

무한공간 전자장 해석을 위한 유한 및 경계요소합성법

신 판 석

(한국전기연구소 전력기기 연구실)

1. 개 요

1960년대 기계·토목분야에서 응력계산을 하기 위하여 유한요소법이 도입된 이래, 전기분야에서도 기존의 여러가지 수치해석 방법과 더불어 유한요소법이 광범위하게 사용되어 왔다. 여러가지 수치해석방법, 즉 유한요소법, 경계요소법, 유한차분법(finite difference method), moment법 등이 개발되고 이용되어 왔으나 각 방법은 특유한 해석법을 사용하므로 각기 장점과 단점을 지니고 있기 때문에 주어진 미분방정식의 해를 가장 경제적으로 구하는 방법을 선택한다는 것은 쉬운 일이 아니다. 이러한 어려움을 극복하기 위해서 주어진 문제에 대한 방정식의 구성(formulation)뿐만 아니라 해를 구하는 데 있어서도 여러가지의 기법들이 사용되고 있다. 해석방법은 보통 주어진 문제의 형태, 즉 경계영역, 문제의 기하학적 구조, 재질의 특성, 정전계, 또는 동특성문제 등에 따라서 해석기법이 선택되어진다.

많은 전자장 문제들이 경계가 없는 무한영역 형태를 이루고 있으며 이러한 문제들을 해결하기 위해서 다양한 기법들 즉 무한영역 유한요소법[1-2], 경계요소법[3-5], infinitesimal scaling method[6-7], 합성기법[8-13] 등이 개발되어 왔다. 본 소고에서는 합성기법의 하나인 유한 및 경계요소 합성법을 소개하고자 한다. 이 기법은 유한요소법의 장점과 경계

요소법의 장점을 취함으로서 각각의 단점을 상호보완하여 무한영역(open boundary)의 전자장 문제를 해결하는 방법을 알려져 있으며 옥외 전력기기들의 전자장 해석, 전자파의 전송과 산란의 문제, 기타 Maxwell방정식을 응용하는 각종 전자장 해석 등에 사용되고 있다.

1972년에 McDonald와 Wexler[8]가 경계 적분법을 유한 요소법과 합성하는 기법을 처음으로 소개하였다. 그들은 내부영역을 유한요소법으로 구성하여 Poisson이나 Helmholtz방정식을 만족하도록 하였고 무한공간의 외부영역은 경계적분으로 구성하여 Laplace방정식이 만족된다고 가정하였다. 이 두 영역에 중복되는 구간을 두어 source point에서의 경계적분 특이성(singularity) 문제를 해결하였다. 1977년에 Silvester[9]는 무한영역의 전자장 문제해결을 위해서 또 다른 유한요소 기법을 발표하였다. 표준 유한요소법으로 관련 영역을 modeling하고 Laplacian을 가정하여 외부영역은 내부영역을 둘러싸고 있는 대형 환상영역을 요소로 구성하였다. 영역의 경계에 존재하는 요소들의 절점을 제외한 환상영역의 절점들은 제거될 수 있기 때문에 전체 방정식의 크기는 일반 유한요소법에서 유도되는 것과 같게 되며 이 기법으로 몇 가지의 정전계와 자계문제 해석에 적용되었다. 1979년에 Daffe와 Olsen[5]은 축대칭의 정전계 문제를 해석하기 위하여 내부와 외부

영역 모두 경계적분을 사용하는 기법을 제안하였으며 자유공간에서의 현수애자에 대한 전계분포 해석에 적용하였다.

1980년대 초부터 S.Salon[10]을 비롯한 RPI그룹은 [14-16] Poisson방정식, Helmholtz방정식, 와류문제, 축대칭 Vector Potential 등의 경계영역이 없는 문제들을 해결하기 위하여 유한 및 경계요소 합성법을 사용하였으며, 최근에는 이 기법을 도입하여 microwave의 전송과 산란의 문제를 2차원에서 분석하는 데 성공하였고 보다 실질적인 문제해결을 위해서 3차원 해석을 연구 중에 있다. 이 밖에도 K. Paulsen[17]은 손실이 있는 유전체에서 Maxwell방정식을 풀기 위하여 유한 및 경계요소 합성법을 도입하였으며, 외부의 전원으로 환자의 자계분포를 해독하여 암의 존재여부를 알아낼 수 있도록 하는 의료기 개발에도 응용하고 있다. 또한 1987년 부터 J. D'Angelo[12]를 비롯한 미국의 G.E.그룹도 이 기법을 사용하여 고주파 안테나 문제, 자유공간에서의 전자파 산란문제등의 해결을 위하여 연구를 진행하고 있다.

다음에 유한 및 경계요소 합성법의 장단점을 고찰하고 무한영역에서의 정전계문제와 전자파 분석에 사용할 수 있는 Helmholtz의 2차 미분방정식의 수치해석에 대하여 수학적인 modeling을 통하여 합성방법을 설명하고자 한다.

