
 論 文

大韓造船學會誌
 第27卷 第2號 1990年 6月
 Journal of the Society of
 Naval Architects of Korea
 Vol. 27, No. 2, June 1990

선미후류-프로펠러 상호작용을 고려한 유효반류 추정법

이 창 섭*, 이 진 태**

Prediction of Effective Wake Considering Propeller-Shear-Flow Interaction

by

Chang-Sup Lee* and Jin-Tae Lee**

요 약

선미후류에 포함된 보오텍스 시스템과 프로펠러와의 상호작용을 이론적으로 해석하여 유효반류를 계산하는 방법을 제안하였다. 선미주위의 복잡한 유동을 Poincare의 방정식을 사용하여 수학적으로 표시하였고 임의의 점에서의 교란속도를 물체 표면에 분포되어 있는 쓰오스 및 보오텍스에 의한 유기속도의 표면적분과 유체중 위치하는 쓰오스 및 보오텍스에 의한 유기속도의 체적적분의 합으로 표시하였다.

이 식으로부터 유효속도(effective velocity)를 유체중 보오텍스에 의한 유기속도의 체적적분으로 정의하였다. 유체중의 보오텍스의 위치와 세기는 불균일한 호칭속도(nominal velocity) 분포에 포함 되어 있는 보오텍스로부터 프로펠러가 작동할때의 유선변화를 고려하여 보오텍스 운동역학(vortex dynamics)을 만족하도록 결정된다.

이론을 검증하기 위한 계산예로써 축대칭 전단류(shear flow)중 원판형 추진장치가 작동할때 프로펠러에 의한 유선변화 모형을 변화시켜 유효속도를 계산하였고 양력판 이론에 의한 값과 비교하였다.

Abstract

Interactions between a propeller and vortex system contained in a ship stern flow is treated theoretically. A new formulation to determine the effective velocity distributions is developed, which may be immediately applicable to the design and analysis of compound propulsors under the influence of severe vortical cross-flows around ship stern.

An axisymmetric shear flow is represented by a system of ring vortices and the axial variation of the stream lines due to the action of propeller is represented by a cubic function. The strengths of ring vortices, which are varying along the stream lines, are determined by the conservation of angular momentum.

Two simplified effective velocity models are proposed to confirm the theory. Sample calculations using the simplified models are made to compare with the results by other investigators.

발표: 대한조선학회 '88년도 추계연구발표회('88.11.12)

접수일자: 1989년 5월 8일, 재접수일자: 1990년 3월 16일

* 정회원, 충남대학교 공과대학

** 정회원, 해사기술연구소

1. 서 언

프로펠러는 불균일한 선미반류중에 위치하여 작동하고 있으므로, 정확한 설계 및 성능추정을 위하여는 프로펠러가 위치한 주위환경(즉, 선미유동)에 대한 정보와 이 환경과 프로펠러사이의 상호작용에 대한 이해가 필요하다.

선미유동은 선체주위의 점성유동이 박리됨으로써 극심한 비정상성, 불균일성 및 난류성 현상을 보이며, 따라서 지금까지의 얇은 경계층이론에서 벗어나 3차원 난류 유동을 다룰수 있도록 완전한 Navier-Stokes방정식을 직접 해결하여야만 선미후류 유동을 기술할 수 있다. 그러나, 현재로서는 정통적인 이론적 접근방식이 용이하지 않으므로 예인수조에서의 실험으로써 모형선 선미 프로펠러 평면에서의 반류분포에 대한 정보를 얻어내고 있으며, 반 이론/반 경험적인 방식에 의해 실선에서의 반류를 추정하고 있는 형편이다.

선미유동과 프로펠러사이의 상호작용도 원칙적으로 시간영역에서 해석되어야 한다. 그러나 선미유동에 대한 지식이 제한되어 있으므로 시간영역에서의 평균값만을 해석의 입력자료로 사용할 수 밖에 없으며, 반류는 위치단의 함수로 나타내게 된다. 이렇게 표현된 불균일 선미반류는 선체의 존재 및 선미과도의 영향에 의한 속도의 불균일성도 포함되지만 가장 중요한 성분인 vorticity와 프로펠러의 상호작용의 엄밀한 해석을 통하여야만 프로펠러의 작동장소에서의 유효반류를 알 수 있게 된다.

선미에서 작동하는 프로펠러의 경계치 문제를 해석하기 위하여 지금까지 채택되어 왔던 이상유체의 가정은 엄밀한 의미에서 선미 유동중에 vorticity가 없을때만 정확한 해를 주며, vorticity의 정도가 높아질수록 오차가 커지게 된다. 따라서 지금까지 이상유체의 가정하에서 Green의 정리에서 출발한 적분방정식을 다뤘지만, 본 연구에서는 좀더 일반적인(vorticity 즉 shear가 포함된) 유동에 알맞은 Poincare 적분방정식[1]을 프로펠러 문제에 적용할 수 있음을 보이기도 한다. 그리고 Poincare 적분방정식을 해석하는 것은 동시에 유효속도장에 대한 해석도 포함됨을 보이고자 한다.

Shear와 프로펠러의 상호작용에 의해 Shear가 변형되는 점이 프로펠러 해석결과에 중요한 영향을 주는 것이 Goodman[2]에 의해 제기된 이후, Huang[3] 및 Dyne[4]에 의해 축대칭 유동 및 단순모형에 대한 계

산방법이 제기되어 왔으며, Breslin 등[5]에 의해 프로펠러 기진력의 해석과정에 확장되어 활발히 연구되어 왔다. 최근에는 이창섭/송인행[6]에 의해 유효반류의 새로운 엄밀한 정의에 대해 논의가 된 바 있으나 실제 계산은 아직 수행되지 못한 바 있고, ITTC[7]에서도 프로펠러에 의한 유기속도의 새로운 정의 및 해석을 위하여 shear와 프로펠러의 상호작용의 해석을 촉구한 바 있다.

2. 문제의 정식화

2.1. 이상유체 가정의 한계

지금까지 특이점 분포방식을 사용할 때에는 항상 유체의 상태가 이상적이라고 가정하였다. 즉, 비압축성, 비점성 및 비회전성의 가정에 의해 수학적으로 속도 포텐셜을 도입하여 물체주위의 유동을 해석한 것이다. 이중 비압축성 가정은 물의 압축성이 충분히 적어 유체내의 압력파의 전달속도를 무한대로 가정해도 큰 오차가 없을 만큼 문제가 없는 것이다.

그러나 프로펠러가 작동하는 선미 유장은 점성의 영향과 회전성이 존재하는 복잡한 곳으로 한눈에 이상유체 가정에 무리가 있을 것이라는 것을 짐작할 수 있다. 즉, 지금까지 많이 사용되어온 특이점(쏘오스 혹은 다이폴) 분포법의 기본방정식은 비회전성, 비점성의 가정하에 다음과 같은 Green의 정리에서 출발하는 바,

$$\begin{aligned} & \iint_A \left(\phi_1 \frac{\partial \phi_2}{\partial n} - \phi_2 \frac{\partial \phi_1}{\partial n} \right) dA \\ &= \iiint_V [V \cdot (\phi_1 \nabla \phi_2) - V \cdot (\phi_2 \nabla \phi_1)] dV \\ &= \iiint_V (\phi_1 \nabla^2 \phi_2 - \phi_2 \nabla^2 \phi_1) dV \end{aligned} \quad (1)$$

윗식에 유체의 내부에 쏘오스가 없다는 사실을 적용하면 유체영역중에서 $\nabla^2 \phi_1 = \nabla^2 \phi_2 = 0$ 이므로, 윗 식(1)의 좌변이 영이되면 이로부터 이상유체중에서 적용할 수 있는 적분방정식을 얻게된다.

