
 論 文

大韓造船學會誌
 第27卷 第4號 1990年 12月
 Journal of the Society of
 Naval Architects of Korea
 Vol.27, No.4, December 1990

적층보 이론을 이용한 1차원 열탄소성 해석

서 승 일*, 장 창 두**

One Dimensional Thermal Elasto-Plastic Analysis Using Layered Beam Theory

by

S.I. Seo* and C.D. Jang**

요 약

구조물을 용접할 시에는 열진도에 따른 온도 분포의 불균일에 의해 구조물에서 잔류 응력 및 변형이 발생하게 된다. 열진도에 따른 구조물의 거동을 기술하기 위해서는 열탄소성해석이 필요하게 되는 데, 본 연구에서는 1차원 적층보 이론을 이용해서 보의 변형 및 잔류 응력을 계산하였다. 기존의 1차원 열탄소성 해석에서는 용접 길이가 무한해야만 성립하는 평형 조건을 이용하고 있고, 경계 조건이 적절히 반영되지 못하는 제한성이 있었다. 그러나 증분 유한 요소법에 기초한 적층보 이론은 이런 제한성을 극복할 수 있다. 2차원 열탄소성 해석에서는 자유도의 증가에 따라 계산 시간이 방대해 지고, 변형 계산시에는 부정확성이 있는데 비하여 적층보 해석에서는 2차원 해석과 같이 보 깊이 방향의 재료 성질 변화도 고려할 수 있고, 2차원 해석에 비해 자유도가 대폭 감소되며, 변형 계산에서도 실험치와 잘 부합되고 있다.

Abstract

There exist residual stresses and deformations in welded structures because of nonuniform temperature distribution. The thermal elasto-plastic analysis is necessary to describe the behavior of the structure during welding. In this paper, we calculated the residual stresses and deformations of the welded beam using the 1-dimensional layered beam theory. In the previous 1-dimensional analyses, there were restrictions that the equilibrium conditions which were effective only on beams with infinite length were used, and the boundary conditions could not be considered adequately. But, the layered beam theory based on the incremental finite element method, can overcome these restrictions. On the other hand, in the 2-dimensional analysis, the computing time is large because of many degrees of freedom, and there was inaccuracy in the calculation of welding deformations. However, the layered beam theory can take into account the variation of properties along the depth, and can reduce the degrees of freedom considerably in comparison with the 2-dimensional analysis, and shows good agreement with the experiments.

발 표 : 1990년도 대한조선학회 춘계연구발표회('90.4.15)

접수일자 : 1990년 6월 15일, 재접수일자 : 1990년 8월 13일

* 정회원, 코리아타코마조선공업(주)

** 정회원, 서울대학교 조선공학과

1. 서 언

신체는 완전히 용접에 의해 조립되는 구조물이라 할 수 있는데, 용접 작업 중에는 국부적인 용융과 냉각이 수반되어 잔류 응력 및 변형이 발생하게 된다. 용접 현상을 정확히 파악하기 위해서는 먼저 과도적인 열전도(transient heat conduction) 과정의 이해와 구조물의 역학적 거동의 기술이 필요하게 되는데, 이런 과정의 파악에는 재료의 온도 의존성 및 탄소성 반복 과정 등 많은 이론적 복잡성이 극복되어야 한다.

과거의 많은 연구자들은 현상 자체의 완전한 해석적 기술이 곤란하므로, 실험을 병행하여 용접 결과 후의 거동을 파악하였다. 이런 노력의 일환이 고유 변형도법(inherent strain method)이라 할 수 있는데, 복잡한 탄소성 과정을 반복하는 영역의 변형도를 고유 변형도라 정의하고, 그의 영역은 탄성 영역으로 가정하여, 고유 변형도는 실험에 의해, 탄성 영역은 해석적 이론에 의해 기술하였다[1].