2. 유한 및 경계요소 합성법

2.1 합성기법의 장단점

전자장 해석뿐만 아니라 다른 분야의 문제에서도 유한요소법이 유한차분법보다 광범위하게 이용되고 있는 이유는 전자가 어떤 기하학적인 형태의 문제에도 쉽게 적용될 수 있기 때문이다. 이 밖에도 유한요소법의 주요 장점으로서 :

- 경계조건을 쉽게 적용시킬 수 있다.
- 비선형이나 비균질성의 물질도 쉽게 적용될 수 있다.
- 특성방정식의 matrix가 대칭이며 band를 이루고 positive definite가 되어 용이하게 해를 구할 수 있다.

등의 장점이 있고, 주요 단점으로서는 :

- 경계가 없는 문제는 해석할 수 없다.
- 단지 몇 개의 node값만 알고자 할 때도 전체영역의 모든 미지수를 다 풀어야 한다.

등의 단점이 있다.

한편 경계적분법이나 경계요소법은 Green의 정리나 자유공간의 Green함수를 이용하여 균질하고 경계가 없는 영역의 부분미분 방정식의 해를 구하는 방법으로 다음과 같은 장단점을 가지고 있다. 주요 장점으로서는

- 경계가 없는 문제를 쉽게 modeling할 수 있다.
- 일반적으로 이 방법으로 구한 수치해석의 해가 유한요소법으로 구한 해보다 정확하다.
- 특성방정식의 차수가 유한요소법의 차수보다 작다.
- 미지수는 오직 경계에만 존재하며 추가로 내부 영역의 값을 쉽게 구할 수 있다.

등이 있으며 주요 단점으로는

- 복잡한 기하학적 구조를 가진 문제를 풀 수가 없다.
- 비선형이나 비균질성 물질에 대한 문제는 적용하기가 어렵다.
- 계수 matrix는 모든 요소들이 값을 갖게 되고 (full matrix) positive definite는 보장할 수 없다.

등의 단점을 가지고 있다.

이상에서와 같이 유한요소법과 경계요소법은 그 장단점들이 상호보완적이어서 이 두 기법이 합성된다면 다음과 같은 장점을 갖게 되어 합성기법은 아주 유용한 전자장 해석방법이 될 것이다.

- 어떠한 기하학적 구조의 문제도 쉽게 modeling할 수 있다.
- 경계가 없는 무한공간의 문제를 쉽게 modeling할 수 있다.
- 비선형 문제나 비균질성을 갖춘 재질도 적용할 수 있다.

등의 장점을 갖게 되지만, 단점으로서는 계수 matrix가 부분적으로 모든 원소의 성분을 갖게 되어 대칭성을 잃게 되며 합성하는 과정에서 계수 matrix의 inverse가 필요하여 계산시간이 많이 걸리게 되는 등의 단점도 있다.

그림 1은 개략적인 유한 및 경계요소 합성법에 대

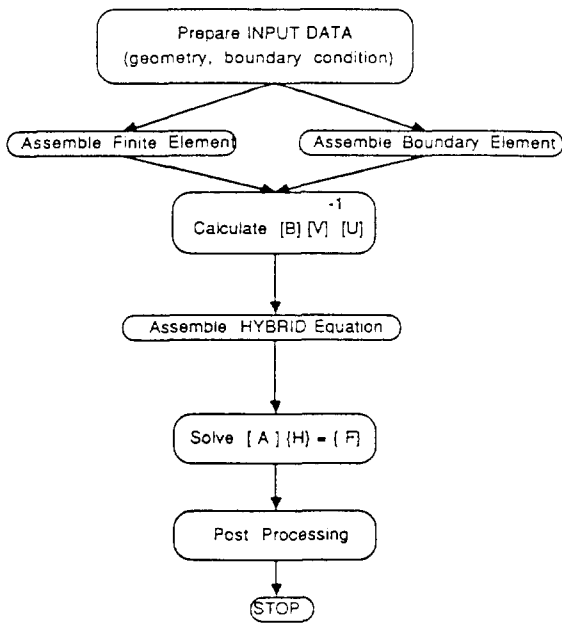


그림 1. 유한 및 경계요소 합성법의 flow chart

한 flow chart를 보여주고 있다. 해석 영역에서의 기하학적 구조와 경계조건에 따라 유한요소법과 경계요소법에 의한 각각의 system matrix를 구성하고 각 System방정식에 공통으로 있는 경계영역에서 접선성분의 미지수를 소거하거나 두 system방정식을 합성하여 전체를 하나의 system방정식화 함으로써 일반적으로 사용되고 있는 해법을 이용하여 해를 구하게 된다.