선미 유동장에서 작동하는 프로펠러 유체역학 문제의 해결도 기본적으로 위의 식에서 출발된 지배방정식을 해석함으로써 얻어지고 있다. 프로펠러 경계치 문제의 해석에서 선미유동장은 프로펠러에의 유입유동(Oncoming flow)의 값으로 표현되고 선미유동장의 변형은 고려되지 않고 있다. 즉 불균일 반류의 영향은 단지 위치에 따른 속도 vector의 변화로만 Green의 방정식에서 유도된 지배적분 방정식에서 forcing term으로만 역할을 다한다는 의미이다. 이것은 프로펠러 날개 표면이 위치한 곳에서만의 유입속도 정보가 그 순

간에서의 프로펠러 경계치문제 해석에 영향을 주며, 프로펠러 유입유동은 프로펠러가 지나간 후에는 원래의 모습으로 돌아온다는 것을 뜻한다.

이와 같이 프로펠러의 영향이 있기 전후의 유동모습이 동일한 것에 착안하여 불균일 반류의 영향을 단순한 forcing term으로만 제한하면, 유동장내에서 $\nabla^2\phi=0$ 의 가정이 성립할 수 있으므로 지금까지 불균일 반류 중에서의 프로펠러 경계치 문제 해석도 이상유체 가정으로 해석되어 온 것이다.

그러나 불균일 반류를 균일유동과 불균일성을 생성하는 보오텍스의 분포로써 대치하여 생각할 수 있으며, 보오텍스가 프로펠러와 상호작용할 때 보오텍스의 세기 및 위치가 변화한다는 사실을 인식한다면, 지금까지의 프로펠러 경계치문제에의 접근방식을 재검토할 필요가 있다고 느끼게 된다.

2.2. 지배방정식의 도출

앞에서 살펴본바와 같이 Green의 정리에 의한 적분방정식의 유도는 비점성 및 비회전성 가정을 필수로 하며, 유체중에 보오텍스나 소오스 같은 특이점이 존재할 때에의 적용이 불가하므로 새로운 형태의 적분방정식을 도출할 필요가 있다.

이상유체 유동의 해석에 쓰인 Green의 정리를 대치하여 보오텍스가 섞인 유동에 적용할 수 있는 vector 일치관계식으로 다음과 같은 Durand의 공식[8]이 있다. 즉,

$$\begin{aligned} & \iint_{(A)} [\vec{A}(\vec{B} \cdot \vec{n}') + \vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{n}')] dA \\ &= \iiint_{(v)} [\vec{A}(\nabla \cdot \vec{B}) + \vec{B}(\nabla \cdot \vec{A}) - \vec{A} \times (\nabla \times \vec{B}) \\ & \quad - \vec{B} \times (\nabla \times \vec{A})] dv \end{aligned} \quad (2)$$

여기에서, \vec{n}' 은 물체표면(A) 위에서 존재하며, 유체영역(v)밖으로 즉, 물체속으로 향할 때 양으로 정의된다.

윗 식(2)에 $\vec{A}=\nabla\left(\frac{1}{r}\right)$, $\vec{B}=\vec{u}$ 를 대입하여 정리하면(부록 A에서 자세히 그 유도과정을 보임), 유체영역(v)에 내재하는 경계표면(A)에 의해 둘러싸인 물체주위의 field point $P(x, y, z)$ 에서의 속도장 $\vec{u}(P)$ 를 다음과 같은 적분방정식의 형태로 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} & \left. \begin{aligned} P \in v, & \quad \vec{u}(P) \\ P \in A, & \quad \frac{1}{2}\vec{u}(P) \\ P \in v \cup A, & \quad 0 \end{aligned} \right\} \\ &= \iiint_{(v)} (\nabla \cdot \vec{u})_q \nabla_P \left(\frac{-1}{4\pi r} \right) dv(Q) \\ &+ \iint_{(A)} (\nabla \times \vec{u})_q \times \nabla_P \left(\frac{-1}{4\pi r} \right) dv(Q) \\ &+ \iint_{(A)} (\vec{n} \cdot \vec{u})_q \nabla_P \left(\frac{-1}{4\pi r} \right) dA(Q) \end{aligned}$$

$$+ \iint_{(A)} (\vec{n} \times \vec{u})_q \times \nabla_P \left(\frac{-1}{4\pi r} \right) dA(Q) \quad (3)$$

여기에서 \vec{n} 은 물체표면에서의 법선 vector로 물체표면에서 유체중으로 향할 때를 양으로 정한다(즉, $\vec{n}=-\vec{n}'$). 본식에서 r 은 점 $P(x, y, z)$ 와 점 $Q(\xi, \eta, \zeta)$ 사이의 거리이며, 첨자 P, Q 는 각각 해당 변수 또는 해당 연산자가 field point $P(x, y, z)$ 와 특이점 좌표 $Q(\xi, \eta, \zeta)$ 의 함수임을 표시한다.

윗 식(3)을 잘 살펴보면 이중적분의 첫째항은 물체표면에 분포된 소오스에 의해, 둘째항은 물체표면에 분포된 보오텍스에 의해 유기되는 속도를 나타내고 있음을 알 수 있으며, 이 두항은 Green의 정리에 의해서도 유도가 가능한 항들이다. 식(3)의 특징은 삼중적분 항이 두항 추가된 것으로, 제1 및 제2항은 각각 유체 체적(v)속에 분포되어 있는 소오스와 보오텍스에 의해 유기되는 속도를 나타낸다.

2.3. 지배방정식의 해석

전절에서 유도한 Poincare 방정식(3)을 실제 유동해석에 적용하기 위하여 각 항의 성질 및 표기방법을 개선할 필요가 있다.

우선 (3)식의 제1항은 유체 내부에 소오스가 존재할 경우에만 활용가능한 항이다. 보통의 경우 이항은 선체를 표시하기 위하여 필요하지만, 본 연구에서는 프로펠러 주위 유동만을 집중적으로 다룰 예정이므로 생략하기로 한다. 그러나 소오스로 표시되는 캐비티의 경우에는 캐비티 체적이 시간의 함수로 변화할 때 순전한 소오스 유동이 존재할 수 있으므로 이항을 살려야 한다.

제2항의 경우 체적적분의 범위가 유체 전 영역을 포함함을 알 수 있는바, 이로써 Green 정리 사용에 의한 경계치문제 해석 즉, 유체 경계에서의 정보를 알던 물체에 작용하는 유체역학적 압력 또는 힘을 구할 수 있다는 큰 잇점이 상실됨을 알 수 있다.

유체 체적(v) 내부에 존재하는 소오스와 보오텍스의 세기는 다음과 같이 다시 표현될 수 있다. 즉,

$$\left. \begin{aligned} \Delta q &= (\nabla \cdot \vec{u})_q \\ \vec{\omega}_q &= (\nabla \times \vec{u})_q \end{aligned} \right\} \text{in } (v) \quad (4)$$

또한 물체 표면(A)에 분포된 소오스와 보오텍스의 세기는 마찬가지로 다음과 같이 표현될 수 있다. 즉,

$$\left. \begin{aligned} \sigma_q &= (\vec{n} \cdot \vec{u})_q \\ \vec{\gamma}_q &= (\vec{n} \times \vec{u})_q \end{aligned} \right\} \text{in } (A) \quad (5)$$

유체 내부에 소오스가 존재하지 않는 경우, 즉 $\nabla \cdot \vec{u} = \Delta = 0$ (solenoidal)인 경우, Poincare 방정식은 다음과 같이 정리될 수 있다. 즉,

$$\left. \begin{aligned} P \in \nu, & \quad \bar{u}(P) \\ P \in A, & \quad \frac{1}{2} \bar{u}(P) \\ P \in \nu \cup A, & \quad 0 \end{aligned} \right\} \\
 = \iint_{(A)} \left[\sigma_Q \nabla_P \left(\frac{-1}{4\pi r} \right) + \dot{\gamma}_Q \times \nabla_P \left(\frac{-1}{4\pi r} \right) \right] dA \\
 + \iiint_{(\nu)} \bar{\omega}_Q \times \nabla_P \left(\frac{-1}{4\pi r} \right) d\nu \quad (6)$$