전자계산기의 등장으로 시뮬레이션이라는 과정이 가능해지자, 연구자들은 용접 중 열전도 과정 및 탄소성 과정을 전자계산기를 이용해서 추적하기 시작하였다. 최초의 시도는 Tall[2]에 의해 이루어졌고, 지속적인 발전은 Masubuchi에 의해 이루어졌다. Masubuchi는 Tall의 개념을 바탕으로 1차원 열탄소성 프로그램을 완성하였고, 유한 요소법을 이용한 2차원 열탄소성 해석 프로그램도 완성하여 이 분야에서 선도적인 역할을 수행하였다[3]. 藤田 등도 용접 과정을 열탄소성 해석으로 추적하여 그 거동을 기술하는 여러 논문을 발표하였다[4]. 이들의 연구에는 2차원 유한요소법 뿐 아니라 Rayleigh Ritz법 등 에너지 원리를 이용해서 열탄소성해석을 수행한 것이 포함되어 있다. 上田 등은 열탄소성 해석을 3차원까지 확대하여 2차원 해석과 비교하였다[5].

국내에서 이 분야에 대한 연구로는 관과 판의 결합부에 대한 1차원 열탄소성 해석[6]과 초기 강성법을 이용한 2차원 열탄소성 해석[7] 등이 있다.

현재의 1차원 열탄소성 해석은 Tall의 개념에 기초한 것으로 시간 단계마다 열전도 과정을 해석하고 이에 따라 평행 조건을 만족시키도록 전체 응력과 전체 변형도를 구하는 과정이라 할 수 있다. 이 방법은 엄밀히 말해 용접 길이가 무한히 긴 보(beam)에 대해서만 적용될 수 있는 것이고, 경계 조건은 반영되지 않는다. 2차원 열탄소성 해석은 길이의 제한성의 극복, 경계

조건의 구현, 증분 제어 기준 확립 등은 가능하지만 자유도의 증가에 따른 계산 시간의 방대함으로 문제가 따르게 된다. Masubuchi의 연구 결과에 의하면 용접 변형 해석 시에는 1차원 해석의 결과가 2차원 해석 결과보다 실험치에 더 부합되고 있다[8].

본 논문에서는 Masubuchi 등의 1차원 열탄소성 해석과는 달리 증분 이론에 기초한 유한요소법을 열탄소성 해석에 적용하였다. 1차원 보이론에 기초한 유한요소법이므로 용접 길이의 유한성 및 경계 조건의 구현이 반영될 수 있고, 적층 보이론이므로 2차원 해석과 같이 시간 증분의 제어 기준 확립이 가능하고 각층마다의 결과가 계산될 수 있으며, 2차원 해석에 비해 계산 시간이 단축되고 정확도가 양호하게 된다.

2. 정 식 화

Masubuchi의 1차원 열탄소성 해석은 유한요소법과는 달리 각 단면에서 평형 조건을 만족시키도록 응력과 변형도를 계산하는 과정이라 할 수 있다. 소성 과정 및 온도 변화에 따른 재료의 비선형성은 소성 변형도의 가정과 반복 계산을 통해서 고려하고 있다. 이 방법은 소성 해석 이론 가운데 전 변형도 이론(total strain theory)이라 할 수 있으며, 소성 변형도를 처음에 가정하여 반복 계산하였으므로 초기 변형도의 일종이라 할 수 있다. 그런데 전 변형도 이론에서는, 시간 증분에 따라 거동을 추적해야 하는 열탄소성 해석에 있어서 증분의 적절한 제어가 문제 시된다.

각 단면에서의 평형 조건만을 만족시키도록 응력과 변형도를 구하고 변형도를 적분하여 상대적인 변위량에 따라 변형량을 구하는 방법은 기본적으로 대상 모델의 길이가 무한히 길다는 가정을 내포하고 있는 것이다. 그러나 실제의 용접 구조물을 고려할 때에는 모델의 길이가 유한하고 양단에서 다양한 경계 조건을 구현할 수 있는 이론이 필요하게 된다. 증분 이론에 기초한 유한요소법을 도입하면 경계 조건의 구현이 가능하고, 증분의 적절한 제어가 가능하게 된다.