2.2 정전계 해석에의 응용

전자장 해석에서 가장 기본이 되는 정전계문제는 지배방정식인 Laplace방정식을 푸는 것이다.

$$\epsilon \nabla^2 \phi = 0 \quad (1)$$

식 (1)에서 ϵ 는 재질의 유전율을 나타내며 ϕ 는 전위를 나타내고 있다. 유한 및 경계요소 합성법은 먼저 유한요소법에 의한 내부영역에서의 system방정식을 Galerkin방법으로 formulation하고 Green함수를 이용하여 경계요소법에 대한 system방정식을 구성한 후에 합성하여 해를 구하는 방법이다.

식 (1)로 부터 일반적인 가중잔차법(weighted residual method)을 이용하여 유한요소방정식을 유도하기 위하여 식 (1)에 임의의 가중함수 w 를 곱하

고 전체영역에 대하여 적분한다.

$$\int_V (\epsilon \nabla^2 \phi) w dV = 0 \quad (2)$$

식 (2)를 부분적분하면 체적적분과 면적분 항으로 나타나며

$$\int_V [\epsilon \nabla \phi \cdot \nabla w] dV - \int_S w \epsilon \nabla \phi \cdot dS = 0 \quad (3)$$

또는

$$\int_V [\epsilon \nabla \phi \cdot \nabla w] dV - \int_S w \epsilon \frac{\partial \phi}{\partial n} dS = 0 \quad (4)$$

식 (4)에서 $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ 은 전위 ϕ 에 대한 법선방향의 1차 도함수 값을 나타낸다. Galerkin의 가중잔차법은 전위 ϕ 와 가중함수 w 에 다음과 같이 똑같은 형상함수(shape function 또는 approximation function)를 도입한 것이다.

$$\phi = \sum_{i=1}^n N_i(x, y) \phi_i \quad (5)$$

$$w = \sum_{i=1}^n N_i(x, y) \quad (6)$$

식 (5), (6)에서 $N_i(x, y)$ 는 형상함수이고 n 은 유한요소의 질점수를 나타낸다. 보다 정도가 높은 유한요소 Program을 위해서는 2차 이상의 삼각요소, 사각요소 또는 곡선요소등을 사용할 수 있다. 식 (5)와 (6)을 이용해서 ϕ 와 w 의 gradient는 다음 식으로 표시할 수 있다.

$$\nabla \phi = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) \phi_i \quad (7)$$

$$\nabla w = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) \quad (8)$$

경계영역이 있는 유한 요소 formulation에서는 식 (4)의 면적분은 기지의 상수값이고 보통 0으로 주어지고 있지만, 유한 및 경계요소 합성법에서는 정전 전위 ϕ 의 법선방향 미분값 $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ 은 또 하나의 미지수로 남게 된다. $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ 에 대해서도 똑 같은 형상함수를 이용할 수 있다.

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \sum_{i=1}^n N_i(x, y) \frac{\partial \phi_i}{\partial n} \quad (9)$$

식 (5)~(9)를 식 (4)에 대입하고 전체영역에 대한 체적적분과 면적분을 각 유한요소의 체적과 면에 대한 요소들의 합으로 표시할 수 있으며 최종적인 system matrix방정식은

$$[S]\{\phi\} - [T]\left\{ \frac{\partial \phi}{\partial n} \right\} = 0 \quad (10)$$

로 표시할 수 있다. 식 (10)에서 [S]는 식 (4)의 체적 적분항에서 계산된 계수 matrix이고, [T]는 면적분항에서 계산된 matrix이다.

$$[S] = \sum_1^n \int_V \left[\left(\epsilon \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial x} \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial x} \right) + \left(\epsilon \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) \right] dV_e \quad (11)$$

$$[T] = \sum_1^n \int_s \sum_{i=1}^n N_i \sum_{i=1}^n N_i dS_e \quad (12)$$

[S]와 [T] matrix는 모두 대칭이며 대각원소를 중심으로 band를 형성하고 있는 sparse matrix이다.

한편 경계요소법의 formulation은 Green의 제 2 등식으로 부터 출발한다.

$$\int_V (\phi \nabla^2 \phi - \phi \nabla^2 \psi) dV = \int_S \left(\phi \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) dS \quad (13)$$

2차원 해석을 위해서 식 (13)의 ϕ 는 Green함수:

$$G = \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{1}{|r_q - r_m|} \right) \quad (14)$$

로 대체할 수 있으며 식 (14)에서 r_q 와 r_m 은 각각 source point와 관찰점까지의 거리를 나타낸다. Green 함수의 Laplacian은 관찰점 q 에서 Dirac 델타 함수로 표시할 수 있다.

$$\nabla^2 G = -\delta(q) \quad (15)$$

식 (1)과 (15)를 식 (13)에 대입하고 ϕ 를 G 로 대체시킴

$$\phi(q) + \int_s \phi(m) \frac{\partial G}{\partial n} dS_m - \int_s G \frac{\partial \phi(m)}{\partial n} dS_m = 0 \quad (16)$$

