

## B-Spline 곡선을 이용한 지정된 전계 조건하의 전극형상 설계

### Design of Electrode Shape with B-Spline Curve Under Specified Field Condition

金 應 植\* · 朴 鍾 根\*\*  
(Eung-Sik Kim · Jong-Keun Park)

#### 요 약

본 논문은 지정된 전계 분포를 갖는 고전압 전극의 형상을 설계하는데 그 목적이 있다. 고전압 전극의 형상을 B-Spline 곡선으로 정의하여 기존의 논문들이 사용하고 있는 형상함수들의 변수를 줄임과 동시에 더욱 매끄러운(smooth)형상을 설계하였다. 전계해석기법으로 실용적인 모델해석에 유리한 표면전하법을 사용하였다.

계산모델로는 초기형상의 전계 편차가 큰 봉대 평판(rod-plane gap) 전극을 사용하여, 봉선단에 균일분포전계(Uniform Field) 외에 여러가지 전계 분포를 조건으로 주어 이를 만족하는 전극을 설계하였다. 그 결과 균일 전계 분포를 갖는 전극의 경우 0.5%이하의 전계 오차를 갖는 고정도의 전극을 설계하였다.

끝으로 계산된 형상의 곡률과 전계와의 관계를 살펴봄으로 B-Spline 곡선이 고전압 전극 형상을 표현하기에 적합한 함수임을 검증하였다.

**Abstract-** This paper aims at the design of high voltage electrode contour under specified field condition. Defining the contour with B-Spline curve, the number of contour variables can be reduced and very smooth electrode can be obtained. For the analysis of the electric field, Surface Charge Method which has advantages in practical model has been used.

As an initial contour, the rod-plane gap has been used since the difference between maximum and minimum field value is relatively large. Various field conditions including uniform field condition are given to the end of the rod electrode. Under uniform field condition, authors designed an electrode whose field-deviation was under 0.5%. Finally, the relation between the curvature and field of the electrode has been checked, which showed that B-Spline curve is appropriate for the shape function.

## 1. 서 론

최근 전력수요의 증가로 인해 송전전압이 증대되는 추세에 있으며 이에 따른 고전압 기기의 절연설계의 중요성이 높아지고 있다. 절연설계는 구체적인 전극이나 절연물의 형상설계로서 기계적, 열적, 전기적 혹은 제작상의 문제등이 복합적으로 작용하는데 이중에도 기기의 전계해석과 더불어 적당한 전계 분포를 갖도록 형상을 설계하는 것이 기본적인 고려사항이 된다.

전극이나 절연물이 최대의 절연내력을 갖도록 하기 위하여 합리적인 전계 분포를 갖도록 하는 작업을 전계최적화(Field Optimization) 혹은 형상최적화(Computation of Optimized Shape)라고 부른다. [1] 전계 최적화에는 여러가지 전자장 수치해석기법들이 사용되는데 고전압 기기의 최적화에는 주로 전하중첩법과 표면전하법이 사용된다.

본고는 다매질장 전계최적화나 일반 3차원장 전계최적화등 실제적인 모델로의 본알고리즘 확장을 위하여 위 두가지 장의 전계해석에 유리한 표면전하법을 사용하였다. [2]

기존의 최적화기법[3, 4, 5]들은 모두 최적화형상위의 임의의 점을 미지변수로 놓고 그 점을 찾아가는 것을 기본 알고리즘으로 하고 있다. 따라서 매 반복계산마다 각 점들 사이의 구간을 적당한 함수로 보간(Interpolation)해야 하며 어떤 보간식을 사용할 것인가를 고려해야 한다. 보통 쓰이는 다항근사식은 진동(Higher-Order Polynomial Oscillation)이 뒤따르며 이를 없애려면 많은 점들이 미지변수로 주어져야 하며, 진동이 없는 구간 함수로 보간 시킬 경우 매끈한 형상을 얻기 위해 미분계수를 결정 변수로 주어여 하나 이는 형상 함수를 정의하는 미지변수의 증가를 의미한다. [6] 본고는 B-Spline 곡선[7]이라는 새로운 형상 함수를 도입, 적은 미지변수로 고정도의 전계오차를 갖는 매끈한 전극을 설계하였다. 끝으로 최적화된 형상의 곡률과 전계와의 관계를 검사함으로써 2계미분계수가 연속인 B-Spline 곡선이 고전압 기기 형상 설계에 적합한 함수임을 확인하였다.

## 2. 곡 선(Curve)

본 절에서는 형상함수로서의 여러가지 곡선을 종류별로 분석하여 각각의 특징을 알아보았다. 최적화 대상이 일반 3차원인 경우 형상 함수는 곡선(2차원)에서 곡면(3차원, surface)으로 차원이 증가하나 이 경우 2차원의 곡선 모델로 유추해석이 가능하다.

고전압기기의 형상함수로서의 적합성 여부를 본고에서는 두가지 측면에서 살펴보고자 한다. 첫째는 매끈함(Smoothness)의 관점이다. 고전압 전극이나 절연물이 매끈해야 함은 기지의 사실이나 매끈함은 하나의 정의로 내려져 있지 않다. 일반적인 경우 매끈함이란 1계 미분치의 연속성(형상의 기울기 연속), 2계 미분치 연속성(형상의 곡률의 연속성)등이 보장되며, 이런 연속성들이 만족되더라도 형상의 진동(Oscillation)등이 없어야 하는 합리적인 개념이다. 둘째 관점은 변수의 갯수이며 매끈한 곡선이라도 이를 정의하는 변수가 많은 곡선은 실용적이지 못하기 때문이다.