열탄소성 문제의 정식화에서는 초기 응력 또는 초기 변형도를 가정하여 가상 일의 원리를 이용하고 있다. 정식화의 해법 과정에서는 재료의 비선형성을 고려하기 위해 초기 강성법(initial stiffness method) 또는 접선 강성법(tangential stiffness method)이 이용된다[7].

외력이 없이 물체 내에 초기 응력이 존재할 때 진포탄산 에너지는 다음과 같다.

$$\pi = \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dv \quad (1)$$

(1)식의 증분형에 가상일의 원리를 적용해 보면

$$\delta(\Delta\pi) = \int_V (\sigma_{ij}\delta(\Delta\varepsilon_{ij}) + \Delta\sigma_{ij}\delta(\Delta\varepsilon_{ij})) dv = 0 \quad (2)$$

이 된다.

초기 응력이 존재할 때의 응력 증분과 변형도 증분의 관계를 행렬 형태로 표시하면

$$\{\Delta\sigma\} = [D]\{\Delta\varepsilon\} + [\Delta\sigma_0] \quad (3)$$

여기서, $[D]$: 응력 증분과 변형도 증분의 관계를 나타내는 행렬

$\{\Delta\sigma_0\}$: 초기 응력 행렬

이하에서 Δ 는 증분을 나타낸다.

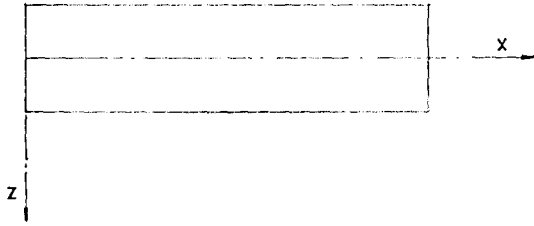


Fig. 1 Coordinate

$$\Delta\varepsilon = [B]\{\Delta u\} \quad (7)$$

$$= \begin{bmatrix} -1/L & 6xz/L^2 - 12xz/L^3 & 4z/L - 6xz/L^2 & 1/L & -6z/L^2 + 12xz/L^3 & 2z/L - 6xz/L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta u_1 \\ \Delta w_1 \\ \Delta \theta_1 \\ \Delta u_2 \\ \Delta w_2 \\ \Delta \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (8)$$

$$[K] = \int_V [B]^T [D] [B] dv$$

$$= g \int_{-b/2}^{b/2} \begin{bmatrix} E_T/L & 0 & -E_T z/L & -E_T/L & 0 & E_T z/L \\ & 12E_T z^2/L^3 & 6E_T z^2/L^2 & 0 & -12E_T z^2/L^3 & 6E_T z^2/L^2 \\ & & 4E_T z^2/L & E_T z/L & -6E_T z^2/L^2 & 2E_T z^2/L \\ & & & E_T/L & 0 & -E_T z/L \\ & & & & 12E_T z^2/L^3 & -6E_T z^2/L^2 \\ & & & & & 4E_T z^2/L \end{bmatrix} dz \quad (9a)$$

$$\{\Delta F\} = g \int_{-b/2}^{b/2} (\sigma + \Delta\sigma_0) \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -z \\ 0 \\ -1 \\ z \end{Bmatrix} dz \quad (9b)$$

여기서, b : 보 전체의 깊이

g : 보의 두께

Δu : 보 요소의 x 방향 변위 증분

$\Delta \theta$: 보 요소의 $x-z$ 평면 내의 회전각 증분

변형도 증분과 변위 증분의 관계는

$$\{\Delta\varepsilon\} = [B]\{\Delta u\} \quad (4)$$

여기서, $[B]$: 응력 증분과 변위 증분의 관계를 나타내는 행렬

이 된다.