로 되며 점 q 가 경계면 S 에 있다면 식 (16)은 다시

$$\phi(q) + \int_s \phi(m) \frac{\partial G}{\partial n} dS_m - \int_s \frac{\partial \phi(m)}{\partial n} G dS_m = 0 \quad (17)$$

로 표시할 수 있으며 α 는 특이 Dirac 델타 함수의 적분값이다. 일반적인 곡면상에서 α 값은 0.5가 되는 것이다. 경계적분공식, 식 (17)에 대하여 유한요소법에서 사용했던 것과 똑같은 형상함수를 사용하면 전체 ϕ 와 법선성분의 1차미분인 $\partial\phi/\partial n$ 에 대해서 요소 분할이 가능하여 진다. 2차원 해석에서 경계요소는 1차원 선요소(line element)가 되고, 3차원 해석에서는 2차원의 3각요소나 4각요소로서 면적에 대한 model을 할 수 있게 된다. 식 (16)의 체적적분을 유한

요소법에서와 같이 요소별로 계산하여 종합하면 system matrix 방정식은

$$[U]\{\phi\} - [V]\left\{ \frac{\partial \phi}{\partial n} \right\} = 0 \quad (18)$$

로 표시되고 [U]는 식 (17)에서 특이점과 첫번째 면적분에 대한 계수 matrix이고 [V]는 식 (17)의 두번째 면적분에 대한 계수 matrix이다.

$$[U] = \alpha \phi_i(q) + \sum_1^n \int_s N_i(x, y) \frac{\partial G}{\partial n} dS_m \quad (19)$$

$$[V] = \sum_1^n \int_s N_i(x, y) G dS_m \quad (20)$$

경계조건들은 경계요소 정식화과정에서 직접 넣을 수 있으며 경계면 S 상에서 전위 ϕ 나 $\partial\phi/\partial n$ 의 주어진 값이거나, ϕ 와 $\partial\phi/\partial n$ 의 관계식이 된다. 이러한 경계조건에 의해서 식 (18)은 점 'i'에서 하나의 미지수가 되고 system 방정식을 풀 수 있게 되지만 합성요소법의 정식화과정에서는 두개의 미지수로 남아 있게 된다.

유한요소법에 의한 system matrix 방정식, 식 (10)과 경계요소법에 의한 system matrix 방정식, 식 (18)은 해석영역의 경계면에서 전위 ϕ 와 $\partial\phi/\partial n$ 두 개의 미지수를 각각 가지고 있다. 내부의 유한요소 영역에서는 전위 ϕ 와 $\partial\phi/\partial n$ 두 개의 미지수를 각각 가지고 있다. 내부의 유한요소 영역에서는 전위 ϕ 만이 미지수이고, 경계면 S 에서 유한요소와 경계요소가 중첩될 때 경계면에서는 전위 ϕ 와 $\partial\phi/\partial n$ 가 연속이어야 하므로 각 요소 합성을 위한 정식화과정에서 경계면에서의 자유공간 경계조건이 도입되어야 한다. 그러므로 그림 2와 같이 유한요소와 경계요소를 합성할 경우 전체 해석영역(경계 영역)에 자유공간을 두어야 하며, 이 영역을 유한요소와 경계요소가 공유함으로써 두 개의 system matrix 방정식을 직접

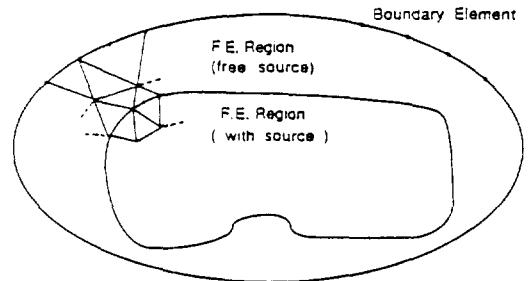


그림 2. 합성요소법의 해석영역

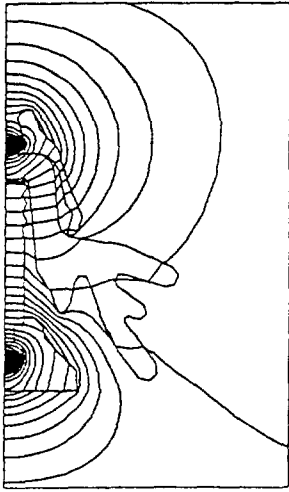


그림 3. 현수애자의 등전위선도

합성할 수가 있게 된다.