프로펠러와 선미 유동장의 상호작용 해석에 관심이 있는 본 연구에서는 뒷식의 최종항 체적적분을 유의하여 살펴볼 필요가 있다. 프로펠러에의 유입유동에 포함되는 보오텍스는 원래 선미주위의 결성유동에 의해 생성된 것으로 공칭반류를 사용하여 그 초기치를 알 수 있다. 즉,

$$\bar{\omega}_n(\bar{x}) = \nabla \times \bar{u}_n \quad (7)$$

여기에서 \bar{u}_n 은 선미에서 프로펠러 없이 예측된 공칭반류이며, 따라서 $\bar{\omega}_n$ 은 공칭반류에 포함된 보오텍스 즉 shear 유동을 표현해 준다. 프로펠러에 의해 shear가 변형되지 않는 경우 체적 적분항은 쉽게 변환되어 지금까지 다루어 온 Green 정리로 돌아가게 되므로 문제가 없다. 그러나 보오텍스($\bar{\omega}_Q$)의 세기 및 위치가 프로펠러와의 상호작용에 의해 변하는 경우는 삼중적분방정식을 풀어야 한다는 끔찍한 문제점에 봉착하게 된다. 다음절에는 이 삼중적분의 의미를 이해하고 단순화하는 방안을 살펴보기로 한다.

2.4. 유효속도의 정의

ITTC보고서[7]에 의하면 field point $\bar{x}(x, y, z)$ 에서의 유효속도 $\bar{u}_e(\bar{x})$ 는 전속도 $\bar{u}(\bar{x})$ 에서 프로펠러 포텐셜 특이함수에 의해 유기되는 속도 $\bar{u}_i(\bar{x})$ 를 빼고 남은 속도로 정의된다. 이를 식으로 쓰면,

$$\bar{u}_e(\bar{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \bar{u}(\bar{x}) - \bar{u}_i(\bar{x}) \quad (8)$$

여기에서 \bar{u}_i 는 프로펠러를 나타내는 쏘오스와 보오텍스 시스템에 의해 유기되는 속도로, Poincare 방정식의 두 이중적분항에 의한 유기속도와 같아진다. 따라서 식(8)과 전절의 식(6)을 비교함으로써 유효속도 $\bar{u}_e(\bar{x})$ 는 유동장중에 포함되어 있는 보오텍스, 다시말하면 전단유동(shear flow)에 의해 유기되는 속도임을 알 수 있다. 즉,

$$\bar{u}_e(\bar{x}) = \iint_{(A)} \left[\sigma_Q \nabla_P \left(\frac{-1}{4\pi r} \right) + \dot{\gamma}_Q \times \nabla_P \left(\frac{-1}{4\pi r} \right) \right] dA \\
 + \iiint_{(\nu)} \bar{\omega}_Q \times \nabla_P \left(\frac{-1}{4\pi r} \right) d\nu \quad (9)$$

유효속도 분포 $\bar{u}_e(\bar{x})$ 는 프로펠러에 의해 유기되는 속도 $\bar{u}_i(\bar{x})$ 의 계산에 직접적인 입력자료로 사용되는 속도인 것을 식(8)로부터 알 수 있으나 식(8)에서는 전속도 $\bar{u}(\bar{x})$ 의 값을 알지 못하므로 구할수 없고, 식(9)을 사용하여 계산할 수 있으리라 생각되지만 유체 체적(ν)에 포함되어 있는 보오텍스 $\omega(\bar{x})$ 의 세기 및 분포

상태를 알지 못하므로 쉽게 계산을 할 수 없다.

다시말하면, 유동장중에 섞여있는 보오텍스 $\bar{\omega}(\bar{x})$ 의 영향을 계산하는 것이 곧 유효속도 $\bar{u}_e(\bar{x})$ 를 계산하는 것이 되며, 따라서 $\bar{\omega}$ 를 우선 알아야 할 필요가 있다. 그러나 유동장중의 $\bar{\omega}(\bar{x})$ 는 전속도 $\bar{u}(\bar{x})$ 의 분포에 따라 결정되므로 보오텍스 운동역학(vortex dynamics)를 다시 검토하여야 한다.

우선 유체중에는 전술한 바와 같이 공칭반류에 의한 보오텍스 $\bar{\omega}_n = \nabla \times \bar{u}_n$ 이 초기치로 존재하고, 근본적으로 포텐셜 유속도를 주는 프로펠러의 영향이 추가적인 shear를 생성하지 않으므로(프로펠러 후류 유관 내의 방출 보오텍스는 따로 취급하므로), 기존의 $\bar{\omega}_n$ 이 운동역학 법칙에 따라 변형되어 최종의 $\bar{\omega}(\bar{x})$ 가 된다는 사실을 인식할 필요가 있다.

3. 수치 해석

3.1. 수치해석 모형

식(6)의 삼중적분을 푸는 방법은 여러가지가 있을 수 있으나 방대한 계산, 특히 프로펠러 해석 및 유기속도 계산 사이의 반복계산이 예상된다. 따라서 유효반류의 영향을 추정하기 위하여 우선 단순화된 모형을 가정하여 삼중적분을 처리하여 보고, 필요에 따라 그 정도를 높여가는 것도 한가지 방안이 될 수 있다.

본 연구에서는 우선 축대칭 shear의 경우에 대하여만 2가지 유효반류 모형에 대해 검토하기로 한다.

A모형 : 프로펠러 주위의 유관은 프로펠러의 작용에 의해 후류에서 반경방향의 수축이 있다. shear를 나타내는 보오텍스 시스템은 유효반류의 변형이 고려되지 않는 경우는 $-\infty$ 에서 ∞ 까지 연장된 동심 원통의 집합으로 대치될 수 있는바, 수축의 효과를 나타내기 위하여 프로펠러 면에서 갑자기 불연속이 있다고 가정하면 Fig. 1과 같은 보오텍스 튜브에 의해 유기되는 속도를 프로펠러면에서 계산한 후에 프로펠러 계산의 입력자료로 사용하는 것이다. 상류의 보오텍스 튜브는 공칭반류로부터 얻을 수 있고, 하류의 보오텍스 튜브의 위치는 질량보존의 법칙을 써서 구한다. 이때 하류 보오텍스의 세기는 보오텍스 운동법칙을 따라 바뀌게 된다.

B모형 : 프로펠러 운동량이론에서 관찰된 바와 같이 프로펠러 유관은 프로펠러 면 주위에서 가장 심하게 그러나 매끄럽게 변화한다. 통상적으로 프로펠러에의 유입유동의 축방향 변화는 무시되어 왔으므로 본 모형의 계산을 통하여 프로펠러 코드방향을 따라서 유효속

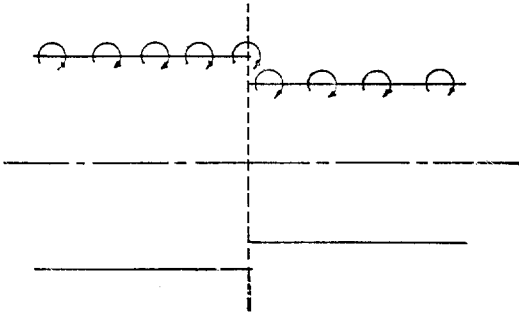


Fig. 1 Step-contraction model of vortex tube representing effective velocity distribution

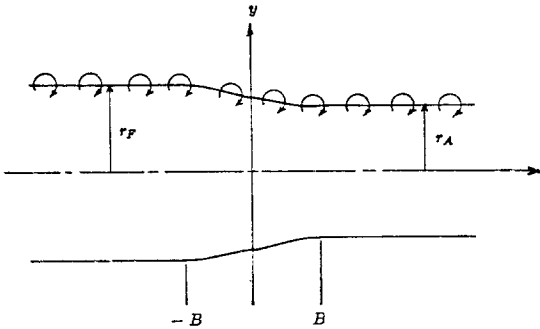


Fig. 2 Continuous contraction model of vortex tube representing effective velocity distribution

도를 변화하여 계산을 수행해야하는 필요성을 검증할 수 있을 것이다. B모형 계산에 필요한 가정 및 매개 변수는 다음과 같이 정의한다.