그림 1은 많이 사용되는 보간법에 의해 표현된 곡선들과 B-Spline 곡선에 의해 표현된 곡선의 예이다.

- a) 직선근사(Piecewise first-degree polynomial Interpolation)
- b) 고차다항식(Higher-degree polynomial interpolation)
- c) Cubic Spline 곡선(Piecewise third-degree polynomial Interpolation)
- d) Hermite 곡선(Piecewise Hermite third-degree polynomial Interpolation)
- e) Bezier 곡선(fifth-degree)
- f) B-Spline 곡선(second-degree)

그림 1은 각 곡선을 정의하는 변수(점)가 각각 단위 길이로 분포되어 있을 경우 한 변수를 단위 길이만큼 이동 시킬때 나타나는 곡선의 변화를 살펴보았다. 우선 직선 근사의 경우 그림 1의 a)에서와 같이 특이점들이 발생하며 이는 전계집중점이 되어 해석이 곤란하다.

그림 1의 b)와 c)는 다항식 근사의 예로서 특히 c)는 널리 쓰이고 있는 Cubic Spline 곡선[6]으로 2계 미분치 연속을 그 조건으로 하며 각 구간을 3차 다항식으로 보간한 구간 함수이다. 다항식 근사의 경우 미분계수들의 연속성은 좋지만 그림에서 보듯이 진동하는 특성을 가지고 있어 설계 전극에 요철(convex, concave) 발생한다. 이는 전극의 형상으로 적합치 못하며 이의 해결을 위해 많은 점들을 주어여야 한다.

\*正 會 員 : 서울大 大學院 電氣工學科 博士課程  
 \*\*正 會 員 : 서울大 工大 電氣工學科 副教授 · 工博  
 接受日字 : 1990年 3月 20日  
 1次修正 : 1990年 8月 2日

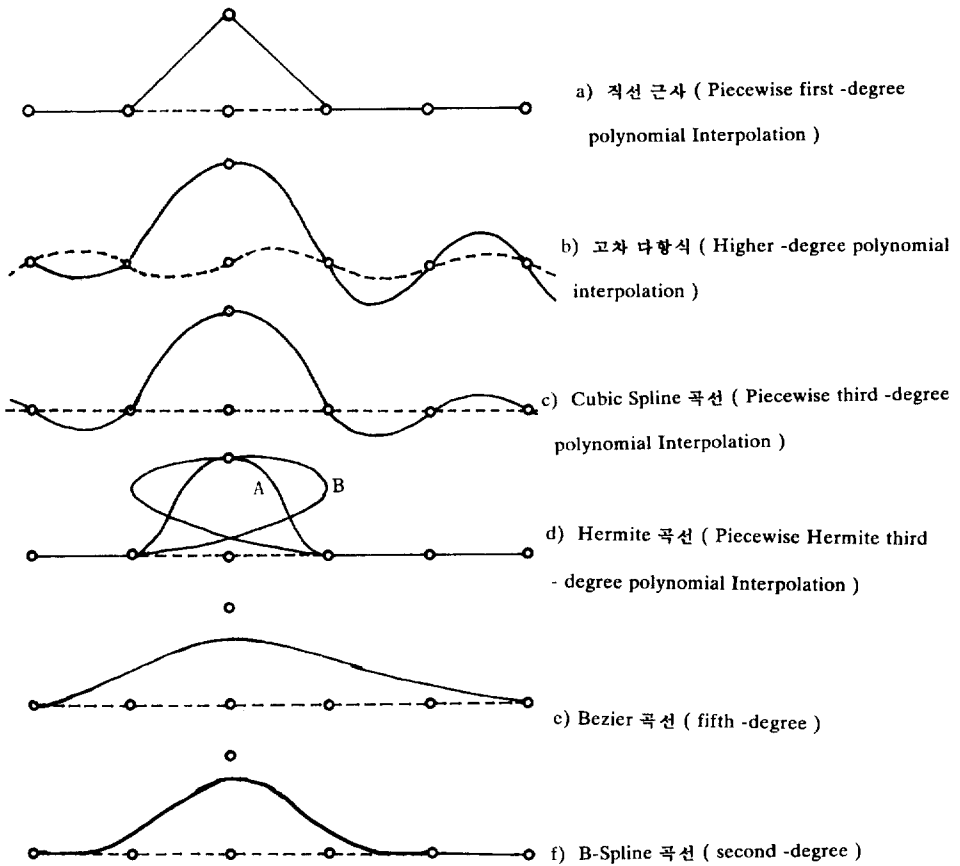


그림 1 각종 곡선  
Fig. 1 Various Curves.

표 1 각종 곡선의 비교  
Table 1 Comparison of Various Curves.

곡선의종류	1계미분	2계미분	진 동	정의변수	극부성
직 선	불연속	불연속		절점	유
고차다항식	연속	연속	심함	절점	무
Cubic Spline 곡선	연속	연속	있음	절점	무
Hermite 곡선	연속	불연속	미분계수에 따라 결정됨	절점, n차 미분계수 n=1,2,3,...	유
Osculating 다항식	연속	연속			
Bezier 곡선	연속	연속	있음	조정점	무
B-Spline 곡선 R-B-Spline 곡선	연속	연속	없음	조정점	유

그림 1의 d)는 소구간 헤르미트보간법(Piecewise Hermite Interpolation, third-degree)에 의한 곡선을 나타내며 이를 식으로 쓰면 식 (1)과 같이 나타난다.

