

---

 論 文
 

---

大韓造船學會誌  
 第27卷 第1號 1990年 3月  
 Journal of the Society of  
 Naval Architects of Korea  
 Vol. 27, No. 1, March 1990

## 복합적층 원통형구각의 최적구조를 위한 비선형해석

염 철 응\*, 이 재 욱\*\*

 Nonlinear Strength Analysis of Laminated Composite Cylindrical  
 Shells for the Optimum Laminate Structure

by

C.W. Yum\* and J.W. Lee\*\*

## 요 약

본 해석에서는 압력용기를 설계하기 위하여 복합적층된 원통형 구각의 비선형 해석을 유한요소법으로 수행하였다.

적층순서의 변화에 따라 최소변위 또는 최대압력을 갖는 최적의 적층구조를 얻기 위하여 8절점 Isoparametric 격하요소를 사용하며 구조요소의 비선형거동은 Total Lagrangian 수식과 하중증분법을 적용하여 해석하며 평형반복수렴은 Newton-Raphson Method를 이용하였다.

선형해석의 경우에 9가지 적층구조를 선정하여 하중조건이 내압일때 최소변위를 나타내는 적층구조를 조사한 결과  $[50^\circ/-50^\circ]$ 의 최적구조를 구하였고 적층순서를  $[\theta^\circ/-\theta^\circ]$ 로 하여 비선형해석과 동시에 Quadratic Failure Criteria를 적용하였을 때 하중조건이 외압만을 고려하는 상태에서도  $\theta=50^\circ$ 가 최소 변위비를 나타내었고 외압과 축하중을 동시에 고려한 상태에서는  $\theta=90^\circ$ 였다.

## Abstract

This study deals with the nonlinear strength analysis of laminated composite cylindrical shells to find the optimum structure of pressure vessel.

By applying the F.E.M. using the 8-node degenerated Isoparametric shell element and Total Lagrangian formulation and being adopted Newton-Raphson method with incremental load as a solution scheme, the optimum structure is found from the viewpoint of minimum displacement.

As a results of linear analysis on the 9 cases of laminated structure,  $[50^\circ/-50^\circ]$  composition of the shell laminate give the minimum deflection. In case of the nonlinear analysis by applying Quadratic Failure Criteria on laminated combination  $[\theta^\circ/-\theta^\circ]$ , shell laminate structure of  $\theta=50^\circ$  under external uniform pressure was founded as a optimum structure and  $\theta=90^\circ$  for the case of external and axial loading combined.

발표 : 1989년도 대한조선학회 추계연구발표회('89. 11. 11)

접수일자 : 1990년 1월 4일, 재접수일자 : 1990년 2월 17일

\* 인하대학교 대학원

\*\* 정회원, 인하대학교 공과대학

## 1. 서 론

복합재료는 현재 그 적용범위를 넓혀가고 있으며 복합재료를 이용한 구조역학적 해석 및 응용이 다양해지고 있다. 두종류 이상의 물질을 조합하여 뛰어난 물리적 특성을 나타내는 복합재료는 기존의 등방성 재료와 비교할때 같은 중량에서 높은 비강성(specific stiffness)과 비강도(specific strength)를 갖기 때문에 경량화를 통한 경제성이 요구되는 선박, 항공기, 자동차구조재료에 적용되고 있으며 극한 작업환경인 우주공간과 심해에서도 그 활용이 예상되고 있다.

복합재료는 유기적 기지(matrix)와 탄소섬유와 같은 보강재(reinforcement)로 구성되며 일반 구조물에서는 일방향 보강섬유와 기지가 결합된 각 단층(laminate)의 적층구조(laminated)로 이루어지는데 같은성질 또는 다른 성질을 갖는 단층끼리 적층될수 있으며 epoxy 계열의 기지와 glass, graphite, boron, aramid 등의 보강섬유가 많이 쓰인다. 복합재료의 기계적 특성을 고려하던 하나의 단층은 일방향성을 나타내며 이러한 단층들을 적층시키므로써 이방성을 나타낸다. 여기서는 적층된 구조요소의 기계적거동을 laminated ranking method를 적용하여 나타낸다. 본 해석모델로는 복합재료로 구성된 압력용기를 대상으로 하여 외압을 받을때 압력선체의 비선형 응력해석을 유한요소법을 적용하여 수행하였다. 이러한 구조물은 유체역학적인 면을 고려하는 다양한 구각 형상이 많은데 이러한 구조형상에 대한 본 해석의 model은 원통구각이며 하중조건은 균일 분포하중, 축하중을 고려하였고 선형 및 비선형거동을 Total-Lagrangian-Formula, 하중증분법과 Newton-Raphson Method를 이용하여 해석하였다. 사용된 수치해석기법은 8절점 격하렐요소를 이용한 유한요소법이며 갑작 적분을 수행하였다. 이때 구조과정의 판단기준으로 quadratic failure criteria와 FPF(First-Ply-Failure) 및 LPF (Last-Ply-Failure)를 적용하여 주어진 하중상태에 따른 압력선체의 최적의 적층구조를 구하였다.

## 2. 비선형 해석

### 2.1. 비선형 개념

일반적으로 고체역학에서의 비선형 거동은 기하학적인 비선형(geometrical nonlinear)과 재료의 비선형(material nonlinear)으로 구분되는데 주어진 하중에

의해 변위가 큰 경우 비소변위이론이 더 이상 적용되지 못하는 것이 진자에 해당하며 재료의 탄성한계를 넘어 소성영역을 고려해야 하는 것이 후자에 해당된다. 복합재료의 물성치(material property)에 대한 비선형 거동은 복합재료의 특성인 취성(brittleness) 때문에 고려대상이 되지 못한다. 따라서 본 해석의 비선형해석은 기하학적인 변형만을 고려하며 여기에 failure criteria를 적용하였다.

기하학적인 비선형효과는 응력과 변형도론 기준좌표에 대한 표현관계와 2차항의 고더에 의한 비선형 효과로 나타내는데 기준상태의 선택에 따라 T.L. formula (Total Lagrangian)와 U.L. formula(Updated Lagrangian)로 나누어 진다. 즉 진자는 초기형상을 기준으로 하고 후자는 다음증분이 시작할때의 형상을 기준으로 한다. 본 논문에서는 T.L. formula를 적용한다.

### 2.2. 비선형 해석이론

대변형(large deformation)과 변형은 크나 변형도는 작은 얇은 shell구조에서는 모든 수치적분은 original volume에 대해 수행되며 하중증분 과정중 경계조건이 변하지 않는다고 할때 이와 같은 구조요소의 비선형거동에 대한 증분평형방정식(Incremental equilibrium equation)은 연속체역학을 바탕으로 한 가상일의 원리를 적용하여 가상변위에 대하여 변분을 취하므로써 구할수 있다 이때 보다 복잡한 응력-변위 관계를 나타내는 초기변위효과(initial deflection effect)를 고려하는데 있어서 보다 편리한 T.L. 수식을 이용하였으며 이식에는 2nd Piola-Kirchhoff stress와 Green Lagrange strain을 고려한다. 임의의 평형상태에서 T.L. 수식의 모든 static, kinematic 변수들은 time 0에서의 초기상태(initial configuration)에 대하여 정의되어진다. 따라서 Fig. 1에서 상태  $t+dt$ 의 평형방정식은 다