(3), (4)식을 (2)식에 대입하여 정리하면

$$\int_V [B]^T [D] [B] \{\Delta u\} dv = - \int_V (\{\Delta\sigma_0\} + \{\sigma\}) dv \quad (5)$$

이 된다. (5)식의 우변은 등가의 힘 행렬로 간주할 수 있고, 좌변은 강성 행렬과 변위 행렬의 곱으로 볼 수 있다.

1차원 문제에 대해 (4)식을 적용해 보면, 미소 변형을 가정했을 때, Fig. 1을 참조로 다음과 같이 된다.

$$\Delta\varepsilon = \frac{d\Delta u_0}{dx} - z \frac{d^2\Delta w}{dx^2} \quad (6)$$

여기서, Δw : z 방향의 변위 증분

Δu_0 : x 방향의 중립축의 변위 증분

1차원 보요소에 대해서 변형도 증분 행렬, 강성 행렬 및 등가의 힘 증분 행렬을 구하면 각각 다음과 같이 된다.

Δw : 보요소의 z 방향 변위 증분

첨자 $1, 2$ 는 각각 보요소의 서점과 종점을 표시한다.

E_T : 점선 강성 계수

L : 보요소의 길이

점선 강성 계수와 초기 응력을 구하기 위해 먼저 탄성영역에서 응력 증분과 변형도 증분의 선형 관계를 이용한다.

$$\Delta\sigma = E(\Delta\varepsilon - \Delta\varepsilon_0) + \Delta E(\varepsilon - \varepsilon_0) \quad (10)$$

여기서, E : Young's modulus

$\Delta\epsilon_\theta = \Delta\alpha \cdot T + \alpha \cdot \Delta T$: 열변형도 증분

α : 선팅창 계수

T : 온도 상승

소성역에서의 응력 증분과 변형도 증분의 관계는 Prandtl-Reuss의 식으로 부터 유도한다. 항복 조건식은

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\sigma^2} = Y \tag{11}$$

여기서, $\bar{\sigma}$: 상당 응력 (equivalent stress)

Y : 항복 응력

이 되고 증분형으로 고치면

$$\sigma \Delta\sigma = Y \Delta Y \tag{12}$$

이 된다.

항복 응력 증분은 변형 경화 (strain hardening)을 고려하여

$$\Delta Y = H \Delta \bar{\epsilon}_p + \frac{\partial Y}{\partial T} \Delta T \tag{13}$$

여기서, $\Delta \bar{\epsilon}_p$: 상당 소성 변형도 증분 (equivalent plastic strain increment)

$$H = \frac{\partial Y}{\partial \bar{\epsilon}_p} : \text{변형 경화 계수}$$

과 같이 된다.

Prandtl-Reuss의 관계식으로 부터

$$\Delta \epsilon_p = \frac{2}{3} \sigma \Delta \lambda \tag{14}$$

가 된다.

(13), (14)식을 (12)식에 대입하여 $\Delta \lambda$ 을 구하면

$$\Delta \lambda = \frac{3}{2} \left(\frac{\sigma \Delta \sigma}{Y} - \frac{\partial Y}{\partial T} \Delta T \right) \cdot \frac{1}{H \bar{\sigma}} \tag{15}$$

이 되고,

$\Delta \lambda > 0$ 일 때는 소성 지속 상태 (loading)

$\Delta \lambda < 0$ 일 때는 제하 상태 (unloading)

$\Delta \lambda = 0$ 일 때는 중립

으로 판정된다.