$$P_k(x) = [f(x_k)H_{1,k}(x) + f(x_{k+1})H_{1,k+1}(x)] \\
 + [\dot{f}(x_k)\tilde{H}_{1,k}(x) + \dot{f}(x_{k+1})\tilde{H}_{1,k+1}(x)] \\
 + [\ddot{f}(x_k)\bar{H}_{1,k}(x) + \ddot{f}(x_{k+1})\bar{H}_{1,k+1}(x)] \quad (1)$$

식 (1)의 우변 2항, 3항이 더해지면 일반적인 Osculating 곡선[6]이 되며 각점에서의 미분계수를 결정해 주어야 한다. 즉 기울기를 정의함으로 진동을 막았으나 결과적으로 미지변수가 증가하였다. 그리고 그림 1의 d)의 B곡선은 기울기에 잘못된 데이터를 넣은 경우 나타난 곡선으로 올바른 기울기의 입력만이 좋은 곡선 형상을 보장한다.

식 (1)의 허미트 곡선의 다른 단점은 2계 미분계수가 구간구간 불연속을 나타낸다. 이를 없애기 위해서는  $f'(x_k)$ 의 2계 미분계수를 데이터로 주어야 하는데 이는 구할 수 없으며 구한다 하더라도 식이 많은 결정변수를 포함하게 된다.

그림 e)와 f)의 Bezier 곡선과 B-Spline 곡선을 나타낸다. [7] 그림에서 보듯이 이 두곡선의 조정점(Control Point)은 곡선상에 놓여 있지 않으며 이것은 절점이 곡선상에 위치하는 다른 곡선들과의 차이를 나타낸다. 다른 곡선은 점이 결정된 다음 보간작업후 곡선이 결정되나 이 두곡선은 점의 결정으로 곡선이 정의되어 보간작업이 불필요하며 또한 각 미분 계수의 연속성도 자동적으로 만족할 수 있다. Bezier 곡선과 B-Spline 곡선의 차이점은 다음과 같다. Bezier 곡선의 경우  $n+1$ 개의 조정점을 가졌다면  $n$ 차 다항식으로 곡선식이 표현된다. 식 (2)은  $n=3$ 일때 Bezier 곡선의 식이다. 식에 알 수 있듯이 조정점이 늘어나면 곡선식은 고차다항식이 되어버린다.

$$P(u) = \sum_{i=0}^2 P_i B_{i,n}(u) \quad (2)$$

$$= (1-u)^2 P_0 + 2u(1-u) P_1 + u^2 P_2$$

$$0 < u < 1$$

식 (2)에서 알 수 있듯이 한 조정점  $P_i$ 의 변화는 전 구간에 영향을 미친다. 반면 B-Spline 곡선의 경우 식 (4)에서 알 수 있듯이 Bezier 곡선을 구간구간으로 나누어 합성한 것과 같은 꼴을 나타낸다. 이런 차이점으로 국부성이(Localness) 발생한다. [7] 국부성은 한 변수의 이동이 전체 곡선에 미치는 영향을 나타낸다. 그림 1의 경우 대부분의 곡선은 한 점의 이동으로 전체형상이 변화하지만 그림 1의 f)의 경우 한 점의 이동은 그 점을 포함한 구간과 인접구간의 국부적인 변화만을 야기시킨다.

국부성이 없는 곡선의 경우 최적화 작업중 한 변수가 새롭게 결정될 때 마다 전체곡선이 변화하며 이는 수렴과정에서 국부적인 변화를 필요로 하는 최적화 작업에 좋지 않는 영향을 미친다.

이상에서 본 바와 같이 여러 곡선들 중에서 B

-Spline 곡선은 적은 변수로 매끈한 형상을 나타낼 수 있으며 최적화 작업에도 유리한 점을 가지고 있음을 알 수 있다.

각 곡선의 특징을 표 1로 정리하였다.

### 3. 전계 계산법

최적화에 쓰이는 전계 해석법으로는 전하중첩법과 표면전하법등이 있다. 전하중첩법은 해의 정밀성과 계산시간면에서 표면전하법보다 우수하다. 하지만 알고리즘이 다매질장이나, 일반 3차원장의 적용시 프로그램이 복잡해지며 미지전하의 개수가 늘어난다는 단점이 있다. 또한 유전체 경계면에서의 경험적인 전하배치를 요한다. 본고는 앞으로 다매질장과 일반 3차원장의 최적화를 전계로 전계계산법으로 표면전하법을 사용하였다. [5]

### 4. B-Spline 곡선[7]

B-Spline 곡선을 비롯한 여러 곡선들의 비교는 앞절에 설명된 바 본 절에서는 실제 B-Spline의 예와 이 곡선의 특징인 국부성에 대해 설명하고자 한다. 식 (3)은 B-Spline 곡선의 표현식이다.

$$P(u) = \sum_{i=1}^n P_i N_{i,k}(u) \quad (3)$$

식 (3)에서 알 수 있듯이 B-Spline 곡선은 조정점( $P_i$ , control point)와 Blending function( $N_{i,k}$ )에 의하여 표현된다.  $N_{i,k}$ 에서  $i$ ,  $k$ 는 조정점의 개수와 Blending function의 차수를 나타내는데  $k$ 는 이 곡선의 미분 연속성과 관련된 변수로  $k=3$ (Second-degree)이면 1계미분연속을 나타낸다.