합성된 두 식은 matrix 형태로 나타낼 수 있고

$$\begin{bmatrix} S & T \\ U & V \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi \\ \frac{\partial \phi}{\partial n} \end{Bmatrix} = 0 \quad (21)$$

전하밀도나 기지의 전위값이 주어질 경우 구동함수로서 유한요소 영역에 포함될 수 있으므로 식 (21)의 우측이 0이 아니고 다음과 같이 수정될 수 있다.

$$\begin{bmatrix} S & T \\ U & V \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi \\ \frac{\partial \phi}{\partial n} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (22)$$

식 (22)의 F는 유한요소 영역에서의 구동함수를 표시한다. 전체 합성된 system matrix 방정식의 해를 구하는 방법은 여러가지가 있겠지만 일반적으로 두 개의 미지수에 2개의 방정식을 가진 2원 1차 방정식의 형태이므로 하나의 미지수를 소거하여 원하는 해를 구하는 방법과 직접 matrix 방정식의 해를 구하는 방법이 있다. 식 (18)에서 $\partial \phi / \partial n$ 을 전위 ϕ 로 나타내어

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = [V]^{-1} [U] \{ \phi \} \quad (23)$$

식 (23)을 식 (18)에 대입하면

$$[S] \{ \phi \} - [T] [V]^{-1} [U] \{ \phi \} = \{ F \} \quad (24)$$

이 되어 전체 영역에서 미지수가 전위 ϕ 만 되어 일반적인 선형대수 방정식의 해법을 이용하여 전위 ϕ 를 구할 수 있게 된다.

이와 같이 정전계 해석에 대한 유한 및 경계요소 합성법은 자유 공간에 노출된 전력기기들 즉 옥외철탑, 송전선, 애자, Bushing 등의 전계해석이나 설계에 적용될 수 있으며 보다 정확한 해를 구할 수 있게 된다. 그림 3은 옥외 현수애자를 축대칭으로 정식화한 유한 및 경계요소 합성법으로 해석한 것이며 동전위선을 나타내고 있다.

2.3 전자파 해석에의 응용

유한 및 경계요소 합성법은 경계영역이 없는 전자파의 전송과 산란의 문제에서 발생하는 전자장 해석의 기법으로 크게 각광을 받고 있다. 개요에서 언급한 바와 같이 microwave 도파관 문제[13], strip line array 안테나 문제와 전자파의 산란문제[12] 등의 해결에 적용되고 있으며 이 기법의 단점들을 보완하려는 노력도 병행되어 지고 있다.

정전계 해석의 경우와 마찬가지로 전자파 해석에서도 먼저 유한 요소에 대한 system matrix 방정식을 유도하고 경계요소법에 의한 제 2의 system matrix 방정식을 유도한 후 두 방정식을 합성하여 해를 구하게 된다. 먼저 내부의 영역을 유한요소법에 의한 정식화 과정의 출발로서 Maxwell 방정식으로 부터 Helmholtz 미분 방정식을 유도하게 된다.

$$\nabla \times E = -j\omega\mu H \quad (25)$$

$$\nabla \times H = j\omega E \quad (26)$$

식 (25)와 (26)에서 E는 전계, H는 자계, μ 는 자기투자율, ϵ 는 유전율, ω 는 각속도, $j = \sqrt{-1}$ 을 나타낸다. 식 (25)를 $j\omega\mu$ 로 나누고 curl을 취한 후 식 (26)을 대입하면 전계 E의 식으로 표시할 수 있으며, 마찬가지로 방법으로 자계 H만으로 식의 표현이 가능하게 되어 Helmholtz의 2차 미분 방정식을 얻게 된다.

$$\nabla \times \frac{1}{j\omega\mu} \nabla \times E + j\omega\epsilon E = 0 \quad (27)$$

$$\nabla \times \frac{1}{j\omega\epsilon} \nabla \times H + j\omega\mu H = 0 \quad (28)$$

식 (28)은 TE mode를 형성하게 되며 TM mode도 똑같은 방법으로 해석하게 되므로 본 소고에서는 TE mode를 설명하도록 한다. 등가 자화전류 J_m 을 구동함수로 가정하면 식 (28)은

$$\nabla \times \frac{1}{j\omega\epsilon} \nabla \times H + j\omega\mu H = -J_m \quad (29)$$

이 된다. Galerkin 가중잔차법(weighted residual method)을 식 (29)에 적용하면 유한요소 정식화 방정식을 다음과 같이 얻게 된다.

$$\int_{\Omega} \mathbf{W} \cdot \left(\nabla \times \frac{1}{j\omega\epsilon} \nabla \times \mathbf{H} + j\omega\mu \mathbf{H} \right) d\Omega = - \int_{\Omega} \mathbf{W} \cdot \mathbf{J}_m d\Omega \quad (30)$$

식 (30)에서 \mathbf{W} 는 임의의 가중함수이며 Ω 는 전체영역을 나타낸다. 이 식을 부분적분하여 정리하면

$$\int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{j\omega\epsilon} (\nabla \times \mathbf{W}) \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) + j\omega\mu \mathbf{W} \cdot \mathbf{H} \right\} d\Omega - \int_{\Gamma} \mathbf{W} \cdot \mathbf{E}_t dS = - \int_{\Omega} \mathbf{W} \cdot \mathbf{J}_m d\Omega \quad (31)$$