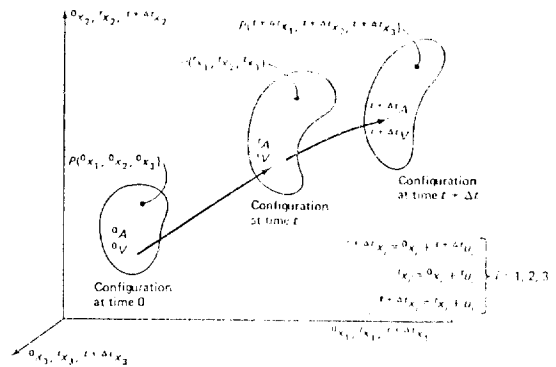


Fig. 1 Equilibrium of configuration in incremental theory

음과 같이 표현 할 수 있다[1].

$$\int_{v_0} {}^{t+dt} S_{ij} \delta_0^t \epsilon_{ij}^t dV = R_0^t d^t \quad (1)$$

$$= \int_{v_0} {}^{t+dt} f_i^B \delta u_i^t dV + \int_{s_0} {}^{t+dt} f_i^S \delta u_i^t dS$$

$$\int_{v_0} {}^{t+dt} S_{ij} \delta_0^t \epsilon_{ij}^t dV + \int_{v_0} {}^{t+dt} f_i^B \delta u_i^t dV + \int_{s_0} {}^{t+dt} f_i^S \delta u_i^t dS = 0 \quad (2)$$

여기서 (2)식에서  $f_i^B$ 와  $f_i^S$ 는 time 0에서부터 time  $t+dt$ 까지 (i)번째 외부에서 적용되어진 체적력 및 표면력이며  $du_i$ 는 (i)번째 가상 변위이다. 상태  $t+dt$ 의 Green Lagrange 성분은 다음과 같이 표현된다.[2]

$$\epsilon_{ij} = {}^{t+dt} \epsilon_{ij} + \epsilon'_{ij}$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial_0 {}^{t+dt} u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial_0 {}^{t+dt} u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial_0 {}^{t+dt} u_k}{\partial x_i} \frac{\partial_0 {}^{t+dt} u_k}{\partial x_j} \right] \quad (3)$$

(3)식에서 time 0인때의 상태에 대한 변형도  $\epsilon_{ij}$ 는 선형 변형도 성분,  $e_{ij}$ 와 비선형 변형도 성분,  $\eta_{ij}$ 로 나눌 수 있다[2].

$$\epsilon_{ij} = e_{ij} + \eta_{ij}$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial' u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \frac{\partial' u_k}{\partial x_j} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right] + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right] \quad (4)$$

강체운동(rigid-body motion)은 오기변위 효과 때문에 비선형 해석 과정에서 반드시 고려해야 한다. 따라서 강체회전(rigid-body rotation)에 불변인 응력성분인 2nd Piola-Kirchhoff 응력은 다음과 같이 표현된다[2].

$${}^{t+dt} S_{ij} = {}_0^t S_{ij} + S_{ij} \quad (5)$$

(5)식에서 time 0인때의 상태에 대한 trueshell 증분 응력의 성분은 다음과 같으며

$$S_{ij} = {}_0 C_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad (6)$$

${}_0^t S_{ij}$ 는 time  $t$ 인때 2nd Piola-Kirchhoff 응력성분이다. 이때 상태  $t+dt$ 의 변위성분은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$${}^{t+dt} u_i = {}_0^t u_i + u_i \quad (7)$$

이제 (3)식에서 부피 (7)식을 (1)식에 대입하여 정리하면 (8)식과 같다.

$$\int_{v_0} C_{ijkl} \delta_0^t \epsilon_{ij}^t dV + \int_{v_0} S_{ij} \delta_0^t \epsilon_{ij}^t dV = {}^{t+dt} R - \int_{v_0} {}_0^t S_{ij} \delta_0^t \epsilon_{ij}^t dV \quad (8)$$

2.3. 비선형경로에 대한 평형반복 및 수렴판정기준 구조요소의 변위자 초기에 zero 일 경우 증분하중 vector가 인정한 때 변위의 거동을 조사하는 Incremental Load Method를 적용하였으며 여기에 대부분의

비선형 유한요소문제를 해결하기 위하여 적용되는 iteration scheme으로써 SNR(Standard Newton-Raphson Method)를 병행하였다. 여기서 적용된 수렴판정 기준(convergence criteria)은 force와 displacement에 대해 모두 고려할 수 있도록 하였다[9]. 같은 current displacement가 적용될 때는 방정식의 개략적인 해를 구하기 위해  $\delta_0 \epsilon_{ij} = \delta_0 e_{ij}$ 라고 정의할 수 있다. 따라서 (8)식에 SNR을 적용하면 다음과 같이 표현할 수 있다[12].

$$\int_{v_0} C_{ijkl} \delta_0 e_{kl} \delta_0 \epsilon_{ij}^0 dV + \int_{v_0} {}_0^t S_{ij} \delta \Delta_0 \eta_{ij}^0 dV = {}^{t+dt} R - \int_{v_0} {}^{t+dt} S_{ij} (r-1) \delta^{t+dt} \epsilon_{ij} (r-)^0 dV \quad (9)$$

### 3. 유한 요소법의 적용

#### 3.1. 요소의 형상

원 요소의 기하학적인 형상은 Fig. 2에서와 같이 직교좌표계(cartesian coordinate system)를 전체좌표계로 하고 shell 요소의 중립면을 기준으로 하는 곡면좌표계는 곡선좌표계(curvilinear coordinate system)로 나타내며 하나의 요소는 8개의 절점을 가지도록 하였다. 이때 shell요소의 곡면을 원만히 표현하기 위하여 두께방향으로 선형적인  $\xi$ 와 중립면에 대해서는 곡선좌표계  $\xi, \eta$ 로 표현된 형상함수와 절점좌표로 요소의 형상을 정의하였고 각 절점의 자유도는 전체 좌표계 방향의 변위  $u, v, w$ , 와 중립면에 대하여 결정되는 곡선형좌표계의 평면방향 두 벡터에 관한 회전자유도  $\alpha, \beta$ 를 갖는다. 즉 요소는 외면이 굽은 형태이며 두께방향으로는 직선들로 이루어지 3차원 요소의 중립면을

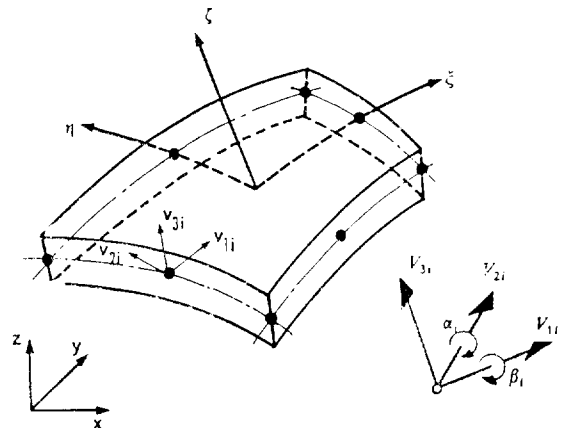


Fig. 2 Nodal degrees of freedom of degenerated shell element

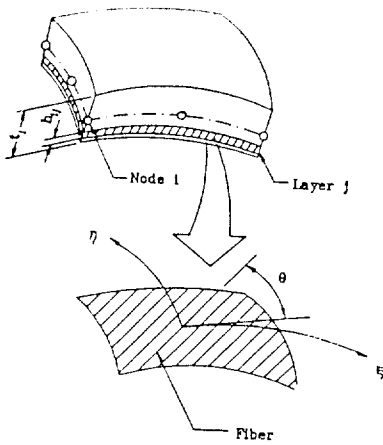


Fig. 3 The finite element model of laminated shell structure

기준으로 하는 격하요소(degenerated shell element)를 적용하였다[3, 4].