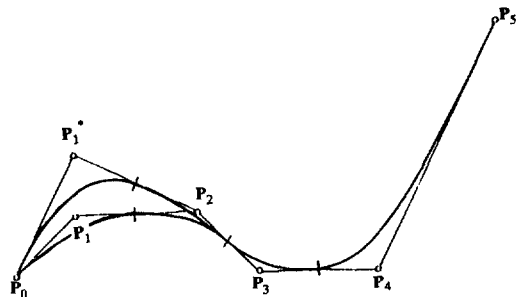


그림 2  $n=5, k=3$ 인 Non-Periodic B-Spline 곡선

Fig. 2 Non-Periodic B-Spline curves :  $n=5, k=3$ .

이는  $i, k$ 가 결정되면 고정되어 결국 곡선을 나타내는 변수는 조정점에만 국한된다. 그림 2는 5개의 조정점과  $k=3$ 으로결정된 간단한 B-Spline 곡선의 예이다.

이 경우 곡선 전체는 4개의 구간으로 나누어지며 한 구간은 3개의 조정점으로 나타난다. 이를 수식으로 쓰면 각 구간은 식 (4)와 같이 나타난다.

$$\begin{aligned}
 P_1(u) &= U_3 M_3 [P_0 P_1 P_2] \\
 P_2(u) &= U_3 M_3 [P_1 P_2 P_3] \\
 P_3(u) &= U_3 M_3 [P_2 P_3 P_4] \\
 P_4(u) &= U_3 M_3 [P_3 P_4 P_5] \\
 (U &= [u^2 \ u \ 1], M \text{은 상수 행렬})
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

B-Spline 곡선의 또 하나의 특징인 국부성에 대하여 알아보자. 그림 2에는 조정점  $P_1$ 이  $P_1^*$ 로 이동시 곡선의 변화를 나타내었다. 그림에서 보듯이 한 조정점의 변위에 의해 인접 두 구간만의 형상이 바뀔을 알 수 있다. 이에 반해 허미트 보간곡선을 제외한 모든 곡선의 경우 한 절점의 이동은 전체 모든 형상에 변화를 일으킨다. B-Spline의 이러한 특성을 국부성이라하며 이는 전체형상의 변화없이 국소적인 최적화작업을 행하는데 알맞은 특성이다. 이 국부성은 해의 수렴성을 좋게 만든다.

**5. 표면전하법을 이용한 전극최적화 알고리즘**

전극최적화의 대표적인 모델로는 봉대평판전극과 원통케이스속에 들어 있는 봉전극이 있는데 후자의 모델은 초기형상의 전계편차가 작아 최적화가 쉬운 모델이므로 본고는 계산모델로 전자를 택하였다. 전극의 전위치 1을 기준으로 계산값의 상대치 비교를 위해 모든 단위를 생략하였다. B-Spline 곡선은 보편적으로 쓰이는  $k=5$ (fourth-degree)를 사용하였다.

그림 3은 전극의 초기형상으로 여러개의 조정점으로 형성된다. 이때 조정점은 고정부와 최적화부로 나뉘며 그림에서 보듯이 최적화 영역은 최적화부의 조정점의 위치한 반구부분이 된다. 최적화부와 고정부의 전극에 윤곽점을 설치하고 최적화부의 윤곽점이 원하는 전계치를 갖도록 최적화부의 조정점을 찾는다면 이로써 전극의 형상을 결정된다.

최적화부의 윤곽점의 갯수를  $m$ , 고정부의 윤곽점의 갯수를  $n$ 이라 할때 표면 전하법에 의한 전계행렬식을 구성하면 식 (5)와 같이 된다.

$$\begin{bmatrix} A_{oo} & A_{of} \\ A_{fo} & A_{ff} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{fix} \\ \sigma_{variable} \end{bmatrix} = [A][\sigma] = [V]
 \tag{5}$$

- $A$  : 전위계수 행렬
- $A_{oo}$  : 최적화부 단위전하밀도가 최적화부 윤곽점에 미치는 전위
- $A_{of}$  : 고정부 단위전하밀도가 최적화부 윤곽점에 미치는 전위
- $A_{fo}$  : 최적화부 단위전하밀도가 고정부 윤곽점에 미치는 전위
- $A_{ff}$  : 고정부 단위전하밀도가 고정부 윤곽점에 미치는 전위
- $\sigma_{fix}$  : 최적화부의 전하밀도
- $\sigma_{variable}$  : 고정부의 전하밀도
- $V$  : 인가전압(Boundary Condition)

전극표면에서 전하밀도와 전위는 식 (6)와 같은 비례관계가 있기 때문에 전계조건이 주어지면  $\sigma_{fix}$ 는 고정된다.

$$E = K \sigma_{fix}
 \tag{6}$$

( $K$ 는 상수)

A행렬은 전위계수 행렬로서 각 요소는 B-Spline 곡선의 조정점을 미지변수로 포함하고 있다. 따라서 식 5)는 B-Spline 곡선의 조정점과  $\sigma_{variable}$ 을 미지변수로 갖는다. 따라서 식 5)는 비선형 연립 방정식이 되고 이 방정식의 오차를 최소화하는 해를 구하는 것으로 문제가 귀착된다. 오차판별을 위한 목적함수는 식 5)에서 식 7)과 같이 쓰여진다.