로 나타낼 수 있으며 Γ 는 해석 영역의 경계를 나타내고 \mathbf{E}_t 는 경계면에서의 전계에 대한 접선성분을 나타내 주고 있다. 2차원 해석에서 자계 \mathbf{H} 는 해석평면의 수직방향 성분만이 존재하게 되므로 식 (31)은 간략하게 되어 2차원 해석의 유한요소 정식화 방정식은 다음과 같이 된다.

$$\int_{\Omega} \left\{ \nabla W \cdot \frac{1}{j\omega\epsilon} \nabla H + j\omega\mu W \cdot H \right\} d\Omega - \int_{\Gamma} W \cdot \mathbf{E}_t d\Gamma = - \int_{\Omega} W \cdot \mathbf{J}_m d\Omega \quad (32)$$

식 (32)를 정전계 해석에서와 마찬가지로 전체 영역을 요소로 분할하고 형태함수(Shape function)를 사용하여 각 \mathbf{H} , \mathbf{W} , \mathbf{E}_t , \mathbf{J}_m 에 대입하고 정리하면 유한요소에 대한 system matrix 방정식을 얻게 된다.

$$[S][H] - [T][E_t] = \{F\} \quad (33)$$

식 (33)에서 $[S]$, $[T]$, $\{F\}$ 는 각각 다음과 같이 정의된다.

$$[S] = \sum_{oe} \int \left\{ \frac{1}{j\omega\epsilon} \nabla N^T \cdot \nabla N + j\omega\mu N^T \cdot N \right\} d\Omega \quad (34)$$

$$[T] = \sum_{\Gamma_e} \int N^T \cdot \mathbf{N} d\Gamma \quad (35)$$

$$\{F\} = - \left[\sum_{oe} \int N^T \cdot \mathbf{N} d\Omega \right] \cdot \{J_m\} \quad (36)$$

한편 전자파 해석을 위한 경계요소법의 정식화 방법은 여러가지가 있지만 Green의 제 2 등식을 이용한 Stratton의 공식[19], 식 (37)에서 출발하게 되며

$$\int_{\Omega} (\mathbf{Q} \cdot \nabla \times \nabla \times \mathbf{P} - \mathbf{P} \cdot \nabla \times \nabla \times \mathbf{Q}) d\Omega = \int_{\Gamma} (\mathbf{P} \times \nabla \times \mathbf{Q} - \mathbf{Q} \times \nabla \times \mathbf{P}) \cdot d\Gamma \quad (37)$$

이 방정식을 이용하여 경계 영역내에 전하나 전류원이 존재하지 않을 때 내부 어느 한 점의 자계 \mathbf{H} 는

$$\mathbf{H}(x', y', z') = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \{ j\omega\epsilon (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \phi - (\mathbf{n} \times \mathbf{H}) \times \nabla \phi - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}) \nabla \phi \} d\Gamma \quad (38)$$

로 나타낼 수 있게 된다. 2차원 전자장 해석에서 \mathbf{H} 는 오직 해석 평면의 수직성분만 고려되므로 식 (38)의 마지막 항은 소거하고 \mathbf{H} 는

$$H_i = \int_{\Gamma} \{ j\omega\epsilon G \cdot \mathbf{E}_t - \frac{\partial G}{\partial n} \cdot \mathbf{H} \} d\Gamma \quad (39)$$

가 되며 식 (39)에서 G 는 2차원 파동방정식에 해당되는 Green 함수가 되어

$$G = \frac{j}{4} H_0^{(2)}(kr) \quad (40)$$

로 표시되고 $H_0^{(2)}$ 는 제 2종 0차 Hankel 함수이며 k 는 자유공간에서의 파동수이다. i 는 전체영역에서 한 점을 나타내고 경계영역 Γ 에서는 Green 함수의 특이점이 발생하게 된다. 특이점을 고려한 경계적분 방정식은 다음과 같이 표시된다.

$$a_i H_i + \int_{\Gamma} \left\{ \frac{\partial G}{\partial n} \cdot \mathbf{H} - j\omega\epsilon G \cdot \mathbf{E}_t \right\} dT = 0 \quad (41)$$

a_i 는 특이점에서의 적분값이고 $\partial G / \partial n$ 은 G 의 법선방향 1차 미분값을 나타낸다. 식 (41)을 유한요소법에 사용된 것과 같은 형태함수를 사용하여 전개하면 다음과 같은 전체 System matrix 방정식을 얻을 수 있다.

$$[U][H] - [V][E_t] = 0 \quad (42')$$

유한요소법에 의한 System matrix 방정식, 식 (33)과 경계요소법에 의한 System matrix 방정식, 식 (42)를 합성하면 유한 및 경계요소 합성법에 의한 전체의 System matrix 방정식,

$$\begin{bmatrix} S & T \\ U & V \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H \\ E_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix} \quad (43)$$