이 격하요소는 기본적인 가정을 바탕으로 하는데 그것은 다음과 같다.

a) 특별한 shell 이론에 관계없이 요소의 거동은 shell 요소의 중립면에 수직인 직선들은 변형중에도 직선을 유지한다.

b) 두께방향의 수직응력을 무시하고 각 절점에서 회전을 허용함으로써 두께방향의 전단변형을 고려할 수 있다는 것이다.

c) 적용된 복합재료(GFRP, CFRP)는 등방성이고 층간응력과 이와 관련된 적층구조의 파손은 무시하였다.

Laminate가 적층된 형상은 Fig. 3과 같으며 time  $t$  에서 임의의 layer의 각 절점의 좌표는 다음과 같이 된다.

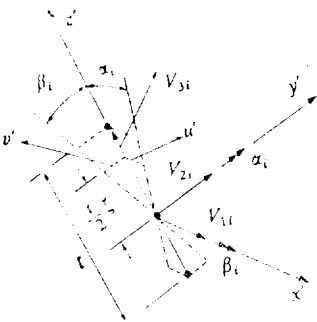


Fig. 4 Nodal vectors.

$$\begin{Bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) \begin{Bmatrix} x_i(t) \\ y_i(t) \\ z_i(t) \end{Bmatrix} + \frac{1}{2} \zeta \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) t_i V_{3i}(t) \quad (10)$$

(10)식에서  $V_{3i}$ 는 각 절점에서 계산된 shell 중립면에 대한 수직 vector이며  $t_i$ 는 두께이다. 또한  $N_i$ 는 shell 중립면의 곡면을 표현하기 위한 2차의 보간함수이다.

3.2. 변위 성분

본 해석의 격하요소는 isoparametric 요소이므로 좌표와 변위에 적용된 보간함수는 같다. 따라서 임의의 점에서 변위성분은 절점변위  $(u_i, v_i, w_i, \alpha_i, \beta_i)$ 들에 의해 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^8 N(\xi, \eta) \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix} + \frac{1}{2} \zeta \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) t_i [V_{3i}(t) - V_{3i}(0)] \quad (11)$$

$$u_i = x_i(t) - x_i(0), \quad du_i = x_i(t+dt) - x_i(t) \quad (12)$$

(12)식에 의해 변위증분식은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{Bmatrix} du \\ dv \\ dw \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) \begin{Bmatrix} du_i \\ dv_i \\ dw_i \end{Bmatrix} + \frac{1}{2} \zeta \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) t_i [V_{3i}(t+dt) - V_{3i}(t)] \quad (13)$$

여기서 시간이 0에서  $t$ 로 진행될때  $V_{3i}$ 는 Fig. 4에 나타낸 바와 같이 단위직선 벡터  $V_{1i}$ 와  $V_{2i}$ 에 대한 증분회전량을  $d\alpha_i, d\beta_i$ 라고 할때 다음과 같이 근사적으로 나타낼 수 있다[5].

$$V_{3i}(t+dt) = V_{3i}(t) - (V_{2i}(t)d\beta_i - V_{1i}(t)d\alpha_i) \\ V_{3i}(t+dt) - V_{3i}(t) = V_{1i}(t)d\alpha_i - V_{2i}(t)d\beta_i \quad (14)$$

두께방향과 절점회전자유도의 기준을 위하여 극부과 포계의 단위 vector  $V_{1i}, V_{2i}, V_{3i}$ 를 정의할 필요가 있다. 절점  $i$ 에서  $\xi, \eta$  각각의 방향에 대한 단위벡터를  $S_i, T_i$ 라 하고  $A_i(X_i, Y_i, Z_i)$ 를 위치 벡터라 할때

$$A_i = X_i e_{1i} + Y_i e_{2i} + Z_i e_{3i} \quad (15)$$

$$S_i = \frac{\partial A_i}{\partial \xi} = \left[ \frac{\partial X_i}{\partial \xi} e_{1i} + \frac{\partial Y_i}{\partial \xi} e_{2i} + \frac{\partial Z_i}{\partial \xi} e_{3i} \right] \\ = \sqrt{\left[ \frac{\partial X_i}{\partial \xi} \right]^2 + \left[ \frac{\partial Y_i}{\partial \xi} \right]^2 + \left[ \frac{\partial Z_i}{\partial \xi} \right]^2}$$

$$T_i = \frac{\partial A_i}{\partial \eta} / \left\| \frac{\partial A_i}{\partial \eta} \right\|$$

$$= \frac{\frac{\partial X_i}{\partial \eta} e_{1i} + \frac{\partial Y_i}{\partial \eta} e_{2i} + \frac{\partial Z_i}{\partial \eta} e_{3i}}{\sqrt{\left[ \frac{\partial X_i}{\partial \eta} \right]^2 + \left[ \frac{\partial Y_i}{\partial \eta} \right]^2 + \left[ \frac{\partial Z_i}{\partial \eta} \right]^2}} \quad (16)$$

$$V_{3i}(t) = \frac{S_i \times T_i}{\|S_i \times T_i\|} \quad (17)$$

$$V_{2i}(t) = V_{3i}(t) \times V_{1i}(t) = \frac{S_i \times T_i}{\|S_i \times T_i\|} \times T_i$$

at  $V_{1i}(t) = T_i$  (18)

$$V_{1i}(t) = V_{2i}(t) \times V_{3i}(t) = T_i \times \frac{S_i \times T_i}{\|S_i \times T_i\|}$$

at  $V_{2i}(t) = T_i$

(17), (18)식에서  $V_{1i}$ ,  $V_{2i}$ ,  $V_{3i}$ 는 절점  $i$ 에서 유일한 단위직교 벡터이다. 여기서 (13)식과 (14)식에 의해 변위증분은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{Bmatrix} du \\ dv \\ dw \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) \begin{Bmatrix} du_i \\ dv_i \\ dw_i \end{Bmatrix}$$

$$+ \frac{1}{2} \zeta \sum_{i=1}^8 N_i(\xi, \eta) t_i [ V_{1i}(t) d\alpha_i - V_{2i}(t) d\beta_i ] \quad (19)$$

### 3.3. 좌표 변환

원 요소를 해석하기 위해서 요소형상을 정의하기 위하여 3.1의 가정에 의해 국부좌표계가 정의되고 전체 좌표계 사이의 관계를 정의하여야 한다.

$$[J] = \begin{Bmatrix} S \\ T \\ N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} \quad (20)$$

(20)식은 Jacobian 행렬로서  $S$ 와  $T$ 는  $\zeta$ 가 일정한 면에 대하여 각각  $\xi$ 와  $\eta$ 방향의 접선 벡터이며  $N$ 은 각 절점에서 수직 벡터를 보간한 값이다. 이때 복합재료는