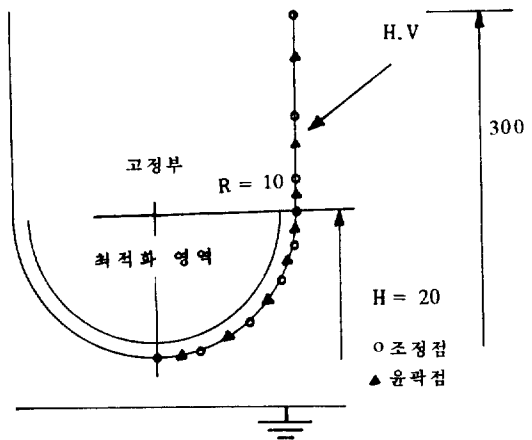


그림 3 계산 모델의 초기형상  
Fig. 3 Initial Contour of Electrode

$$\min \sum_{i=1}^{m+n} ([A_i][\sigma] - V_i)^2 \quad (7)$$

$A = [A_1, A_2, \dots, A_{m+n}]^T$   
 $V_i = \text{열벡터}[V]$ 의  $i$ 번째 요소

이 최적화 문제의 해법은 여러가지가 있으나 식

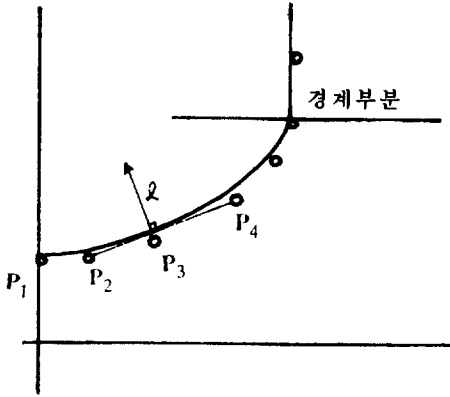


그림 4 조정점의 변위  
 Fig. 4 Displacement of Control Point.

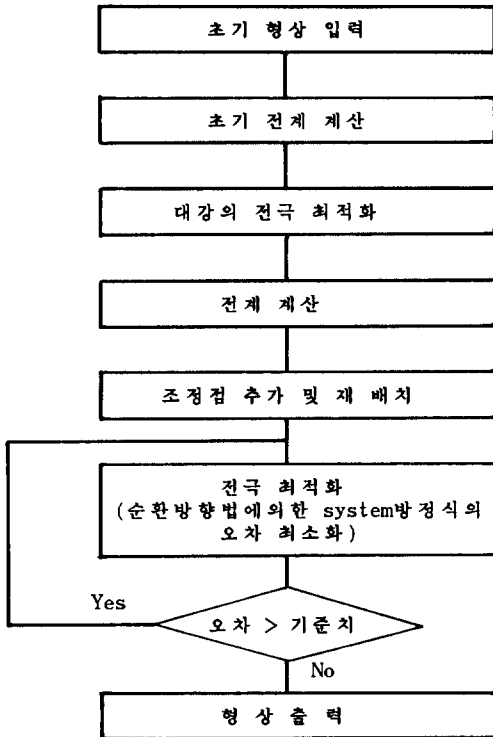


그림 5 흐름도  
 Fig. 5 Flow Chart.

(5)의 B-Spline 곡선의 특성에 따른 국부성을 이용해 순환방향법(Cyclic Direction Method)으로 해를 구하였다. 순환방향법은 기울기의 정보를 이용함이 없이 각 미지변수의 최적점을 차례로 선상탐색(line search)해가는 방법이다. 하나의 미지변수(조정점)의 최적점을 찾는데 있어서 이 변수가 변할 때 행렬 A의 변화부는 곡선의 국부성으로 예측이 가능하다. 따라서 이 변화부만을 탐색하게 된다. 결국 실제로 식 (7)의  $m+n$ 개의 오차식을 모두 탐색할 필요가 없어진다. 예를 들어 첫번째 조정점의 탐색에 있어서 A행렬의 변화부는 앞의 몇개의 행벡터(식 (7)의  $A_1, A_2, \dots$ )가 된다. 결국 선상탐색하는 오차식의 수가 줄어든다. 각변수에 의한 오차식의 합이  $10^{-4}$ 이하로 내려가면 수렴했다고 판정한다. 이렇게  $m$ 개의 조정점이 결정되면 식 (5)에서 식 (8)의 선형방정식이 유도된다.

$$[A_{ff}][\sigma_{variable}] = [V] - [A_{fo}][\sigma_{fix}] \quad (8)$$

식 (8)을 풀어  $[\sigma_{variable}]$ 을 결정한다.

초기 형상의 조정점은 최적화부에 체비셰프(Tchebyceff)영점 배치에 따라 분포시킨다. 이 경우 고정부와 최적화부의 경계부분에는 그림 4과 같이 많은 조정점이 배치되는데 이는 통상적으로 커지는 경계부분에서의 오차를 줄이는 효과를 갖는다. 조정점의 변이의 방향은 그림 4와 같다.

그림에서 보듯이 방향은 인접 두 조정점에 의하여 결정되며 결국 변수는 길이  $l$ 이되어 조정점 1개당 1개의 미지변수가 형성된다.

그림 (5)은 최적화 알고리즘에 흐름도(Flow Chart)이다.

위의 흐름도에서 알 수 있듯이 초기에는 적은 조정점으로 최적화하여 대강의 전극을 설계한다. 이 때 전체적인 조정점의 규정배열은 흐트러지게 되며 오차가 큰 부분이 발생한다. 따라서 위 전극형상의 조정점을 재 배치하고 오차가 큰 부분에 조정점을 추가하여 다시 정밀한 계산을 행한다.

### 6. 계산예

그림 3의 실린더 부분을 고정부로 하고 반구부를 최적화부로 하는 3차원 축대칭장모델에 다음 4가지 지정 전계를 조건으로 이를 만족시키는 전극을 설계하였다.