(15)식을 (14)식에 대입하여 $\Delta \epsilon_p$ 를 구하면 다음과 같이 된다.

$$\Delta \epsilon_p = \frac{1}{H} \left(\Delta \sigma - \frac{\partial Y}{\partial T} \Delta T \frac{\sigma}{\bar{\sigma}} \right) \tag{16}$$

소성역에서의 응력 증분과 변형도 증분의 선형 관계는

$$\Delta \sigma = E(\Delta \epsilon - \Delta \epsilon_\theta - \Delta \epsilon_p) + \Delta E(\epsilon - \epsilon_\theta - \epsilon_p) \tag{17}$$

와 같으므로 (16)식을 (17)식에 대입하여 정리하면

$$\begin{aligned} \Delta \sigma = & \frac{H}{H+E} E \left(\Delta \epsilon - \Delta \epsilon_\theta + \frac{\partial Y}{\partial T} \Delta T \frac{\sigma}{\bar{\sigma} H} \right) \\ & + \frac{H}{H+E} \Delta E(\epsilon - \epsilon_\theta - \epsilon_p) \end{aligned} \tag{18}$$

이 된다.

탄성역과 소성역을 포함하여 응력 증분과 변형도 증분의 관계는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\Delta \sigma = E_T \Delta \epsilon + \Delta \sigma_0 \tag{19}$$

여기서, $E_T = E$ (탄성일 때)

$= HE/(H+E)$ (소성일 때)

: 접선 강성 계수

$$\Delta \sigma_0 = -E \Delta \epsilon_\theta + \Delta E(\epsilon - \epsilon_\theta) \text{ (탄성일 때)}$$

$$= -\frac{H}{H+E} E \left(-\Delta \epsilon_\theta + \frac{\partial Y}{\partial T} \Delta T \frac{\sigma}{\bar{\sigma} H} \right)$$

$$+ \frac{H}{H+E} \Delta E(\epsilon - \epsilon_\theta - \epsilon_p) \text{ (소성일 때)}$$

: 초기 응력

3. 열전도 해석

용접 중 열전도 해석은 Rosenthal에 의해 최초로 이루어졌는데, 선형 열전도 방정식으로 부터 얻어진 것으로 그 실효성이 널리 입증되었다. 그러나 Rosenthal의 해는 이동 열원의 준정상 상태 (quasi-stationary state)에 대한 것으로 재료의 온도 의존성을 무시한 것이다[3]. 평판의 가장자리를 용접한 경우 판에서의 온도 분포는 다음 식과 같다[8].

$$T - T_0 = \frac{Q}{\pi k g} e^{-\lambda v \xi} \left[\sum_{n=1}^2 K_0(\beta R_n) \right] \tag{20}$$

여기서, T : 온도

T_0 : 초기 온도

$Q = \eta VI$: effective thermal power of welding arc

n : 아크 효율

I : 용접 전류

V : 아크 전압

g : 판 두께

b : 판 폭

$\xi = x - vt$: 이동 좌표

$1/(2\lambda)$: 열확산율 (thermal diffusivity)

k : 열전도율 (heat conductivity)

$$\beta = \sqrt{(\lambda v)^2 + H/g}$$

$H = h/k$: dissipation ratio

h : heat dissipation

$$R_n = \sqrt{\xi^2 + (x - 2nb - b/2)^2}$$

K_0 : 제 2종 Bessel 함수

Σ 는 영상법 (image method)을 이용하여 경계 조건을 만족시키기 위한 급수를 나타낸다.

4. 적층보(layered beam)이론에 의한 해석

적층보 이론은 기본적으로 1차원 해석이므로 보의 길이 방향의 재료 성질 및 역학적 거동을 기술할 수 있을 뿐만 아니라, 보의 길이 방향으로 층을 나누고 있으므로, 각 층에서의 재료 성질 및 역학적 거동도 기술할 수 있게 된다. 2절에서 구해진 강성 행렬과 등가의 힘 증분 행렬 중에 나타나는 재료 특성치가 요소 내에서 균일하다고 하면 강성 행렬 및 힘행렬은 통상의 보 요소에 대한 결과와 일치한다. 그러나 적층보 요소에서는 각 층의 결과가 적분되어 강성 행렬 및 힘행렬을 구성하기 때문에 요소 내에서 길이 방향으로의 특성 변화도 고려가 된다. 통상의 1차원 보요소 이론에서는 길이 방향의 요소 분할만 있고 요소 내에서의 분할은 없게 되므로 요소 내에서의 재료 특성 및 응력의 변화 양상의 기술이 곤란하지만 적층보 요소에서는 요소 내에서도 층을 만들어 수치 적분에 의해 단면 특성치를 얻기 때문에 열탄소성 해석 문제에도 유용하게 된다. (19)식은 각 층마다 수행되고 적분에 의해 조합되어 요소의 특성치를 이루게 된다.