- (1) 유관사이의 선량보존법칙 적용으로 하류 유관의 위치를 계산한다.
- (2) 상, 하류 보오텍스 유관과의 맞출위치 ($x = \pm B$)에서 천이 유관의 반경의 변화율이 영이 되도록 한다.
- (3) 천이 유관 반경의 식을 3차식으로 가정한다.
- (4) 반경을 $r = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 의 꼴로 놓으면, 맞출 경계면에서의 상, 하 반경값 $r = r_F, r_A$ 와 $\frac{dr}{dx} = 0$ 의 조건으로부터

$$r = \frac{1}{4B^3}(r_F - r_A)x^3 - \frac{3}{4B}(r_F - r_A)x + \frac{1}{2}(r_F + r_A) \quad (10)$$

의 식을 얻는다.

3.2. 원형 보오텍스에 의한 유기속도

축방향 위치가 x' 이고 반경이 r' 인 원형 보오텍스에 의한 $P(x, r, \phi)$ 점에서 유기되는 속도를 유도하기로 한다(Fig. 3 참고). 원형의 분할 요소 보오텍스에 의한 유기속도는 Biot-Savart의 법칙에 의하면

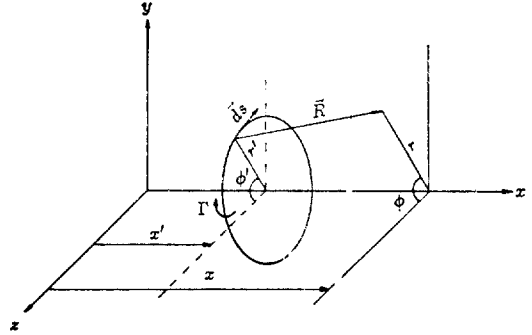


Fig. 3 Notation used in deriving velocity components induced by a vortex ring

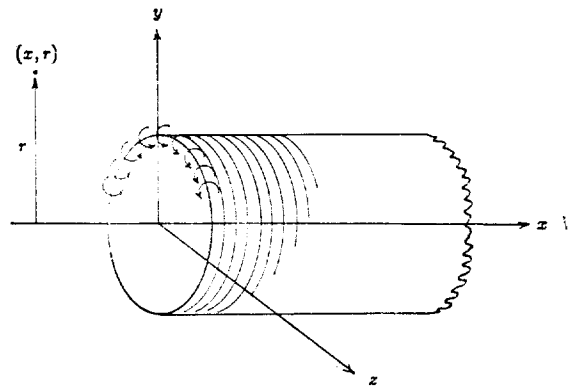


Fig. 4 Half-infinite cylindrical vortex tube and a field point

$$d\vec{v} = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{\vec{R} \times d\vec{s}}{R^3} \quad (11)$$

이 된다. 여기에서 $d\vec{s}$ 는 원형 보오텍스의 원주방향에 접하는 방향이고 길이는 $ds = r'd\phi'$ 가 된다. 또한 \vec{R} 는 분할 요소보오텍스로 부터 P 점까지의 거리 벡터이다. 즉,

$$\begin{aligned} d\vec{s} &= (0\vec{i} + \cos\phi'\vec{j} + \sin\phi'\vec{k})ds, \\ \vec{R} &= (x-x')\vec{i} + (r\sin\phi - r'\sin\phi')\vec{j} \\ &\quad + (r\cos\phi - r'\cos\phi')\vec{k}, \\ R &= |\vec{R}|. \end{aligned}$$

원형 보오텍스에 의해 유기되는 축방향 및 반경방향 유기속도는 요소 보오텍스에 의한 유기속도를 원주방향으로 적분하여 구해진다.

$$\begin{aligned} v_x(x, r) &= \frac{\Gamma}{4\pi} \int \hat{e}_x \cdot \frac{\vec{R} \times d\vec{s}}{R^3} \\ &= -\frac{\Gamma}{4\pi r'} \int_0^{2\pi} \frac{\bar{r} \cos(\phi - \phi') - 1}{[(\bar{x} - \bar{x}')^2 + \bar{r}^2 + 1 - 2\bar{r} \cos(\phi - \phi')]^{3/2}} d\phi', \end{aligned} \quad (12)$$

$$v_r(x, r) = -\frac{\Gamma}{4\pi r'} \int_0^{2\pi} \frac{(\bar{x} - \bar{x}') \cos \phi'}{[(\bar{x} - \bar{x}')^2 + \bar{r}^2 + 1 - 2\bar{r} \cos(\phi - \phi')]^{3/2}} d\phi', \quad (13)$$

where

$$\bar{r} = \frac{r}{r'}, \quad \bar{x} = \frac{x}{r'}, \quad \bar{x}' = \frac{x'}{r'}$$

식(12), (13)은 complete elliptic integral로 표시할 수 있으며 Kuchemann and Weber [9]에 의하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$v_x(x, r) = \frac{k}{2\sqrt{r}} \left\{ K(k) - \left[1 + \frac{k^2}{2(1-k^2)} \left(1 - \frac{1}{r} \right) \right] E(k) \right\}, \quad (14)$$

$$v_r(x, r) = -\frac{(x-x')k}{2r^{3/2}} \left\{ K(k) - \left[1 + \frac{k^2}{2(1-k^2)} \right] E(k) \right\}, \quad (15)$$

where

$$k^2 = \frac{4r}{(x-x')^2 + (r+1)^2},$$

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1+k^2 \sin^2 \alpha}} d\alpha, \quad (\text{the Elliptic integral of the 1st kind})$$

$$E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \alpha} d\alpha. \quad (\text{the Elliptic integral of the 2nd kind})$$

3.3. 반무한 원형 보오텍스에 의한 유기속도

원형 보오텍스에 의한 유기속도는 보오텍스로 둘러싸인 평면상에 위치한 축방향 다이폴에 의해 유기되는 속도와 동일하다[10]. 즉,

$$\vec{v}_{ring} = \frac{1}{4\pi} \oint \frac{\vec{R} \times d\vec{s}}{R^3} = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_r} \nabla \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{-1}{R} ds, \quad (16)$$

여기에서 S_r 은 원형 보오텍스로 둘러싸인 평면이다. 그러므로 Fig. 4에 보인바와 같은 반 무한 원형 보오텍스에 의한 $P(x, r)$ 점에서의 유기속도는 원통내에 위치한 다이폴에 의한 유기속도와 동일하다.

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \int_0^\infty \vec{v}_{ring} d\xi = \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty d\xi \left[\iint_{S_r} \nabla \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{-1}{R} ds \right] \\ &= \frac{1}{4\pi} \nabla \iint_{S_r} \left[\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{-1}{R} d\xi \right] ds \\ &= \frac{1}{4\pi} \nabla \iint_{S_r} \left[\frac{-1}{R} \right]_{\xi=0}^\infty ds = \frac{1}{4\pi} \nabla \iint_{S_r} \left[\frac{1}{R} \right]_{\xi=0} ds. \end{aligned} \quad (17)$$

즉 반 무한 원통내에 위치한 다이폴에 의한 유기속도는 원통이 시작한 위치에 있는 원형 쏘오스 판에 의한

유기속도로 치환할 수 있다. 본 연구에서는 원형 쏘오스 판을 50개의 삼각형 요소 쏘오스 판으로 분할하여 표시하였고, 원형 쏘오스 판에 의한 유기속도는 각 요소에 의한 유기속도들의 합으로 표시하였다.

3.4. 유혹속도 계산 절차

앞에서 설명한 동심 보오텍스 원통면들의 집합으로 shear 유동장을 표시하고, shear에 의해 프로펠러 면에 유기되는 속도를 구하는 절차를 Fig. 5에 계산 흐름도를 정리하였다.