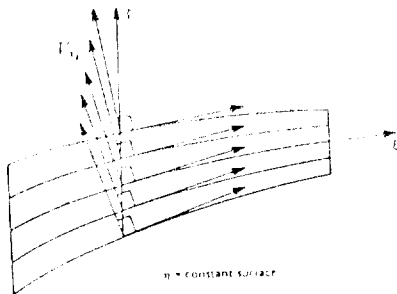


Fig. 5 Lamina coordinate systems along a fiber

적층구조이므로 Fig. 5와 같이 각 단층의 수직 벡터는  $\zeta$ 와 일치하지 않는다. 따라서 각 단층의 접면과 전체 좌표계사이에 좌표변환행렬이 요구되며 이러한 좌표변환행렬은 3.2에서 구한 각 절점의 단위 벡터의 계산과 동일한 방식으로 얻을수 있다.  $x'$ 를 표면위의 임의의 점에서 수직한 축이며 그 표면의 접선방향축을  $x', y'$ 라고 할때 단위직교 벡터들은 (18)식과 똑같이 구해진다[6].

$$V_n = \begin{cases} S \times T & \text{if } V_s = T, \quad V_t = V_n \times V_s \\ \|S \times T\| & \text{if } V_t = T, \quad V_s = V_t \times V_n \end{cases}$$

따라서 임의의 점에서 좌표변환행렬은 다음과 같다.

$$[\theta] = \begin{Bmatrix} V_{sx} & V_{tx} & V_{nx} \\ V_{sy} & V_{ty} & V_{ny} \\ V_{sz} & V_{tz} & V_{nz} \end{Bmatrix} \quad (21)$$

$$\begin{Bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{Bmatrix} = [\theta] \begin{Bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} du \\ dv \\ dw \end{Bmatrix} = [\theta] \begin{Bmatrix} du' \\ dv' \\ dw' \end{Bmatrix} \quad (22)$$

### 3.4. 변형도-변위 관계

전체좌표계에서 Green-Lagrangian strain을 고려하면 다음과 같다[5].

$$\{\epsilon\} = \{\epsilon_x \ \epsilon_y \ \epsilon_z \ \gamma_{yz} \ \gamma_{zx} \ \gamma_{xy}\} = \{\epsilon_L\} + \{\epsilon_{NL}\} \quad (23)$$

$$\{\epsilon_L\} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix} \{\phi\} = [H_L] \{\phi\} \quad (24)$$

$$\{\epsilon_{NL}\} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \Phi_T^x & 0 & 0 \\ 0 & \Phi_T^y & 0 \\ 0 & 0 & \Phi_T^z \\ 0 & \Phi_T^x & \Phi_T^y \\ \Phi_T^x & 0 & \Phi_T^z \\ \Phi_T^y & \Phi_T^x & 0 \end{Bmatrix} \{\phi\} = \frac{1}{2} [H_{NL}] \{\phi\} \quad (25)$$

$$\{\phi\} = \{\phi_x \ \phi_y \ \phi_z\}^T; \quad \{\phi_x\}^T = \{u_x \ v_x \ w_x\}$$

$$\{\phi_y\}^T = \{u_y \ v_y \ w_y\} \quad (26)$$

$$\{\phi_z\}^T = \{u_z \ v_z \ w_z\}$$

(24)식과 (25)식을 변분하면

$$d\{\epsilon_L\} = [H_L] d\{\phi\} = [H_L] [G] d\{\delta\} = [B_L] d\{\delta\} \quad (27)$$

$$d\{\epsilon_{NL}\} = \frac{1}{2} [H_{NL}] d\{\phi\} + \frac{1}{2} d[H_{NL}] \{\phi\}$$

$$= [H_{NL}] d\{\phi\} = [H_{NL}] [G] d\{\delta\}$$

$$= [B_{NL}] d\{\delta\} \quad (28)$$

(27)식과 (28)식을 (23)식에 대입하면

$$d\{\epsilon\} = [B] d\{\delta\};$$

$$[B] = [B_L] + [B_{NL}] = [[H_L] + [H_{NL}]] [G] \quad (29)$$

$$\begin{Bmatrix} uvw \\ xyz \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} [a_1] \\ [a_2] \\ [a_3] \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \{S_x\} \\ \{S_y\} \\ \{S_z\} \end{Bmatrix} \quad (30)$$

$$[J]^{-1} = \begin{Bmatrix} [a_1] \\ [a_2] \\ [a_3] \end{Bmatrix}; \begin{Bmatrix} \{S_x\} \\ \{S_y\} \\ \{S_z\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} & \frac{\partial u}{\partial \eta} & \frac{\partial u}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial v}{\partial \xi} & \frac{\partial v}{\partial \eta} & \frac{\partial v}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial w}{\partial \xi} & \frac{\partial w}{\partial \eta} & \frac{\partial w}{\partial \zeta} \end{Bmatrix}^T$$

$[a_j]$ 는  $[J]^{-1}$ 의 行벡터로 구성된다. 여기서  $\{S_k\}$ 의 변분을 취하면 다음과 같다.

$$d\{S_k\} = \sum_{i=1}^8 \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ 0 \end{Bmatrix} du_{ki} + \frac{l_i}{2} \sum_{i=1}^8 \begin{Bmatrix} \zeta \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \zeta \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ N_i \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial F_{ki}}{\partial \alpha_i} \\ \frac{\partial F_{ki}}{\partial \beta_i} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} d\alpha_i \\ d\beta_i \end{Bmatrix} \quad (31)$$

(31)식에서  $k=x, y, z$ 이며  $F_{ki} = \{V_{1i}\alpha_i - V_{2i}\beta_i\}_k$ 이다.

$$d\{\phi\} = \begin{Bmatrix} [a_1] d\{S_x\} \\ [a_1] d\{S_y\} \\ [a_1] d\{S_z\} \\ [a_2] d\{S_x\} \\ [a_2] d\{S_y\} \\ [a_2] d\{S_z\} \\ [a_3] d\{S_x\} \\ [a_3] d\{S_y\} \\ [a_3] d\{S_z\} \end{Bmatrix} = [G] d\{\delta\} \quad (32)$$

여기서  $d\{\delta\}^T = \{du_i, dv_i, dw_i, d\alpha_i, d\beta_i\}$ 이다. 국부좌표계와 전체좌표계에 대한 strain 성분을 좌표변환 행렬  $[\theta]$ 로 나타낼 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u'}{\partial x'} & \frac{\partial v'}{\partial x'} & \frac{\partial w'}{\partial x'} \\ \frac{\partial u'}{\partial y'} & \frac{\partial v'}{\partial y'} & \frac{\partial w'}{\partial y'} \\ \frac{\partial u'}{\partial z'} & \frac{\partial v'}{\partial z'} & \frac{\partial w'}{\partial z'} \end{Bmatrix} = [\theta]^T \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{Bmatrix} [\theta]$$

$$= [\theta] [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} & \frac{\partial v}{\partial \xi} & \frac{\partial w}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} & \frac{\partial v}{\partial \eta} & \frac{\partial w}{\partial \eta} \\ \frac{\partial u}{\partial \zeta} & \frac{\partial v}{\partial \zeta} & \frac{\partial w}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} [\theta] \quad (33)$$

### 3.5. 복합적층구조의 응력-변형도 관계식

복합적층구조는 여러단층들로 구성되어 있고 각 단층들은 횡등방성(Transversely isotropic)을 가진다고 가정할 수 있다. 한 단층의 재료주축 방향에 대한 응력-변형도 관계식을 나타내면 다음과 같다[7].