층에서의 온도 변화는 그 층의 평균값으로 대표시키는 것이 중앙점의 온도 변화로 대표시키는 것보다 양호한 결과를 산출한다.

시간 증분의 제어는 山田의 방법을 이용한다[9]. 탄성 상태에서 시간 증분 후에 소성 상태로 변화하는 여러 층 중에서 다음의 r 값을 구하고 그 중 최소의 r_{min} 을 구하여 모든 증분을 선형적으로 r_{min} 만큼 조절한다.

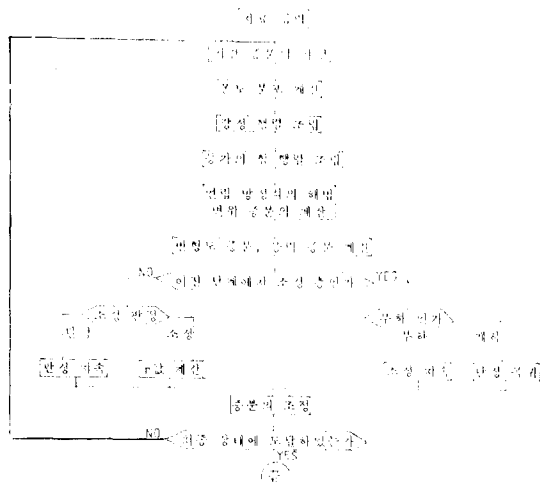


Fig. 2 Flow chart for numerical calculation

$$\sigma + r\Delta\sigma = Y + r\Delta Y \tag{21}$$

$$r = \frac{Y - \sigma}{\Delta\sigma - \Delta Y} \tag{22}$$

적층보 이론은 평형 방정식의 자유도가, 1차원 해석이므로 적은 반면에, 2차원 해석과 같이, 보의 길이 방향의 거동도 기술할 수 있으므로, 장점이 있는 것이다. 계산의 흐름은 Fig. 2와 같다.

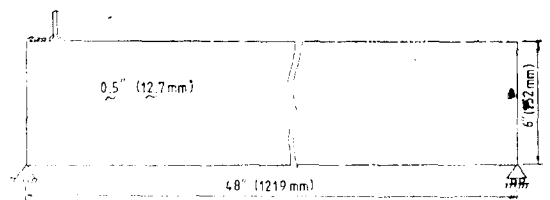
소성 지속 층 중에는 증분들의 관계를 선형화했기 때문에 고차항의 영향으로 항복응력을 초과하는 경우가 생긴다. 이 때에는 각 단계마다 소성 층의 응력을 항복 응력으로 되돌리는 단계가 필요하게 된다.

5. 계산 결과

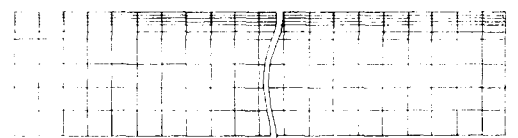
적층보 이론을 이용하여 계산한 결과를 Masubuchi의 실험 결과[8]와 비교해 본다. 대상 모델 및 응집 조건은 Fig. 3 및 Table 1과 같고 대상 모델의 재질인 Al 5052-H32의 온도 변화에 따른 재료 성질은 Fig. 4와 같다.