각 과정을 따라서 해석방법을 차례대로 설명하기로 한다.

3.4.1. 공칭반류속 보오텍스 분포

공칭반류속에 포함되어 있는 shear는 다음과 같이 표현된다.

$$\vec{\omega}_n(\vec{x}) = \nabla \times \vec{u}_n = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \hat{e}_r & \hat{e}_\theta & \hat{e}_x \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial x} \\ u_r & ru_\theta & u_x \end{vmatrix} \quad (18)$$

현재 고려하고 있는 축대칭 공칭반류에 대하여는 $\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$, $u_\theta = 0$ 이므로

$$\vec{\omega}_n = \hat{e}_\theta \left(\frac{\partial u_r}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial r} \right) \quad (19)$$

로 표시되며, 공칭반류의 축방향 변화가 적다고 가정하면, $\frac{\partial}{\partial x} = 0$ 이므로

$$\vec{\omega}_n = -\hat{e}_\theta \frac{\partial u_x}{\partial r} \quad (20)$$

로 간단히 표시된다.

반경방향을 Δr 간격으로 나누어서 속도 미분을 근사화하면(1개 성분이므로 벡터기호를 빼기로 한다),

$$\omega_n \approx -\frac{\Delta u_x}{\Delta r} \quad (21)$$

따라서 공칭반류를 표시하는 상류축의 반무한 보오텍스 원통의 세기 Γ_i 는

$$\Gamma_i \approx \omega_n \Delta r \approx -\Delta u_x \quad (22)$$

3.4.2. 하류 원통보오텍스의 반경위치

프로펠러에 의해 프로펠러 유관내의 유동이 가속되면 하류유관의 반경이 수축되며 연속의 정리로부터 그 유관의 반경을 계산할 수 있다.

그러나 캐비테이션 터널에서의 관찰에 의하면 수축된 후류유관의 반경이 $r/R = 0.83$ 인 것이 널리 알려져 있으므로 본 연구에서는 반경의 수축율 및 보오텍스 유관의 반경방향 범위(즉, Δr)의 수축율 모두 0.83으로 가정하여 계산을 수행하였다. 즉,

$$\frac{r'}{r} = \frac{\Delta r'}{\Delta r} = 0.83 \quad (23)$$

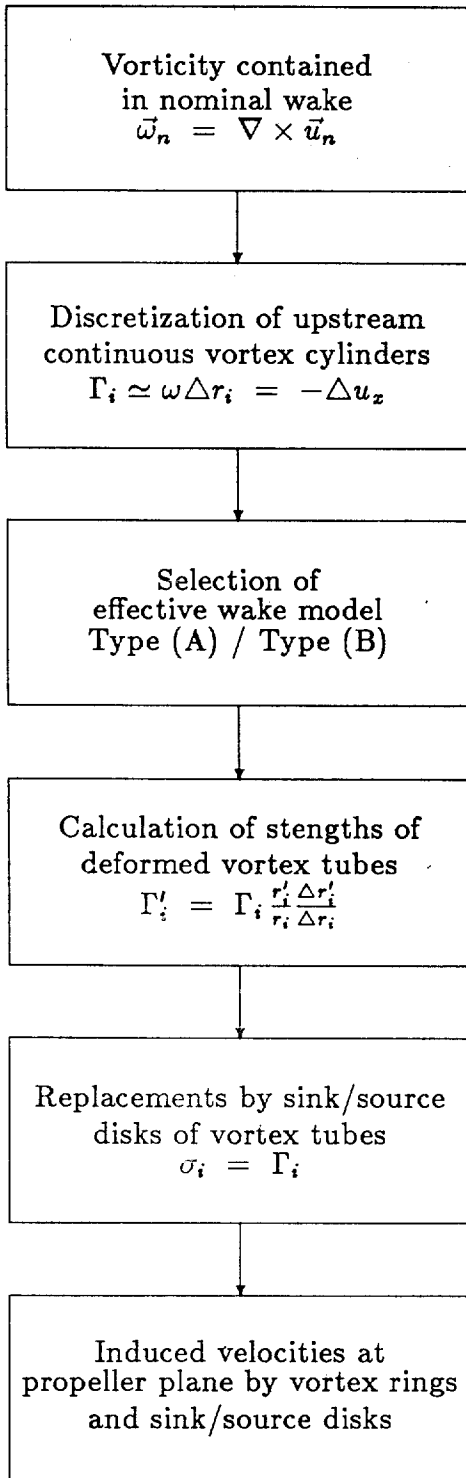


Fig. 5 Flowchart for effective wake prediction

3.4.3. 변형된 원형 보오텍스의 세기

상류측의 보오텍스 튜브는 프로펠러를 지나 천이지역을 지나 하류로 가면서 반경이 줄어들고($r \rightarrow r'$ 으로, $r' < r$) 보오텍스 세기의 변화를 가져오게 된다.

원주길이 $2\pi r$ 인 원환 보오텍스에 각 운동량 보존법칙을 적용하면 변형 전후에

$$\frac{r}{2\pi r} = \frac{r'}{2\pi r'} \tag{24}$$

이로부터 반경방향으로 이산화(discretization)하고 축방향으로 연속으로 분포된 경우, 집중 보오텍스의 세기 Γ 는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\Gamma = \int_0^1 \int_r^{r+dr} r dr dx = r \Delta r \tag{25}$$

따라서, 식(24)에 식(25)을 대입하면, 반경이 r 에서 r' 으로 변환후의 원형 보오텍스의 세기를 구할 수 있다.

$$\frac{\Gamma}{r \Delta r} = \frac{\Gamma'}{r' \Delta r'} \text{ or } \Gamma' = \Gamma \frac{r'}{r} \frac{\Delta r'}{\Delta r} \tag{26}$$

3.4.4. 프로펠러 면에서의 유기속도(A형 반류 모형의 경우)

상류, 하류에 반무한 원통형 이산 보오텍스를 놓으므로 shear를 표시하고 있으나, 이는 이미 설명한 바와 같이 쏘오스/싱크 원판으로 대체할 수 있다.

전절에서 구한 보오텍스의 세기 Γ_i 와 쏘오스의 세기 σ_i 사이에는 등식이 성립한다. 따라서

$$\sigma_i = \Gamma_i \tag{27}$$

유효반류 모형으로 A형에 대하여 실제 계산을 수행할 경우는, 쏘오스 평면에서의 유기속도가 쏘오스 세기의 1/2이 되는 성질을 사용하면 좋다. 즉 프로펠러면($x=0$)에서 제 i 번째 반무한 보오텍스 원통에 의해 유기되는 속도는

$$(u_s)_i = \begin{cases} \frac{\sigma_i}{2} = \frac{\Gamma_i}{2}, & r < r_i \\ 0, & r > r_i \end{cases} \tag{28}$$

쏘오스면을 벗어난 ($r > r_i$) 프로펠러 면에서의 축방향 유기속도는 영이 되는 것에 유의할 필요가 있다.

동심 원통형보오텍스에 의해 유기되는 속도는 Fig. 6에서 보인바와 같이 쏘오스 면이 겹치는 부분의 속도는 대수적으로 합하여 주면 된다. N 개의 반무한 보오텍스 튜브로 shear를 표시한 경우, i 번째 보오텍스 위치에서의 유기속도는 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$(u_s)^{\pm} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \Gamma_j \tag{29}$$

Fig. 6은 위의 과정을 그림으로 잘 보여주고 있다.