$$d\{\sigma\} = [C^*] d\{\varepsilon\} \quad (33)$$

$$[C^*] = \begin{Bmatrix} \frac{1-\nu_{23}\nu_{32}}{E_2 E_3 d} & \frac{\nu_{12} + \nu_{32}\nu_{13}}{E_1 E_3 d} & \nu_{13} + \nu_{12}\nu_{23} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1-\nu_{13}\nu_{31}}{E_1 E_3 d} & \frac{\nu_{23} + \nu_{12}\nu_{13}}{E_1 E_2 d} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{1-\nu_{12}\nu_{21}}{E_1 E_2 d} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \text{Sym} & & G_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & & & G_{23} & 0 & 0 \\ & & & & G_{31} & 0 \end{Bmatrix} \quad (34)$$

$$[d] = \frac{1-\nu_{12}\nu_{21}-\nu_{23}\nu_{32}-\nu_{31}\nu_{13}-2\nu_{12}\nu_{21}\nu_{13}}{E_1 E_2 E_3}$$

복합적 련 구조에서 모강섬유는 공간적인 방향을 가지므로 Fig. 3과 같이 각 요소의 각 단층에 대하여 집면상에서의  $\xi$ 축과  $\theta$ 의 각도를 가지므로 재료주축 방향 물성치를 기준좌표면으로 나타내기 위해 응력-변형도 관계식의 강성행렬을 좌표변환 시켜야한다.

$$[C] = [T]^T [C^*] [T] \quad (35)$$

$$[T] = \begin{Bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & 0 & -\sin 2\theta & 0 & 0 \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & 0 & \sin 2\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\sin 2\theta & -\frac{1}{2}\sin 2\theta & \cos 2\theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{Bmatrix} \quad (36)$$

련 두개방향의 수직응력을 무시할만큼 작다는 가정에 의하여 국부좌표계에서 수직변형도를 소거하므로써  $x, y$ 평면에 대한 reduced stiffness  $[Q]$ 는 다음과 같다 [8].

$$[Q] = Q_{kl} = C_{ij} - \frac{C_{i3} \times C_{j3}}{C_{33}}$$

$$\begin{matrix} k, l = i & (\text{at } i, j \leq 3) \\ k = i-1 \\ l = j-1 & (\text{at } i, j > 3) \end{matrix} \quad (37)$$

본 해석의 적층구조는 각 단층들이 완전히 결합되어 단일구조요소의 특성을 나타낸다. 이때 해석하고자하는 적층구조가 대칭적층인 경우 고전적층이론(C.L.T.; classical laminated theory)에 의해 하나의 강성을 갖는다[7].

$$Q_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (Q_{ij})_k (\zeta_3^k - \zeta_3^{k-1}) \quad (\text{at } i, j = 1, 2, 3)$$

$$Q_{ij} = (\zeta_k - \zeta_{k-1}) Q_{ij} \quad (\text{at } i, j = 4, 5) \quad (38)$$

### 3.6. 유한요소 행렬식

(8)식과 (9)식의 비선형공식을 하나의 요소에 대하여 전체좌표계의 유한요소 행렬식으로 나타내면 다음과 같다[1, 2].

$$\int_{\nu} {}_0C_{ijk} \delta_0 e_{kl} \delta_0 e_{ij}^0 dV$$

$$= \left\{ \int [B_L]^T [Q] [B_L] dV \right\} \Delta U \quad (39)$$

$$\int_{\nu} {}_0^t S_{ij} \delta_0 \Delta \gamma_{ij}^0 dV$$

$$= \left\{ \int [B_{NL}]^T [S] [B_{NL}] dV \right\} \Delta U \quad (40)$$

$${}^{t-t_0} R - \int_{\nu} {}^{t-t_0} S_{ij} {}^{t-t_0} \delta_{ij} {}^{t-t_0} \epsilon_{ij}^0 dV$$

$$= [R] - \left\{ \int [B_L]^T [S] dV \right\} \quad (41)$$

위의 식에서  $[S]$ ,  $\{S\}$ 는 다음과 같다.

$$[S] = \begin{Bmatrix} \sigma_x I_3 & & \text{sym} \\ \tau_{xy} I_3 & \sigma_y I_3 & \\ \tau_{xz} I_3 & \tau_{yz} I_3 & \sigma_z I_3 \end{Bmatrix};$$

$$\{S\} = \{\sigma_x \sigma_y \tau_{xy} \tau_{xz} \tau_{yz} \sigma_z\}^T$$

위 식들을 다시 정리하면

$$\{[K_L] + [K_{NL}]\} \Delta U = {}^{t-t_0} R - {}_0^t F \quad (42)$$

### 3.7. 수치 적분

요소 강성행렬을 구하기 위한 적분식은 Gaussian quadrature를 이용하는데 각 단층들이 서로 다른 방향성을 갖기 때문에  $\zeta$ 가 일정한 면에서 각 단층들의 수직 벡터가 균일하지 않다는 것은 앞에서도 밝혔다. 이러한 적층효과를 고려하기 위해  $\zeta_k$  좌표를 지정하고  $-1$ 에서  $+1$ 까지 변화하도록 하였을 때  $K$ 번째 단층의  $\zeta$  좌표는 다음과 같다[4].

$$\zeta = -1 + h_k(\zeta_k - 1) + 2 \sum_{j=1}^k h_j/t \quad (43)$$

$$d\zeta = (h_k/t) d\zeta_k, \quad t : \text{층두께}$$

$$h_j : j \text{th 층의 두께}$$

여기의 두께방향적분은 각단층의 합으로 이루어진다.

$$\sum_{k=1}^n \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 F(\xi, \eta, \zeta) \det[J] (h_k/t) d\xi d\eta d\zeta \quad (44)$$

$n$  : 총 적층의 수

$\det[J]$  : Jacobian matrix의 행렬식

### 3.8. Failure Criteria

복합재료 구조물 설계시 가장 많이 이용되는 파손조건식은 최대응력선, 최대변형도선과 2차항 조건식이 있는데 적층되는 각 단층은 기준 좌표계와 각도를 가지므로 응력과 변형도의 좌표변환 과정을 통해서 laminate-axis criterion을 구할수 있다. 비선형해석일 경우 FPF와 LPF 그리고 극한설계를 적용할수 있다. 단층의 각도변화에 따라 응력과 변형도는 quadratic criterion인데 같은  $R$ (strength/stress ratio)를 갖는다는 특징이 있으므로 응력에 관한 quadratic criterion을 고려

하면 다음과 같다[8].

$$F_{xx} = 1/XX' \quad F_{yy} = 1/YY'$$

$$F_x = (1/X) - (1/X') \quad F_y = (1/Y) - (1/Y')$$

$$F_{ss} = (1/S^2) \quad F_{xy} = F_{*xy} [F_{xx} F_{yy}]^{0.5} \quad (45)$$

재료가 T300/N5208 일 경우  $F_{*xy} = -0.5$ 이고 해석하고자하는 쉘의 반경/두께 비가 0.1이하일 경우 matrix의 degradation factor를 무시하여도 물리적으로 차이가 없다.

$$[F_{ij} \nu_i \nu_j] R^2 + [F_i \nu_i] R - 1 = 0 \quad (46)$$

$$aR^2 + bR - 1 = 0 \quad (a = \nu_i \nu_j, b = F_i \nu_i)$$

$$R = -(b/2a) + [(b/2a)^2 + 1/a]^{0.5} \quad (47)$$

$R$ 이 음의 값을 가질 경우 절대값을 취하며 이때는 구조요소에 작용하는 작용응력의 모든 값은 반대부호를 갖는다.  $R > 1$ 일 경우 파손이 발생하지 않은 상태이며  $R = 1$ 인 경우 파손이 발생한 상태이다. 이때  $R < 1$ 인 경우 물리적으로 의미가 없는 상태로서 파손이 일어난 곳에 계속하중을 가한 것이 되므로 적층수를 증가시켜야 한다. 실제  $R$ 의 값은 구조물 설계시 중요한 인자로 활용된다[8].

