of networks : A nonlinear mixed integer model employing generalized benders decomposition", *IEEE Tr. on Automatic Control*, Vol. 27, 164～169, 1982.

〔32〕 Hu, T. C., "Optimal communication spanning tree", *SIAM J. Computer*, Vol. 3, 189～195, 1974.

〔33〕 Kershenbaum, A., "Computing capacitated minimum spanning trees efficientiy", *Networks*, vol. 4, 299~310, 1974.

〔34〕 Kershenbaum, A. and Boorstyn, R. R., "Centralized teleprocessing network design". *Networks*, Vol. 13, 279~293, 1983.

〔35〕 Kershenbaum, A. and Chou, W., "A unified algorithm for designing multidrop teleprocessing networks", *IEEE Tr. on Comm.*, Vol. 22, 1762~1772, 1974.

〔36〕 Lawler, E. L., Combinatorial Optimization : Networks and Matroids, Holt, Reinhart & Winston, New York, 1976.

〔37〕 Maculan. N., "The Steiner problem in graphs", *Annals of Discrete Mathematics*, Vol. 31, 185~212, 1987.

〔38〕 Magnanti, T. L., anf Wong, R. T., "Network design and transportation planning : models and algorithms", *Transpotation Science*, Vol. 18, 1~55, 1984.

〔39〕 McGregor, P. V., and Shen, D., "Network design : an algorithm for the access facility location problem", *IEEE Tr. on Comm.*, Vol. 25, 61~72, 1977.

〔40〕 Migdalas, A., Mathematical programming techniques for analysis and design of communication and transportation networks, Department of Mathematics, Linkoping University, Linkoping, Sweden, 1988.

〔41〕 Mirzaian, A., "Lagrangean relaxation for the star-star concentrator location problem : approximation algorithm and bounds", *Networks*, Vol. 15, 1~20, 1985.

〔42〕 Narula, S. C., and Ho, C. A. "Degree-constrained minimum spanning tree", *Computer & Operations Research*, Vol. 7, 239~249, 1980.

〔43〕 Nemhauser, G. L., and Wolsey, L. A., Integer and Combinatorial Optimization, John Wiley & Sons, 1988.

〔44〕 Papadimitriou, C. H. and Yanakakis, M., "The complexity of restricted spanning tree problems", *J. of ACM*, Vol. 29, 285~309, 1982.

〔45〕 Papadimitriou, C. H., "The complexity of the capacitated tree problem", *Networks*, Vol. 8, 217~230, 1978.

〔46〕 Papadmitriou, C. H. and Steiglitz, K., Combinatorial Optimization : Algorithms and Complexity, Prentice-Hall, 1982.

〔47〕 Richey, M. B. and Parker, R. G., "On multiple Steiner subgraph problems", *Networks*, Vol. 16, 423~438, 1986.

〔48〕 Rothfarb, B., Frank, H., Rosenbaum, D. M., Steiglitz, K., and Kleitman, D. J., "Optimal design of offshore natural-gas pipeline systems", *Operations Research*, Vol. 18, 992~1020, 1970.

〔49〕 Rothfarb, B., and Goldstein, M., "The one terminal telpak problem", *Operations Research*, Vol. 19, 156~169, 1971.

〔50〕 Savelsberg, M., and Volgenant, A., "Edge exchange in the degree-constrained minimum spanning tree problem", *Computer & Operations Research*, Vol. 12, 341~348, 1985.

〔51〕 Segev, A., "The node-weighted Steiner tree problem", *Networks*, Vol. 17, 1~17, 1987.

〔52〕 Shogan, A. W., "Constructing a minimal-cost spanning tree subject to resource constraints and flow requirements", *Networks*, Vol. 13, 169~190, 1983.

〔53〕 Shore, M. L., Foulds, L. R., and Gibbons, P. B., "An algorithm for the Steiner problem in graphs", *Networks*, Vol. 12, 323~333, 1982.

〔54〕 Swamy, M. N. S. and Thulasiraman, K., Graphs, Networks, and Algorithms, John Wiley & Sons, 1981.

〔55〕 Tang, D. T., Woo, L. S., and Bahl, L. R., "Optimization of teleprocessing networks with concentrators and multiconnected terminals", *IEEE Tr. on Computers*, Vol. c-27, 59~604, 1978.

〔56〕 Volgenant, A., "A Lagrangean approach to the degree-constrained minimum spanning tree problem," *European J. of Operational Research*, Vol. 39, 325~331, 1989.

〔57〕 Winter, P., "Steiner problem in networks : a survey", *Networks*, Vol. 17, 129~167, 1987.

〔58〕 Wong, R. T., "A dual ascent approach for Steiner tree problems on a directed graph", *Mathematical Progamming*, Vol. 28, 271~287, 1984.