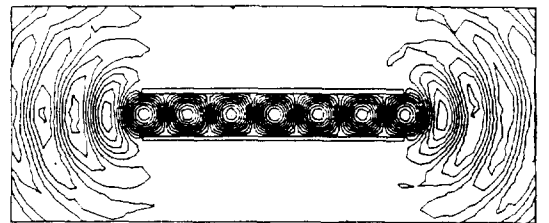


그림 4. 평행도파관에서의 자계분포

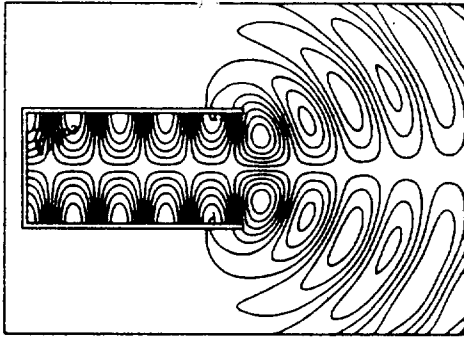
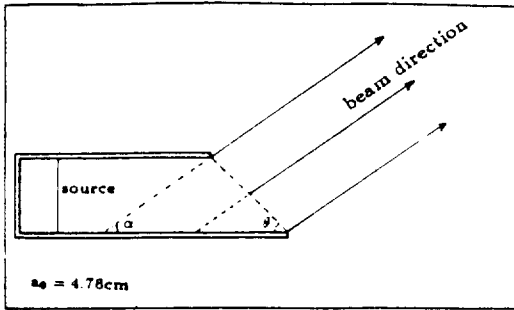
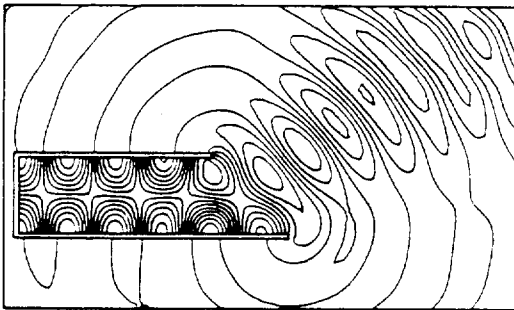


그림 5. Microwave 발사관(6 GHz)



(a) model



(b) near field pattern

그림 6. Vlasov-Type 전파 발사관의 modeling

을 얻게 된다. 이 식의 해는 정전계의 경우와 마찬가지로 식 (4)에서 미지수 $\{E_i\}$ 를 소거하여 $\{H\}$ 를 구하게 되며 전체의 System matrix가 부분적으로 band가 형성되며 경계요소에 해당되는 각 요소들은 모두 값을 갖게 되어 비대칭 matrix가 된다. System matrix를 대칭화하기 위해서 경계요소에 대한 요소들을 산술평균하여 $\{S\}$ matrix에 합성함으로써 인위적으로 대칭화하여 계산시간을 단축하기도 한다.

그림 4는 유한 및 경계요소합성법을 사용하여 평행 도파관의 전자계 해석을 한 것이며 전자파의 source를 평행관의 중앙에 sine함수를 가진 선전류로 가정하였으며 전자파는 중앙에서 발생하여 양쪽으로 전파되는 것을 보여주고 있다. [19]

그림 5는 평행 도파관의 한 쪽을 단락한 것으로 6 GHz에서 microwave가 각 plate에서 반사에 의해 진행되어나와 각 파의 진행방향으로 전파되는 것을 보여주고 있으며 도파관 내에서는 TE₁ mode가 잘 형성되어 있음을 나타내고 있다.

그림 6은 이 기법을 사용하여 Vlasov-Type 안테나를 modeling한 것으로 microwave의 source는 단락된 도파관으로부터 반 파장의 위치에서 cosine파의 선전류가 존재하는 것으로 가정하였다(그림 6 (a) 참조). 실제 실험에 사용되었던 model로 동작 주파수는 6GHz이고 45°의 경사를 가진 전파 발사관으로 2차원 Modeling 한 것이며 경사도와 주파수의 크기를 이용하여 전파의 진행방향을 조정할 수 있는 것을 보여 주고 있다.

3. 결 언

유한요소법과 경계요소법의 합성으로 전자계 해석을 하는 기법은 각 방법의 장점을 수용하여 경계가 없는 무한영역의 전자장을 분석하는 기법으로서 어떤 복잡하고 어려운 기하학적 구조의 문제도, 비선형이나 비균질성 재료의 문제도 쉽게 formulation이 가능하여 용이하게 해석할 수 있지만 전체 System matrix방정식이 비대칭이며 부분적인 full matrix를 형성하여 계산시간이 길어 진다는 단점도 있다. 적용예에서 보여 준 것과 같이 합성요소법은 그 해가 실제에 근사한 값을 가질 수 있다고 생각되며, 계산시간을 단축시키기 위하여 직접법이나 반복법을 사용한 새로운 해법들이 도입되고 있다. 최근에는 system전체 node의 순서를 고려한 NDRA(Nested Dissection Reordering Algorithm)이 도입되고 있고, System matrix자체를 유한 요소법의 형태로 유지시키며 풀 수 있는 방법으로 알려진 Absorbing 경계조건[20,21]을 사용하여 전자파에 대한 해석을 하고 있다. 유한 및 경계요소 합성법은 초고압 옥외용 전력기기의 전자장 해석과 설계, 레이더나 안테나 등의 전자파 해석문제, 초전도 응용, 전력기기의 전

자장해석과 설계, 우주공간에서의 전력전송문제 등을 쉽게 model화하여 적용할 수 있을 것이다.