상하류의 보오텍스 시스템에 의한 속도 u_s^{\pm} 를 대수적으로 합하면 프로펠러 면에서의 최종 유효반류를 구할 수 있게 된다. 즉

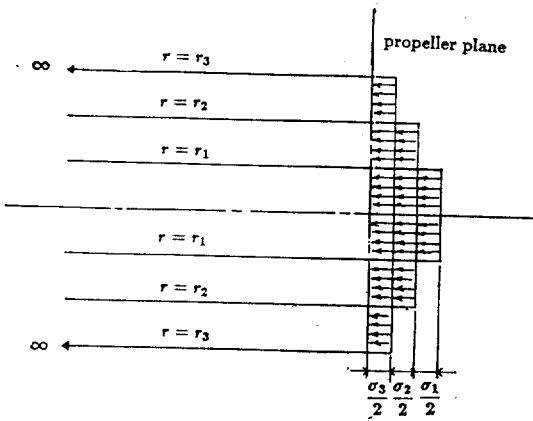


Fig. 6 Induced velocities at propeller plane by concentric half-infinite vortex tube

(15) 및 (17)식을 사용하여 다음과 같이 표현 된다.

$$\vec{v} = \sum_{j=1}^{N\Gamma} \Gamma_j \vec{v}_j^r + \sum_{j=1}^{N\sigma} \sigma_j \vec{v}_j^\sigma \tag{31}$$

여기서,

$$N\Gamma = N_{ring} \times M_{ring}$$

$$N\sigma = 2 \times M_{ring}$$

위의 식에서 첨자 Γ, σ 는 각각 보오텍스 및 쓰오스에 의해 유기되는 속도를 의미한다. Fig. 7에 보듯이 $x=0$ 인 프로펠러 평면에는 보오텍스가 오지않도록 N_{ring} 은 짝수로 정해져야 한다.

유효속도 분포 계산을 위한 제어점은 이산 보오텍스 면에서의 계산을 피하여 원형보오텍스사이에 위치하도록 배치한다. 즉 축방향으로는 $x=0$ 의 위치에, 반경방향으로는 원형 보오텍스가 놓여있는 반경좌표의 중간에 제어점이 오도록 하였다.

3.5. 예제 계산

수치해석을 위하여 이창섭/송인형[6]에 의해 사용되었던 반류분포를 사용하였다(반경 R 및 선속 U 로 무차원화 하였음).

Table 1 Nominal velocity distribution

r/R	0.35	0.50	0.65	0.80	0.95
u_x/U	0.418	0.565	0.723	0.829	0.879

위 표의 정보는 유효반류의 계산에는 부적당하므로 Fig. 8에 보는 바와 같이 공칭속도분포를 fairing 하였으며 특히 $u_x/U < 1$ 인 범위는 shear가 존재하는 곳을 의미하므로 $r/R=1.5$ 까지 확장하여 공칭속도가 1까지 증가하도록 하였다. 이러한 확장은 임의적이거나 이곳의 보오텍스의 세기가 극히 약하므로 계산결과에는 큰 영향을 주지 않으리라 생각된다.

A형 반류모형에 의하여 수치 계산한 경우에는, 식 (22)를 사용하여 Γ_i 를 계산한후, 우선 식(28)을 써서 상류 shear에 의해 프로펠러 면에 유기되는 속도 u_s^* 를 구하였다. 또한 상류 보오텍스 시스템의 세기, Γ_i 분포가 얻어진 후에 간단한 반경수축 법칙을 써서(즉, 식 (23)을 써서), 수축후의 반경 위치(r/R) 및 변화된 원통 보오텍스의 세기 Γ' 을 계산하였으며, 이로부터 하류 shear에 의한 유기속도를 계산하였다.

하류 보오텍스 시스템에 의한 유기속도는 상류 시스템과 다른 반경위치에서 유기속도가 계산되므로 보간법에 의한 계산과정이 필요하다. 보간법으로 구한 값과 shear에 의해 유기된 최종 유효속도값이 Table 2에 정리되어 있다. 이 계산결과는 Fig. 8에 공칭속도분포

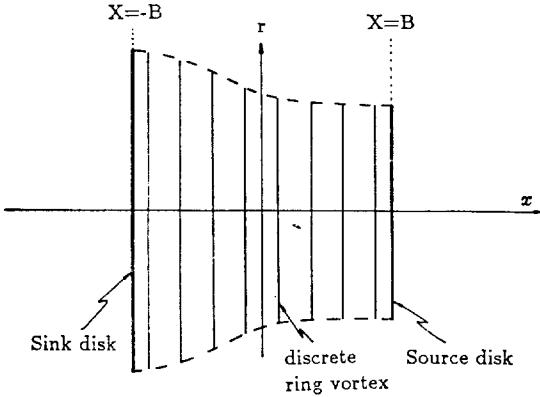


Fig. 7 Effective velocity model represented by discrete ring vortex system and sink/source disks.

$$u_s(r) = u_s^+(r) + u_s^-(r) \tag{30}$$

3.4.5. 프로펠러 면에서의 유기속도(B형 반류모형의 경우)

상류, 하류에 있는 반무한 원통형 이산 보오텍스를 원형 sink/source 판으로 대체하고, 연속적으로 변화하고 있는 천이구역의 보오텍스 튜브를 이산화하여 N_{ring} 개의 이산 원형 보오텍스로 대체하던 특정 반경에 위치한 보오텍스 시스템을 Fig. 7과 같이 보일 수 있다.

Fig. 7과 같은 보오텍스/쓰오스 시스템을 반경방향으로는 M_{ring} 개 만큼 중첩시키게 되므로 전체 특이점계는 $N_{ring} \times M_{ring}$ 개의 원형 보오텍스와 $M_{ring} \times 2$ 개의 sink 혹은 source 원판으로 구성되게 된다.

이러한 특이점제에 의해 유기되는 속도장은 (14),

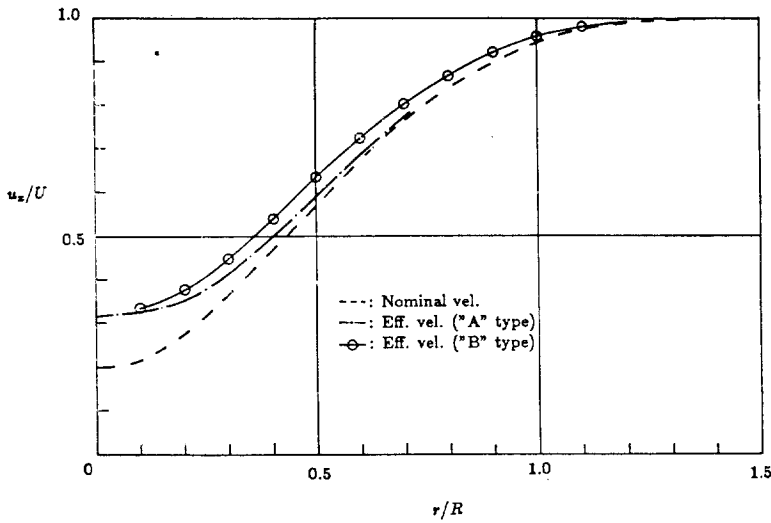


Fig. 8 Nominal and effective velocity profiles

Table 2 Calculation of induced velocity by effective wake models

r/R	$u_x(\text{faired})$	Γ_i	Type A	Type B
0.0	0.2			
0.1	0.22	-0.02	0.325	0.336
0.2	0.28	-0.06	0.349	0.377
0.3	0.37	-0.09	0.411	0.451
0.4	0.47	-0.1	0.497	0.540
0.5	0.57	-0.1	0.589	0.632
0.6	0.67	-0.1	0.680	0.721
0.7	0.76	-0.09	0.764	0.801
0.8	0.83	-0.07	0.836	0.864
0.9	0.89	-0.06	0.893	0.916
1.0	0.94	-0.05	0.935	0.955
1.1	0.97	-0.03	0.966	0.977
1.2	0.985	-0.015	0.983	0.987
1.3	0.99	-0.005	0.991	0.992
1.4	0.995	-0.005	0.995	0.997
1.5	1.0	-0.005	0.997	1.000

와 함께 도시되었으며, 이창섭/송인행[6]에 의한 계산 결과와 Fig. 9에서 비교되었다.