## 4. 결과 분석 및 고찰

### 4.1. 프로그램의 설명 및 검증

본 해석에서는 복합적층 쉘의 선형 및 비선형 해석을 위해 앞에서 전개한 이론을 바탕으로 하여 Fortran으로 작성하였으며 프로그램의 크기는 3642행이며 사용된 컴퓨터 기종은 SUN3/60 Micro Workstation이다[9].

본 해석의 프로그램에 의한 복합적층된 쉘의 비선형 해석과정의 타당성을 위해 등방성을 갖는 재료에 대해 검증하여 보았다. Fig. 6에서와 같이 경계조건이 직선 경계는 단순지지이고 곡선경계는 자유단인 경우 집중하중을 받을때 중앙부 처짐에 대한 비선형해석을 수행한 결과는 [12]의 결과와 거의 일치하였으나 일부 하중 구간에서 오차를 보이고 있는 점은 변위중분법과 여기서 사용한 하중중분법에 따른 해석의 차이로 이해된다. Fig. 7에서와 같이 모든 경계가 고정이고 균일한 외압이 적용될 때 하중중분단계가 1.5 kg/mm<sup>2</sup> 이전에는 일치하나 그 이후에는 오차가 발생한것을 볼 수 있다. 그 이유는 [13]의 비선형 해석과정성이 updated Lagrangian의 해석 방법에서 오는 결과라기 보다는 해석과정의 임의의 하중단계에서 변위의 크기에 따라 하중의 크기가 결정되는 자동하중중분법을 적용하여 좌굴거동

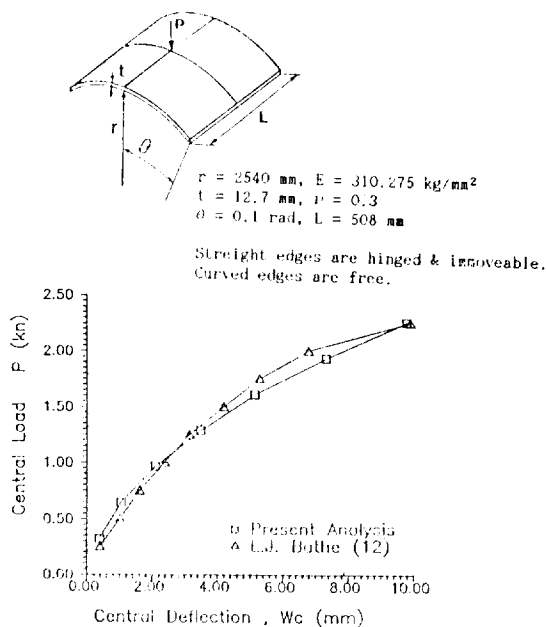


Fig. 6 A cylindrical shell subjected to concentrated load

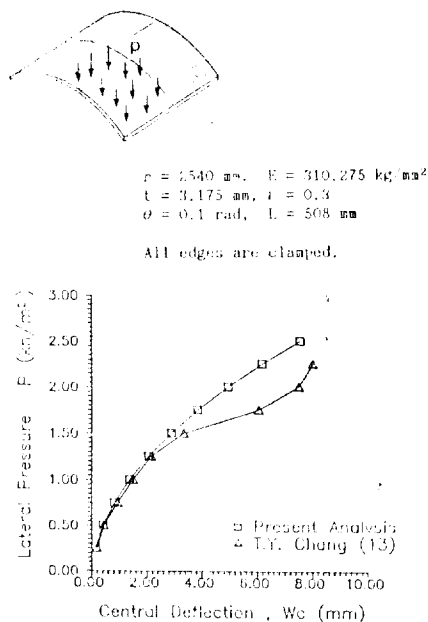


Fig. 7 A cylindrical shell subjected to uniform pressure

을 예측하기 위한 것이었다. 그러나 본 논문의 해석 방법은 변위의 크기에 상관없이 일정하게 하중을 증가시키는 하중증분법을 사용하여 내압 또는 외압이 적용되었을때 최적의 적층구조를 갖는 압력용기를 얻기 위함이기 때문에 갑작스런 변위증가를 나타내는 좌굴거동을 해석하기에는 부적합하다.

위 예제의 검증에서 중요한 점은 적용된 8절점 요소는 전단변형을 고려한 수식에 의거하므로 두꺼운 구조의 유한요소 모형은 좋은 결과를 나타내나 구조가 얇을 경우 실제로 존재하지 않는 두께방향 전단응력성분에 의해 요소의 강성이 너무크게 되어 횡하중에 의한 처짐이 작게 나타난다. 따라서 강성행렬 계산을 위한 수치적분에서 적분점수를 줄이는 감작적분(reduced integration;  $2 \times 2 \times 2$ )으로 수행하였다[10, 14].

4.2. 해석 모델의 물성치 및 형상

해석 모델은 Glass/Polyester과 T300/N5208이머 결과를 비교하기 위하여 전자를 선형해석에 적용하였고 후자를 비선형해석에 적용하였다. 위 두가지 재료의 물성치는 Table 1과 Table 2에 나타내었다. 해석 모델의 형상은 원통의 일부분을 이용하였으므로 Fig. 8에 나

Table 1 Material properties & geometric conditions

$E_1 = 5329.5 \text{ kg/mm}^2$	$E_2 = E_3 = 1598.2 \text{ kg/mm}^2$
$G_{12} = G_{23} = G_{31} = 683.4 \text{ kg/mm}^2$	
$\nu_{12} = \nu_{23} = \nu_{31} = 0.292$	
Layer thickness = 0.125mm	
Layer numbers = 24	
Radius $r = 200 \text{ mm}$	Length $L = 100 \text{ mm}$
Theta $\theta = 11.25^\circ$	Thickness $t = 3 \text{ mm}$
$r/(r-t) = 1.0152$	

(Model I)

Table 2 Material properties & geometric conditions

$E_1 = 18423 \text{ kg/mm}^2$	$E_2 = E_3 = 10484 \text{ kg/mm}^2$
$G_{12} = G_{23} = G_{31} = 7297 \text{ kg/mm}^2$	
$\nu_{12} = \nu_{23} = \nu_{31} = 0.28$	
Layer thickness = 0.125mm	
Layer numbers = 4	
Radius $r = 21 \text{ mm}$	Length $L = 8 \text{ mm}$
Theta $\theta = 15^\circ$	Thickness $t = 0.5 \text{ mm}$
$r/(r-t) = 1.0244$	

(Model II)



**Table 3** 7 case of laminated structures (simply supported)

		2A	2B	2C	2D	3A	3B	3C	
[11]	$\epsilon_x$	0.94	1.17	0.58	1.72	0.62	0.82	1.72	%
	$\epsilon_y$	2.53	2.14	2.59	1.72	2.82	2.41	1.72	%
Present analysis	$\epsilon_x$	0.99	1.01	0.62	1.81	0.58	1.34	1.68	%
	$\epsilon_y$	2.65	2.60	2.74	1.83	3.63	2.32	1.92	%
2A=[0° <sub>12</sub> /90° <sub>12</sub> ]		2B=[0° <sub>8</sub> /90° <sub>16</sub> ]		2C=[54.7° <sub>12</sub> /-54.7° <sub>12</sub> ]		2D=[73° <sub>12</sub> /-73° <sub>12</sub> ]			
3A=[0° <sub>8</sub> /60° <sub>8</sub> /-60° <sub>8</sub> ]		3B=[45° <sub>8</sub> /-45° <sub>8</sub> /90° <sub>8</sub> ]		3C=[60° <sub>4</sub> /-60° <sub>4</sub> /90° <sub>16</sub> ]					