Table 1 Welding conditions[8]

용접 전류	260A
아크 전압	23V
아크 진행 속도	0.289in/sec (0.734cm/sec)
아크 효율	0.643
용접봉	4043 1/16"(1.6mm)φ
와이어 공급 속도	400in/min(1016cm/min)
Shielding gas	Argon
Specific heat	237J/lb°F (940J/kg°F)
Conductivity	2.4watt/in°F(1.7watt/cm°C)
Density	0.11lb/in³(2.77g/cm³)



(a) Specimen for measurement and calculation



(b) Layered beam model 40 elements, 10 layers

Fig. 3 Specimen and calculation model

Fig. 5는 중앙에서의 변형을 시간에 따라 기술한 것이다. 용접이 끝날 때까지는 열의 공급이 계속되므로 용접 부위의 팽창에 의해 위로 볼록(convex)한 변형이 발생하나 용접 종료 후에는 열의 공급이 없어지고 용접부 근처가 냉각함에 따라 수축이 발생하여 아래로 볼록(concave)한 변형이 발생한다. Fig. 5의 점선은 Masubuchi의 계산 결과인데, 2차원 유한 요소법은 냉각 과정을 적절히 기술하지 못하여 변형 계산에서 상당한 오차를 산출한다. 재료 특성이 일정하다고 가정 한, Masubuchi의 1차원 이론은 온도 상승 과정 중의 변형 계산에는 정확한 결과를 주지만 냉각 과정의 변형 계산에서는 어느 정도의 오차를 보이고 있다. 재료

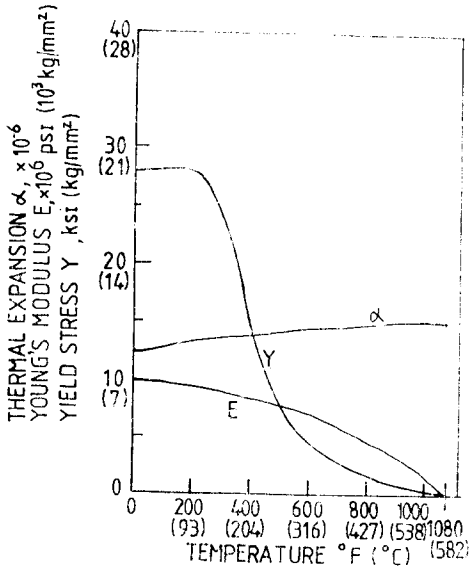


Fig. 4 Material properties vs temperature of 5052H32 aluminum alloy [8]