- 1) 균등 전계 분포(초기 형상의 전계 분포의 평균 전계치)

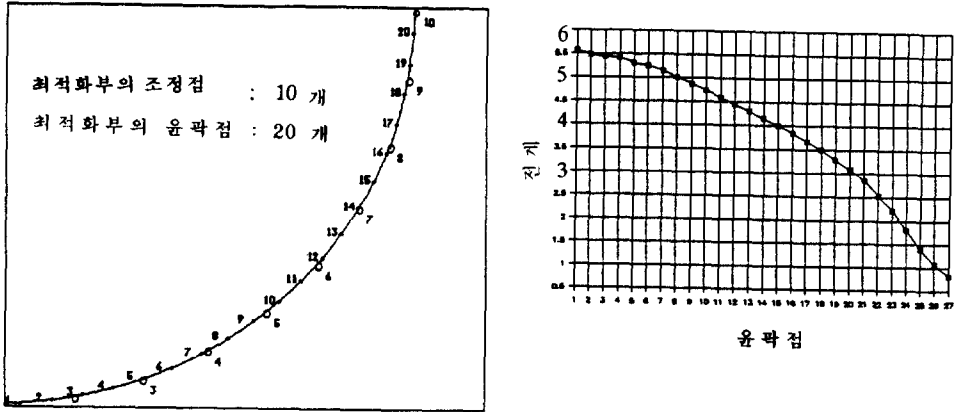


그림 6 초기전극과 초기전계  
Fig. 6 Initial Contour & Field.

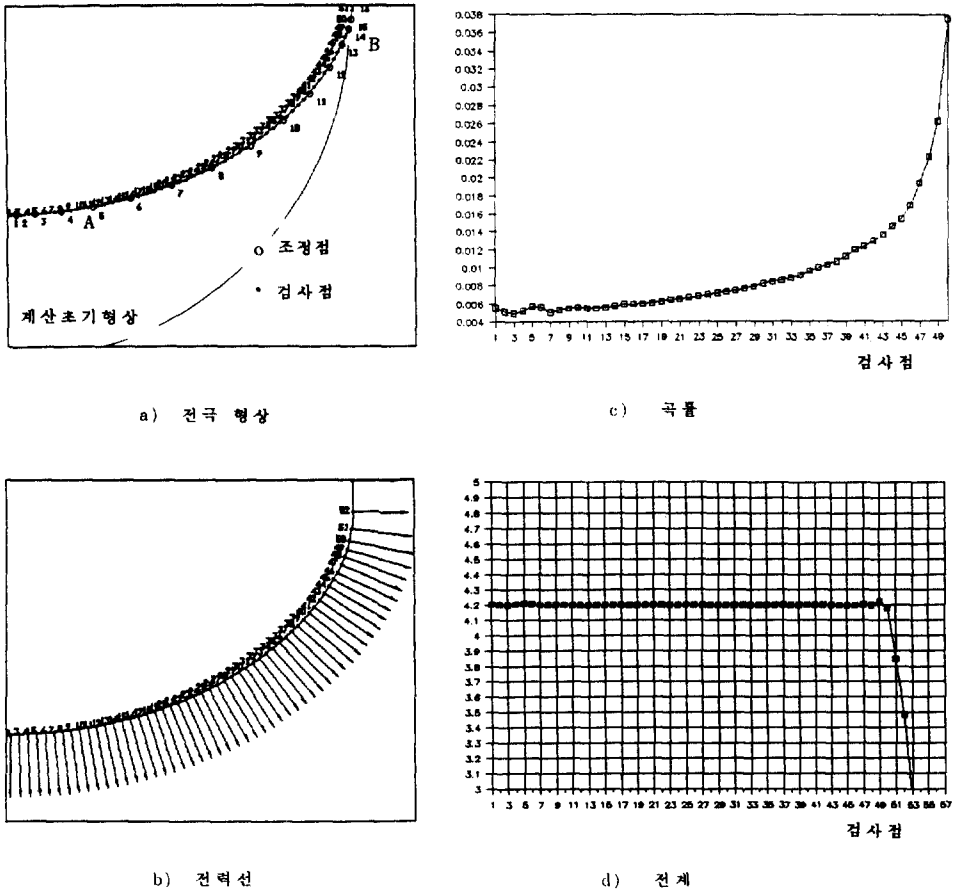
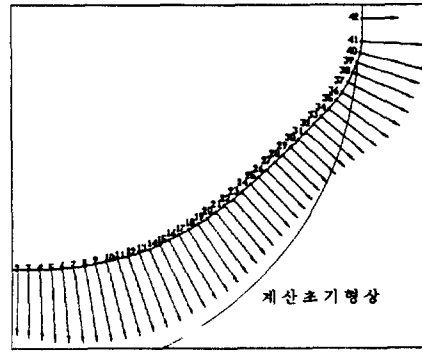


그림 7 균등전계  
Fig. 7 Uniform Field.