**Table 4** Comparison of maximum deflection (simply supported) (mm)

	2A	2B	2C	2D	2E*	3A	3B	3C	4A
$\delta_{max}$	6.759	6.699	5.175	6.026	5.157	5.908	5.713	5.722	5.602

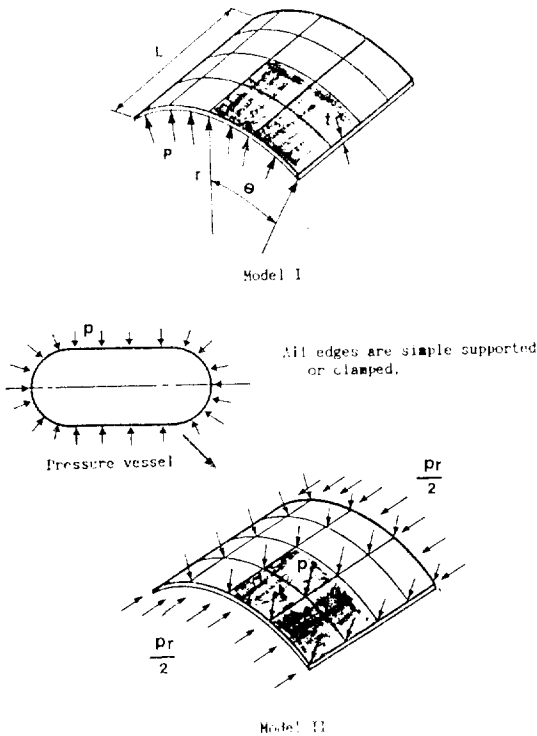
4A=[90°/0°<sub>6</sub>/9°<sub>6</sub>/-45°<sub>6</sub>/45°<sub>6</sub>]  
 \* 2E=[50°<sub>12</sub>/-50°<sub>12</sub>]  
 \* For the case of [50°/-50°]<sub>12</sub>,  $\delta_{max}$ =4.664mm

다녔었다. 실제 기하학적으로 대칭이라고 보았을 때 유한 요소법의 계산에 적용된 부분은 전체 형상의 1/4만을 선택하여 해석하였으며 이때 경계조건이 단순지지인 때와 고정지지 일때를 모두 고려하였다. 여기서

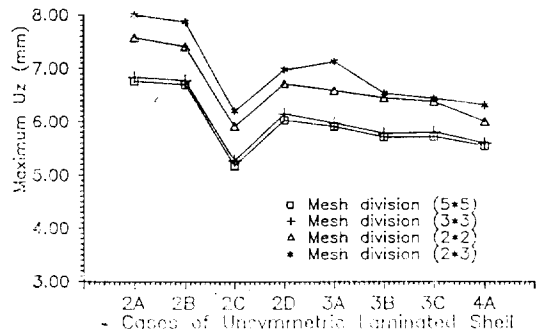
Model II는 외압 P에 대한 압력용기 일때 원통형 shell은 축방향으로 투영된 하중이 작용한다고 보고 축방향으로 Pr/2을 적용하였다.

**4.3. 해석결과와 고찰**

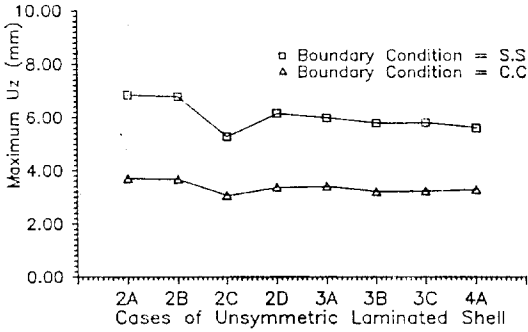
적용된 복합재료가 Glass/Polyester이며 구조요소가 내압만을 받을 경우에 대하여 선형해석을 수행하였다. Table 3에서와 같이 각 단층의 각도와 두께에 따른 7가지의 적층구성에 대하여 Fig. 8의 전체형상에 대한 선형해석 결과를 고려하여 볼때 [11]과 일치함을 볼수 있다. [11]의 7가지 적층구성과 [15], [16]에서 얻어진 최적의 적층구조 [90°/0°-45°/45°]로서 대칭 적층으로 C.L.T를 적용하여 산출된 적층구조를 4A라고 하였을때, Fig. 9에서 각 적층구조에 대한 유한요소법의 요소수 증가에 따른 수렴효과를 볼 수 있으며 여기서 4A [90°/0°/-45°/45°]는 비대칭 적층구조이다. 비대칭 적층구조일때 경계조건에 따른 해석 결과는



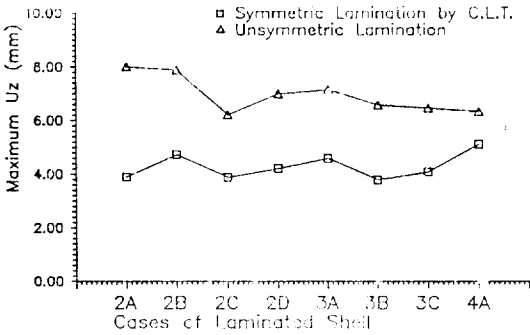
**Fig. 8** Geometry, boundary condition and loading type of laminated cylindrical shell



**Fig. 9** Convergence of mesh division



**Fig. 10** Maximum displacement according to boundary condition at internal pressure ( $p=1.5\text{kg/mm}^2$ ) (model I)

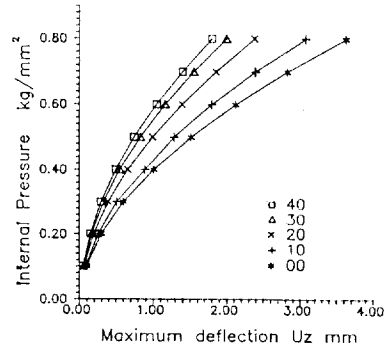


**Fig. 11** Comparison of unsymmetric and symmetric laminated shell (model I)

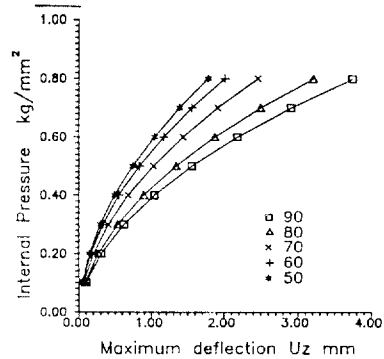
Fig. 10에서 볼수있는데 2C[54.7°<sub>12</sub>/-54.7°<sub>12</sub>]가 최소 변위를 나타내고 2A[0°<sub>12</sub>/90°<sub>12</sub>]가 최대변위를 가짐을 알수 있었으며 4A는 2C 다음으로 좋은 결과를 보여주고 있다. Fig. 11은 8가지의 적층구조 모두를 대칭적층으로 놓고 C.L.T를 적용한 결과를 보여주는데 4A는 나머지 적층구조와 비교하여 좋은 적층 구조가 아님을 알 수 있다.