참 고 문 헌

- [1] M.A.Jaswon, "Integral Equation Methods in Potential Theory-I", Proceedings of the Royal Society of London, p. 23, 1963.
- [2] G.T.Symm, "Integral Equation Methods in Potential Theory-II", Proceedings of the Royal Society of London, p. 33, 1963.
- [3] R.J.Duffin and J.H.McWhirter, "An Intergral Equation Formulation of Maxwell's Equation", J. of the Franklin Institute, Vol. 298, No. 5 and 6, pp. 385-394. December, 1974.
- [4] G.Jeng and A. Wexler, "Isoparametric Finite Element Variational Solution of Intergral Equations for Three-Dimensional Fields", Int. J. Num. Meth, Engng., 11, p. 1455, 1977.
- [5] J.Daffe and R.G.Olson, "An Integral Equation Technique for Solving Rotationally Symmetric Electrostatic Problems in Conducting and Dielectric Material", IEEE Trans. on PAS, Vol. PAS-98, pp. 1609-1615, Sep./Oct. 1979.
- [6] H.Herwitz, "Infinitesimal Scaling-A New Procedure for Modeling Exterior Field Problems", IEEE Trans. on MAG, Vol. MAG-20, No. 5, 1984.
- [7] C.Crowley and et al., "Power Line Insulator Analysis and Design using Finite Elements and Infinitesimal Scaling.", IEEE Trans. on Magnetics, Vol. MAG-21, No. 6, pp. 2388-2391, Nov. 1985.
- [8] B.H.McDonald and A. Wexler, "Finite-Element Solution of Unbounded Field Problems", IEEE Trans. on MTT, Vol.MTT-20, No. 12, pp. 841-847, Dec. 1972.
- [9] P. Silvester and M.S. Hsieh, "Finite-Element Solution of 2-Dimensional Exterior-Field Problems", Proceedings IEE, Vol. 118, No. 12, pp. 1743-1747, Dec. 1971.
- [10] S.J.Salon, "The Hybrid Finite Element-Boundary Element Method in Electromagnetics", IEEE Trans. on Magnetics, Vol. MAG-21, pp. 1829-1834, September 1985.
- [11] R.E.Collin and D.A.Ksienski, "Boundary Element Method for Dielectric Resonators and Waveguides", Radio Science, 22, pp. 1155-1167, 1987.
- [12] J.D'Angelo, M.J.Povinelli and M.A.Palmo, "Hybrid finite/Boundary element of a Stripline Notch Array", 1988 IEEE AP-S International Symposium Digest, Vol. 3, pp. 1126-1129, 1988.
- [13] P.S. Shin, K.A.Connor and S.J.Salon, "The hybrid finite element-boundary element Solutions of Waveguide Problems", IEEE Trans. on MAG, Vol. 25, No. 5, pp. 3943-2945, Sep. 1989.
- [14] S.J.Salon and J.M.Schneider, "A hybrid Finite Element-Boundary Integral Formulation of Poisson's Equation", IEEE Trans. on MAG, Vol. MAG-17, No. 6, pp. 2574-2576, Nov. 1981.
- [15] S.J.Salon and J.M.Schneider, "A Hybrid Finite-Boundary integral Formulation of the Eddy Current Problem", IEEE Trans. on MAG, Vol. MAG-18, No. 2, pp. 461-466, March 1982.
- [16] S.J.Salon and J.P.Peng, "A hybrid finite element-boundary element formulation of Poisson's equation for axisymmetric vector potential problems", J. Appl. Phys. Vol. 53, pp. 8420-8422, Nov. 1982.
- [17] K.D.Paulsen, "Finite, boundary and hybrid elements of the Maxwell equations for simulating hyperthermia treatment of cancer", Ph. D. thesis, Dartmouth College, Hanover, NH, 1986.
- [18] J.A.Stratton, "Electromagnetic Theory", McGraw-Hill, 1941.
- [19] P.S.Shin, Ph. D Thesis, RPI, Troy, NY, 1989
- [20] R. Mittra and et al., "A Review of Absorbing Boundary Conditions for Two and Three-Dimensional Electromagnetic Scattering Problems", IEEE Trans. on MAG., Vol. 25, No. 4, pp. 3034-3039, July 1989.
- [21] O.M.Ramahi and R.Mittra, "Finite Element Analysis of Dielectric Scatters using The Absorbing Boundary Condition", ibid., pp. 3043-3045, 1989.