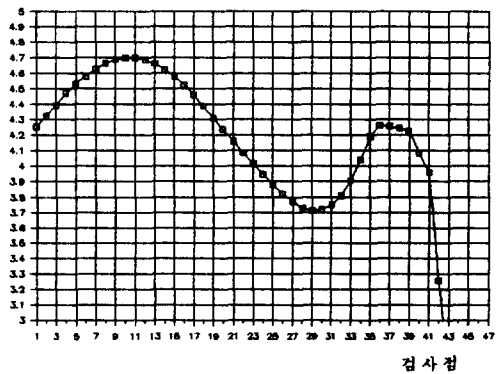
표 2 균등전계분포와 오차

Table 2 Uniform Field and Field-Deviation

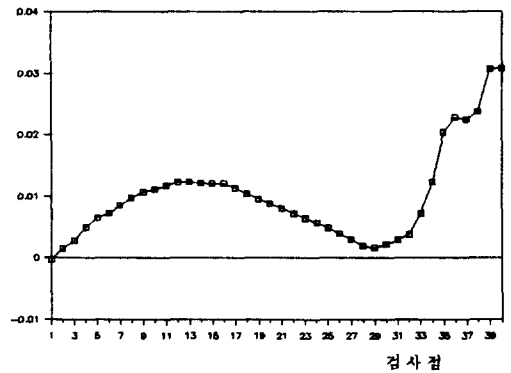
검사점	전계	전계오차[%]
1	4.2045	0.10821
2	4.2012	0.02864
3	4.2004	0.00909
4	4.2040	0.09539
5	4.2088	0.20834
6	4.2068	0.16141
7	4.2015	0.03527
8	4.2017	0.04106
9	4.2024	0.05682
10	4.2016	0.03894
11	4.2000	0.00043
12	4.1988	0.02845
13	4.1987	0.03087
14	4.1995	0.01216
15	4.2005	0.01211
16	4.2000	0.00047
17	4.1991	0.02243
18	4.1987	0.03025
19	4.1992	0.01999
20	4.2000	0.00099
21	4.2003	0.00677
22	4.2002	0.00493
23	4.2003	0.00664
24	4.2005	0.01226
25	4.2007	0.01687
26	4.2000	0.00025
27	4.1990	0.02415
28	4.1986	0.03338
29	4.1990	0.02468
30	4.1998	0.00441
31	4.1995	0.01102
32	4.1982	0.04396
33	4.1974	0.06151
34	4.1978	0.05316
35	4.1991	0.02248
36	4.1994	0.01364
37	4.1988	0.02381
38	4.1990	0.02464
39	4.2002	0.00535
40	4.2016	0.03822
41	4.2003	0.00749
42	4.1985	0.03499
43	4.1976	0.05755
44	4.1969	0.07473
45	4.1955	0.10673
46	4.1971	0.06874
47	4.2033	0.07890
48	4.1978	0.05256
49	4.2207	0.49253
50	4.1811	0.44917



a) 전극 형상



b) 전계

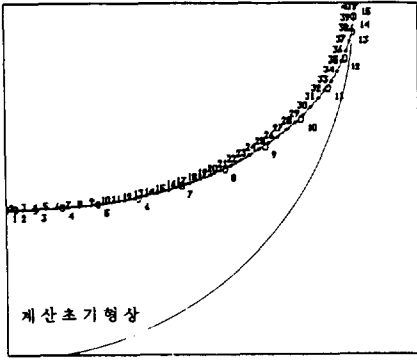


c) 곡률

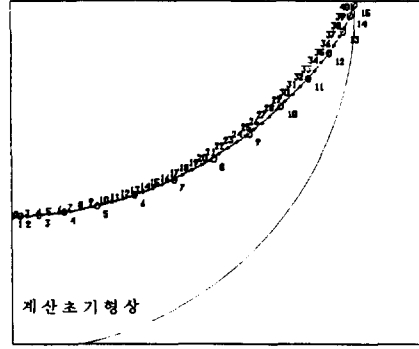
그림 8 정현전계  
Fig. 8 Sinusoidal Field.

- 2) 정현 전계 분포  $\left(\frac{E_{max} - E_{min}}{E_{max}} \times 100 = 20\%\right)$
- 3) 증가 전계 분포  $\left(\frac{E_{max} - E_{min}}{E_{max}} \times 100 = 16\%\right)$

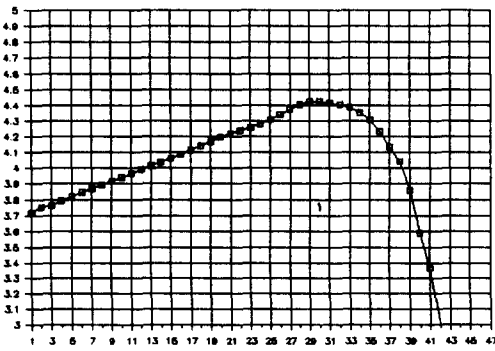




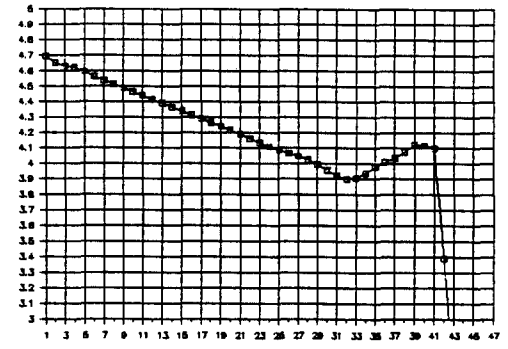
a) 전극 형상



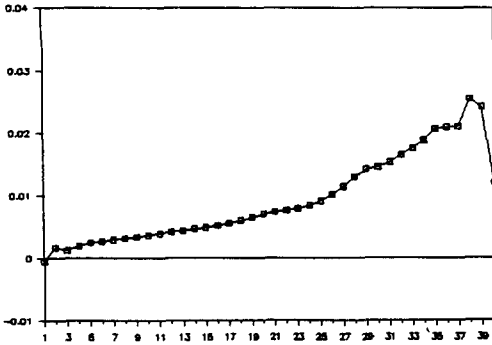
a) 전극 형상



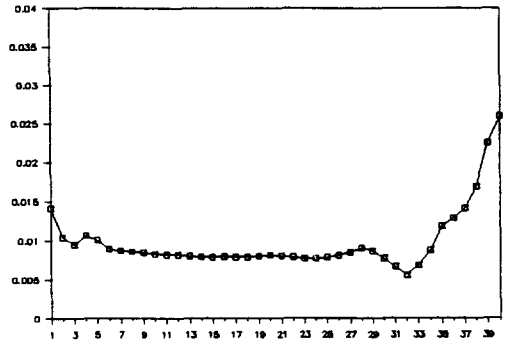
b) 전계



b) 전계



c) 곡률



c) 곡률

그림 9 증가전계  
Fig. 9 Increasing Field.