B형 반류모형에 대하여도, 식(14), (15), (17)을 근간으로 하여 식(31)에 의하여 수치계산이 수행되었다. 원형 보오텍스의 반경이 수축됨에 따른 보오텍스 세기의 조절도 앞에서 설명한대로 수행되었다. 예제계산에는 반경방향 보오텍스 $M_{ring}=15$, 유선방향 보오텍스 $N_{ring}=20$ 이 사용되었다. N_{ring} 을 200까지 증가시켜

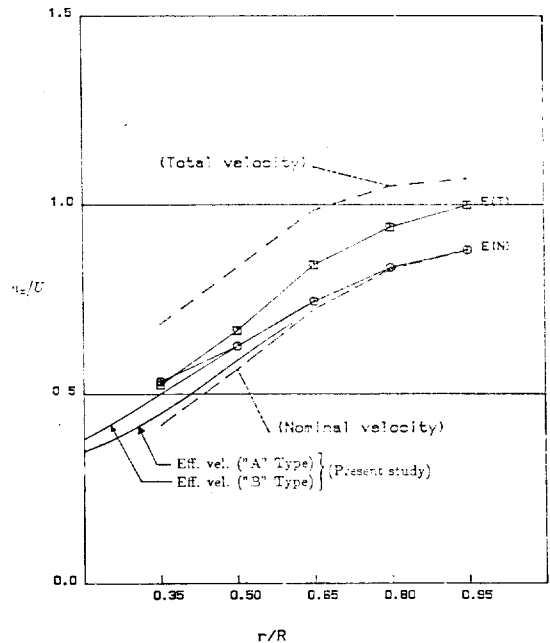


Fig. 9 Comparison of prediction of effective velocity profiles

가며 수렴도를 검사하였으나 $N_{ring}=20$ 이면 유효숫자 3자리까지 수렴되는 값을 보여주었다.

수치계산은 모두 개인용 컴퓨터(IBM PC)에서 되었으며 Table 2와 Fig. 8 및 Fig. 9에 함께 있었다. Fig. 9에서 보는 바와 같이 B형 반류모형의 결과가 이창섭/송인행[6]에 보인 양과

Huang-van Houten 이론에 의한 수치계산(Fig. 9에서 $E(N)$ 으로 표기)과 상당히 근사한 값을 주는 것을 알 수 있다. 이는 대형 컴퓨터에서 장시간 계산을 소요하는 보다 엄밀한 계산 방법에 비해 본 논문의 간략한 계산법이 결코 뒤지지 않는다는 것을 보여주는 것이며, 동시에 유효반류의 leading behavior가 축대칭 유동의 해석으로 얻어질 수 있다는 것을 보이는 것이라 하겠다(Fig. 9에서 $E(T)$ 로 표기된 선은 전체속도로부터 계산한 유효반류 분포로 참고문헌[6]에 자세히 설명되어 있음).

4. 결론 및 제언

본 연구의 결과를 요약하면 다음과 같다.

1. 선미유장중의 보오텍스 시스템과 프로펠러와의 상호작용을 이론적으로 정리하였다.
2. 공칭반류에 포함되어 있는 보오텍스 시스템이 프로펠러의 작동에 의하여 변형되며, 이렇게 바꾼 shear에 의해 프로펠러위치에 유기되는 속도가 유효반류가 됨을 보였다.
3. 유효반류의 간단한 모형에 의해 원관형 추진장치와 상호작용 중인 유효반류를 계산하여 보였다. 이는 프로펠러에 의해 유기되는 속도를 고려하여 보오텍스를 유선에 일치되도록 놓는 반복계산법의 초기값으로 활용될 수 있다.
4. 본 연구결과로 얻은 유효반류 모형과 프로펠러의 직접적인 상호작용에 관한 추가연구가 절실히 요구된다.
5. 본 연구의 기본이론을 확장하여 불균일 반류에서 작동하는 비정상 프로펠러 문제에 적용하여 선체기진력의 원인을 좀더 정확히 규명하도록 하여야 한다.

후 기

본 연구는 과학기술처의 특정연구개발사업의 일환으로 한국기계연구소 대덕선박분소의 지원으로 수행되었음을 밝히며 이에 심심한 사의를 표하는 바이다. 특히 프랑스 논문의 이해를 위해 협조해준 홍도천 박사에게 감사한다.

References

[1] Brard, Naval Hydrodynamics, unpublished(in French)
 [2] Goodman, T.R., "Momentum theory of a pro-

peller in a shear flow", *J. of Ship Research*, Vol. 23, pp.242-252, 1979.
 [3] Huang, T.T & Groves, N.C., "Effective Wake: Theory and experiment", *13th Symp. on Naval Hydrodynamics*, Office of Naval Research, pp. 651-673, Tokyo, Oct., 1980.
 [4] Dyne, G., "On optimal wake vorticity adapted propellers", *PRADS' 83 Symp.*, pp.77-84, Tokyo, 1983.
 [5] Breslin, J.P., van Houten, R.J., Kerwin, J.E. & Johnsson, C.A., "Theoretical and experimental propeller-induced hull pressures arising from intermittent blade cavitation, loading, and thickness", *Trans. SNAME*, Vol. 90, pp.111-151, 1982.
 [6] Lee, C.-S. & Song, I.H., "Effective wake and its influence upon propeller-induced pressure fluctuations", *3rd PRADS*, Norway, 1987.
 [7] Report of Propeller Committee, *Proceeding of the 17th ITTC*, pp.144-149, Gothenburg, 1984.
 [8] Lee, C.-S., "Theoretical Analysis of Sheared Flow behind a Hull", Chungnam National Univ. 42p., 1988.
 [9] Küchemann, D. and Weber, J. "Aerodynamics of Propulsion", McGraw-Hill, N.Y., 1953.
 [10] Lee, J.-T., "A Potential based Panel Method for the Analysis of Marine Propellers in Steady Flow", Ph.D. Thesis, M.I.T. 150p., 1987.

부록 A. Poincare 방정식의 유도

Vector 일치성으로 다음과 같은 Durand의 공식[1]이 있다. 즉,

$$\iint_{(A)} [\vec{A}(\vec{B} \cdot \vec{n}') + \vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{n}')] dA = \iiint_{(v)} [\vec{A}(\vec{r} \cdot \vec{B}) + \vec{B}(\vec{r} \cdot \vec{A}) - \vec{A} \times (\vec{r} \times \vec{B}) - \vec{B} \times (\vec{r} \times \vec{A})] dv \tag{A-1}$$

여기에서, \vec{n}' 은 물체표면 위에서 존재하며, 유체영역 밖으로 즉, 물체속으로 향할 때 양으로 정의된다. 식 (A-1)에

$$\begin{aligned} \vec{A} &= \vec{r} \frac{1}{r}, \\ \vec{B} &= \vec{u}, \\ r &= \overline{PQ} \\ &= \sqrt{(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2 + (\zeta-z)^2} \end{aligned} \tag{A-2}$$