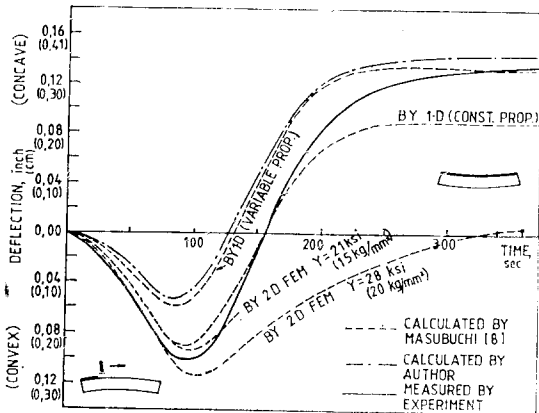


Fig. 5 Changes of deflection at midlength during welding

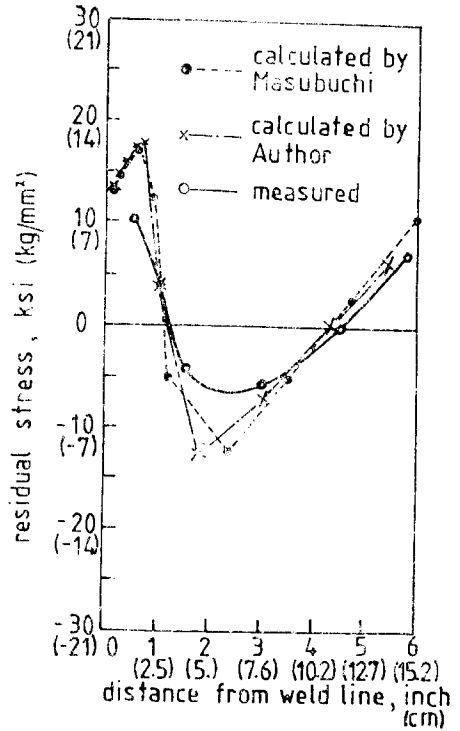


Fig. 6 Residual stresses along midlength section

특성의 변화를 고려한 Masubuchi의 1차원 이론과 적층보 이론은 온도 상승 과정에서 약간의 오차를 보이지만 거동의 일관성을 보이고 있고, 냉각 과정에서는 실험치와 양호한 일치율을 보이고 있다. 최종적으로 나타나는 잔류 변형이 구조물의 강도 등에 영향을 미치는 초기 결함이 되므로 이런 관점에서라면 본 해석의 결과는 실험치와 양호한 일치율을 보인다고 말할 수 있다.

Fig. 6에는 보의 중앙에서 잔류 응력 분포를 나타내고 있다. 본 해석 결과와 Masubuchi의 결과는 양호한 일치율을 보이나 실험치와는 용접부 근처에서 약간의 오차를 보이고 있다. 이는 응용 및 응고에 따른 재료 특성 변화가 역학적 모델에서 충분히 반영되지 못하기 때문이라 생각된다.

6. 결 언

적층보 이론에 의한 열탄소성 해석은 계산 결과와 실험치의 비교를 통해 용접변형 및 잔류 응력의 계산에 유용한 방법임이 입증되었다. 적층보 이론은 기존의 1차원 열탄소성 해석의 제한성을 극복할 수 있고

2차원 해석에 비해 계산 시간의 감소 및 정확도 향상을 도모할 수 있는 이론이라 할 수 있다.

열탄소성 해석으로 실험에 의존하지 않고 용접 중의 구조물의 거동을 파악함으로써 용접 변형 및 잔류 응력에 대한 대책 수립이 용이해 지게 된다. 또한 용접 조건의 변경이 변형 및 잔류 응력의 분포에 미치는 영향을 사전에 파악함으로써 적절한 용접 조건의 제어도 가능하리라 사료된다.

참 고 문 헌

[1] 渡邊邦紀, 佐藤邦彦, 溶接力學とその應用, 朝倉書店, pp.367-410, 1965.
 [2] L. Tall, "Residual Stresses in Welded Plates", *Welding Journal*, Vol. 43, No.1 pp.10s-23s, 1964.
 [3] K. Masubuchi, Analysis of Welded Structures, Pergamon Press, pp.148-188, 1980.
 [4] 藤田讓, 野本敏治, 長谷川壽男, "熱彈塑性問題に

關する 研究(その 4)", 日本造船學會論文集, Vol. 146, pp.383-392, 1979.
 [5] 上田幸雄, 金裕哲, 山北晃久, 房漢瑞, "3次元熱彈塑性問題の平面變形問題への置換の可能性の検討", 溶接學會論文集 第6卷, 第1號, pp.53-59, 1988.
 [6] 나석주, 김형완, "평판·관 구조물 용접 시 발생하는 응력 및 변형율에 관한 연구", 대한용접학회지, 제4권, 제2호, pp.30-39, 1986.
 [7] 장광두, 시승연, "열탄소성 해석에 의한 잔류 응력의 계산", 대한용접학회지, 제6권, 제4호, pp.35-43, 1988.
 [8] K. Masubuchi, et al, "Analysis of Thermal Stresses and Metal Movements of Weldments: A Basic Study Toward Computer-Aided Analysis and Control of Welded Structures", *Trans. SNAME*, Vol. 83, pp.143-167, 1975.
 [9] 山田嘉昭, 塑性・粘彈性, 培風館 pp.59-84, 1972.