다음으로 적용된 복합재료가 T300/N5208이며 적층 구성이  $[\theta^\circ/-\theta^\circ]$ 인 경우 외압 그리고 외압과 동시에 축하중을 받을때  $\theta$ 를 0°에서 90°까지 10°간격으로 변화시키면서 비선형 해석을 수행하였고 여기에 failure criteria를 적용하였다. Fig. 12와 Fig. 13에 그 비선형해석결과를 나타내었는데 [50°/-50°]가 같은 변위 상태에서 보다 큰 외압을 받을수 있음을 알 수 있다 [8]. 순수한 외압만을 받을때와 외압과 동시에 축하중을 받을 때 0°에 대한 각 각도에서 변위의 비를 비교한 것은 Fig. 14에 보였다. 그 결과 복합하중인 경우

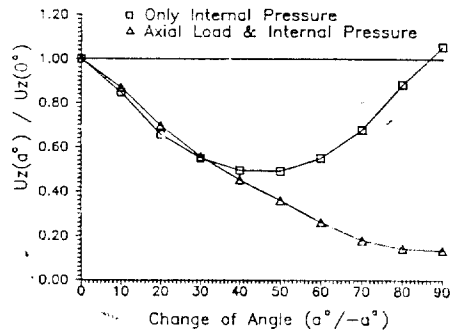
90°로 적층되었을 때 가장 좋은 적층구조임을 알수 있었다. Failure가 발생하였을 때 FPF와 LPF에 관계없이 외압만을 받을 경우 40°에서 50°의 적층구조가 최소 변위비를 갖고 복합하중일 경우 80°에서 90°의 적층구조가 최소변위비를 가짐을 Fig. 15와 Fig. 16을



**Fig. 12** Effect of nonlinear analysis by changing of fiber angle at external pressure (model II)



**Fig. 13** Effect of nonlinear analysis by changing of fiber angle at external pressure (model II)



**Fig. 14** The deflection ratio according to loading type (model II)

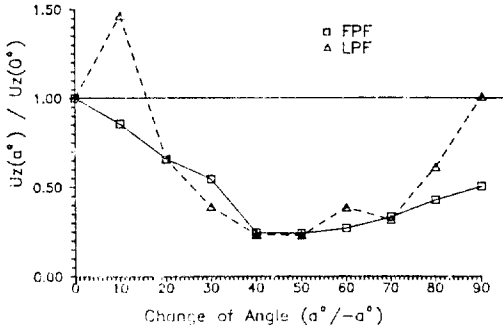


Fig. 15 The deflection ratio at failure (external pressure only; model II)

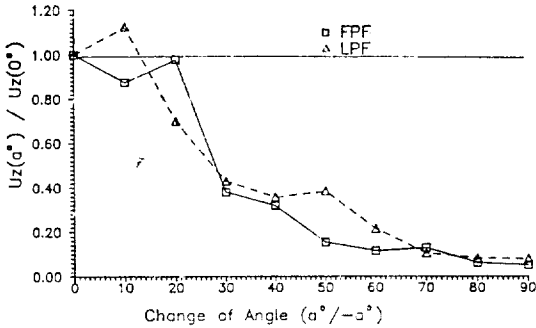


Fig. 16 The deflection ratio at failure (external pressure & axial load; model II)

통해 알 수 있다. Model II의 비선형 해석결과 외압만을 받을 때의 최적구조인  $[50^\circ / -50^\circ]$ 의 경우를 2E  $[50^\circ_{12} / -5^\circ_{12}]$ 라 하여 Model I의 선형해석을 수행한 결과 2E가 9가지 적층구조 중에서 최적구조임을 Table 4에 나타내었다. 또한 적층구조  $[50^\circ / -50^\circ]_{12}$ 에 대해 같은 계산을 수행한 결과 2E와 비교하여 보다 작은 변위를 갖는다는 점으로 보아 압력용기를 설계할 때  $[\theta^\circ / -\theta^\circ]_n$  적층구조가 최적구조임을 알 수 있었다.

### 5. 결 론

본 해석에서는 균일한 압력을 받을 때 각도변화에 따른 적층순서를 갖는 얇은 원통형 shell의 최적구조를 얻기 위해 유한 요소법으로 선형 및 비선형 해석을 수행하였으며 그 결과는 다음과 같다.

1) 24층으로 적층된 원통형 shell(Model I)의 선형 해석 결과 균일한 내압을 받을 경우  $[50^\circ / -50^\circ]$ 의 적

층구조가 최적구조이다.

2) 4층으로 적층된 원통형 shell(Model II)의 비선형 해석을 수행함과 동시에 failure criteria를 적용하였을 때 외압만을 받을 경우  $[50^\circ / \sim 50^\circ]$ , 복합하중을 받을 경우  $[90^\circ / 90^\circ]$ 의 적층구조가 최적구조이다.

3) Shell 구조에서는  $[\theta^\circ_n / -\theta^\circ_n]$ 의 적층구조보다  $[\theta^\circ / -\theta^\circ]_n$ 의 적층구조가 우수하다.

본 해석의 선형 및 비선형해석은 최적구조를 찾는 데는 유용하지만 실제 임의의 하중단계에서 재질적인 붕괴보다 더 중요한 좌굴붕괴를 정확히 예측하고 두께가 두꺼운 구조의 최적구조 예측을 위해선 보다 정교한 비선형수식의 해석방법에 대한 검토가 요구된다.

### Reference

- [1] K.J. Bathe, "Finite Element Procedures in Engineering Analysis", Prentice Hall, 1987.
- [2] B. Brendel & E. Ramn, "Linear and Nonlinear Stability Analysis of Cylindrical Shells", Computer & Structures Vol.12 pp.549-558, 1980.
- [3] L.R. Calcote, "The Analysis of Laminated Composite Structures", Van Nostrand Reinhold, 1969.
- [4] E. Hinton & D.R.J. Owen, "Finite Element Software for Plate and Shell", Pineridge Press, 1984.
- [5] K.S. Surana, "Geometrically Nonlinear Formulation for The Curved Shell Element", *Int. J. Num. Meth. in Eng.*, Vol.19, 581-615, 1983.
- [6] J.R. Hughes, "The Finite Element Method", Prentice Hall, 1987.
- [7] R.M. Jones, "Mechanics of Composite Materials", McGraw Hill, 1975.
- [8] S.W. Tsai, "Composite Design 4th edition", Think Composites, 1987.
- [9] O.C. Zienkiwicz, "The Finite Element Method 3rd edition", McGraw Hill, 1977.
- [10] S.M. Jun & C.S. Hong, "Buckling Behavior of Laminated Cylindrical Panels under Axial Compression", Computer & Structures, Vol.29, No. 3 pp.479-490, 1988.
- [11] G.W. Ehrenstein, "Glasfaserverstärkte Kunststoffe", Kontakt & Studium Band 62, 1981.
- [12] K.J. Bathe & S. Bolouchi, "A Geometric and

- Material Nonlinear Plate and Shell Element", *Computer & Structures*, Vol. 11, pp. 23-48, 1980.
- [13] T.Y. Chang & K. Sowamiphakdi, "Large Deformation Analysis of Laminated Shells by Finite Element Method", *Computer & Structures*, Vol. 13, pp. 331-340, 1981.
- [14] O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor & J.M. Too, "Reduced Integration Technique in General Analysis of Plate and Shell", *Int. J. Numerical Meth. in Eng.*, Vol. 3, pp. 275-290, 1971.
- [15] 강효승, "복합적층판의 굽힘 및 층간응력의 해석", 인하대학교 대학원 석박공학과 공학석사 학위논문, 1988.
- [16] 김학필, "보강된 복합적층판의 좌굴강도 해석", 인하대학교 대학원 석박공학과 공학석사 학위논문, 1988.