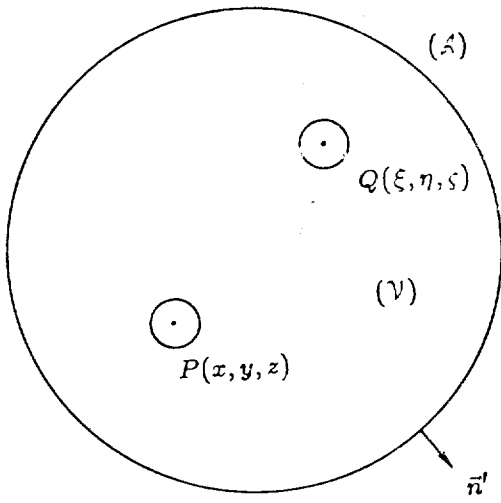


Fig. A-1 Definition sketch of fluid domain, boundary and normal vector

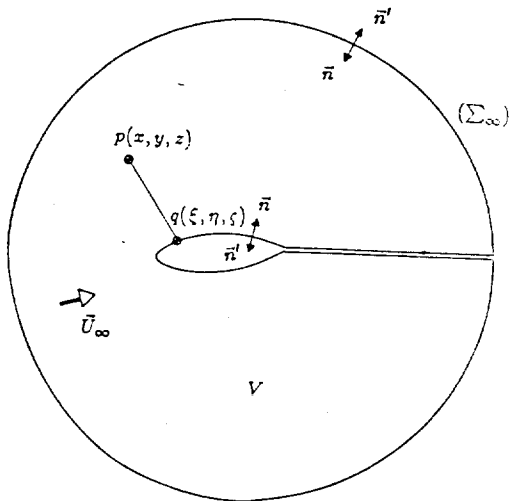


Fig. A-2 Definition sketch of fluid domain, boundary surface and normal vectors

를 대입하면(여기서 $P=(x, y, z)$, $Q=(ξ, η, ζ)$), 다음과 같은 식을 얻게된다.

$$\begin{aligned} & \iint_{(A)} [(\vec{u} \cdot \vec{n}') \nabla \frac{1}{r} + (\vec{n}' \times \vec{u}) \times \nabla \frac{1}{r}] dA \\ &= \iiint_{(v)} [(\nabla \cdot \vec{u}) \nabla \frac{1}{r} + \vec{u} (\nabla^2 \frac{1}{r})] + (\nabla \times \vec{u}) \\ & \quad \times \nabla \frac{1}{r} - \vec{u} \times (\nabla \times \nabla \frac{1}{r})] dV \end{aligned} \quad (A-3)$$

우선 vector 일치공식에 의거 우변의 마지막 항은 영이 되므로 식으로부터 빼어 버릴 수 있다. 그리고 우변의 두번째 항의 계산을 위하여 field point $P(x, y, z)$ 의

위치를 검토할 필요가 있다.

Fig. A-1에 보인것과 같이 점 $P(x, y, z)$ 는 영역(v) 내에 있을수도 있고, 경계표면(A)에 있을수도 있으며, 유체영역(v)의 밖에 있을수도 있다. 이 경우의 우변 둘째항을 살펴보기로 하자. \vec{u} 는 vector이므로 scalar 성분 u_i 에 대하여 검토하면, 점 $P(x, y, z)$ 가 영역(v)의 내부에 있는 경우를 우선 보기로 한다.

$$\begin{aligned} & \iiint_{(v)} u_i(Q) \nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) dV(Q) = \iiint_{(v)} u_i \nabla \cdot (\nabla \frac{1}{r}) dV \\ &= \iint_{(A)} \vec{n}' \cdot (u_i \nabla \frac{1}{r}) dA = \iint_{(A)} u_i(Q) (\vec{n}' \cdot \nabla \frac{1}{r}) dA \\ &= u_i(P) (-4\pi) \end{aligned} \quad (A-4)$$

여기에서 Q 는 변수가 독립변수 (ξ, η, ζ)의 함수인 것을 의미하며, 3중적분에서 2중적분으로 변환되는 과정에 divergence 정리가 사용되었다. 또한 아래줄에서 (A)에서의 이중적분은 유체내부에 쓰오스가 존재하지 않는다면 field point $P(x, y, z)$ 까지 줄어든 (A_p)로 둘러싸인 작은 구주위의 이중 적분으로 변환이 가능하다. 여기에 다시 법선 vector \vec{n}' 의 방향과 sifting property로 부터 최종식을 얻을 수 있다.

일반적으로 $P(x, y, z)$ 의 위치에 따라 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\iiint_{(v)} \vec{u}(Q) \nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) dV = \begin{cases} -4\pi \vec{u}(P), & P \in (v) \\ -2\pi \vec{u}(P), & P \in (A) \\ 0, & P \in (v \cup A) \end{cases} \quad (A-5)$$

따라서 다음과 같이 변환하여 Poincare 공식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} & \left. \begin{aligned} P \in v, & \quad \vec{u}(P) \\ P \in A, & \quad \frac{1}{2} \vec{u}(P) \\ P \in v \cup A, & \quad 0 \end{aligned} \right\} \\ &= \frac{1}{4\pi} \iiint (\nabla \cdot \vec{u}) \nabla \left(\frac{1}{r} \right) dV(Q) \\ &+ \frac{1}{4\pi} \iiint (\nabla \times \vec{u}) \times \nabla \left(\frac{1}{r} \right) dV(Q) \\ &- \frac{1}{4\pi} \iint (\vec{n}' \cdot \vec{u}) \nabla \left(\frac{1}{r} \right) dA(Q) \\ &- \frac{1}{4\pi} \iint (\vec{n}' \times \vec{u}) \times \nabla \left(\frac{1}{r} \right) dA(Q) \end{aligned} \quad (A-6)$$

위의 식(A-6)에서 $P(x, y, z)$ 는 매개변수로만 작용하고, 이중적분과 삼중적분, Del operator Δ 은 모두 독립변수 $Q(\xi, \eta, \zeta)$ 의 함수임을 유의할 필요가 있다.

유체중에 잠겨있는 물체주위의 유동을 다루기 위하여는 Poincare 공식을 약간 수정하여 사용하는 것이 편리한 경우가 많다. 여기에서는 Fig. A-2에서 보인 것과 같이 무한원방의 표면(Σ_∞)과 물체를 싸고 있는 표면(A)으로써 유체 체적(v)을 둘러싸고 있다고 하고 그

사이를 작은 튜브로 연결한 경우에 대하여 우선 Poincare의 공식을 그대로 사용할 수 있음을 볼 수 있다.

그러나 현재까지의 저자의 관습을 따르기 위해 물체 표면에서 유체속으로 향하는 법선의 vector \vec{n} 을 도입하고, 또 $\nabla_{qr} = -\nabla_{rr}$ 인 점을 이용하면,

$$\vec{n} = -\vec{n}'$$

$$\nabla_q \frac{1}{r} = -\nabla_r \frac{1}{r} \tag{A-7}$$

의 성질로부터, 물체외부의 유동장의 해석을 위한 Poincare의 공식을 다시 쓸 수 있다. 즉,

$$\left. \begin{aligned} P \in \nu, & \quad \vec{u}(P) \\ P \in A, & \quad \frac{1}{2} \vec{u}(P) \\ P \notin \nu \cup A, & \quad 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned} &= \iiint (\nabla \cdot \vec{u})_q \nabla_r \left(\frac{-1}{4\pi r} \right) d\nu(Q) \\ &+ \iiint (\nabla \times \vec{u})_q \times \nabla_r \left(\frac{-1}{4\pi r} \right) d\nu(Q) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ \iint (\vec{n} \cdot \vec{u})_q \nabla_r \left(\frac{-1}{4\pi r} \right) dA(Q) \\ &+ \iint (\vec{n} \times \vec{u})_q \times \nabla_r \left(\frac{-1}{4\pi r} \right) dA(Q) \end{aligned} \tag{A-8}$$

식(A-8)을 유도하면서 무한원방 표면 (Σ_∞)에서의 이중적분에 의한 물체주위 유동에의 영향은 무시할 수 있다고 가정하였으며, 튜브부분의 이중적분도 극한 경우에는 영으로 판단된다는 사실을 사용하였다.

식(A-8)을 자세히 관찰하면, 유체중에서의 속도 $\vec{u}(P)$ 는 물체표면(A)에 소오스(세기 σ)와 보오텍스(세기 τ)로 불리우는 특이점을 분포하고, 유체공간(ν) 전체에 소오스와 보오텍스를 분포함으로써 표현될 수 있다는 것을 알 수 있다. 여기서 유의하여야 할 점은 이중적분부분은 이상유체에 Green 정리를 적용하여 얻은 통상의 적분방정식 꼴이지만, 유체공간을 포함하는 삼중적분의 기여가 있다는 사실이다.