그림 10 감소전계  
Fig. 10 Decreasing Field.

4) 감소 전계 분포  $\left( \frac{E_{max} - E_{min}}{E_{max}} \times 100 = 17\% \right)$

다음으로 위 4가지 모델의 가우시안 곡률(Gaussian Curvature=최대곡률×최소곡률)을 계산하여

전계와 곡률과의 관계를 도시하였다. [7]

그림 6은 계산에 사용된 초기전극과 초기 전계 분포이다. 초기 전극은 조정점 10개로 대강의 반구(반지름 10, 중심 높이 20)를 형성하였다. 4가지 모델 모두 그림 6의형상과 전계를 초기치로 사

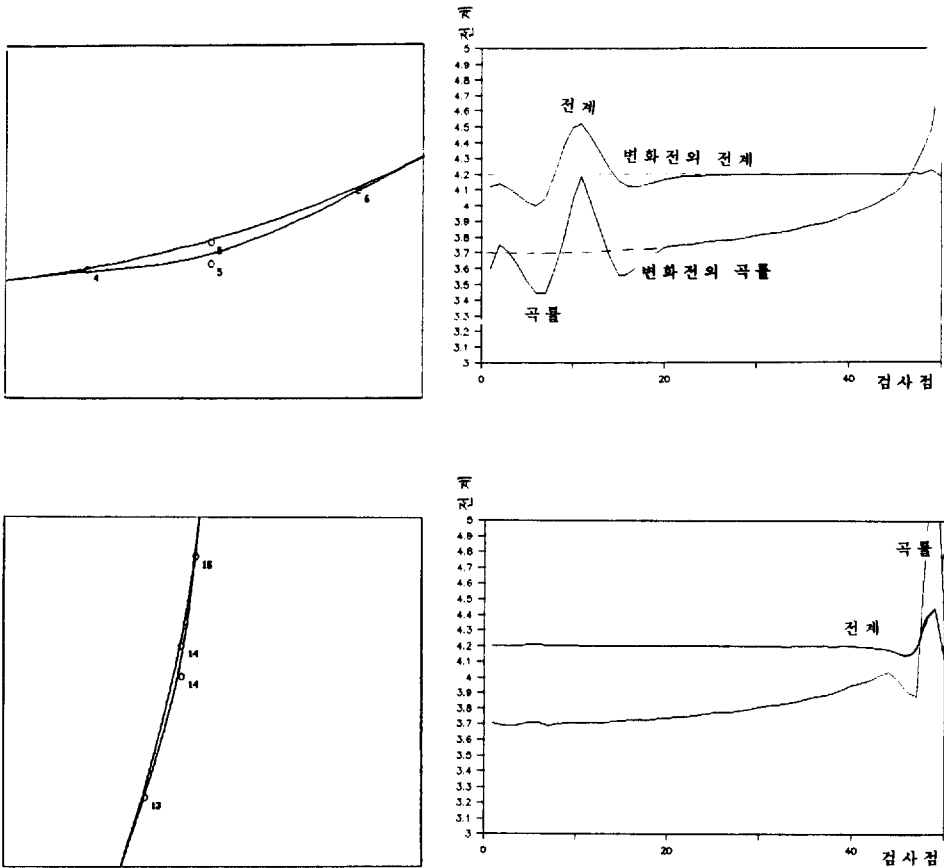


그림 11 전계와 곡률  
Fig. 11 Field & Curvature.

용하였다.

10개의 조정점으로 최적화를 행하여 대강의 2차 초기 형상을 얻은 후 조정점 5개를 증가시켜 총 15개의 조정점을 미지변수로 해를 구하였다. 계산 후 결과의 검증에 위해 최적화부에 40~50개의 검사점을 두어 경계조건(전극의 전위)을 만족시키는 전하밀도를 구함으로 전계조건이 만족되는지를 확인하였다.

그림 7는 균등전계 조건을 만족시키는 전극과 그때의 곡률이다. 이 경우 전계 오차는 0.5%이하로 지정된 전계 조건과 일치함을 알 수 있다. 오차식은 식 (9)와 같다. 표 2는 최적화된 형상의 전계분포와 오차이다.

$$Error[\%] = \frac{f_{max,min} - f_{fix}}{f_{fix}} \times 100 \quad (9)$$

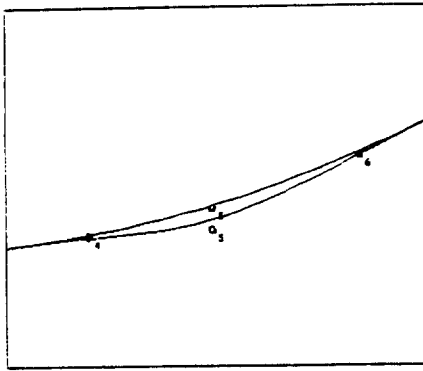
$f_{max,min}$  : 검사점에서 최대 혹은 최소 전계값

$f_{fix}$  : 지정된 전계값

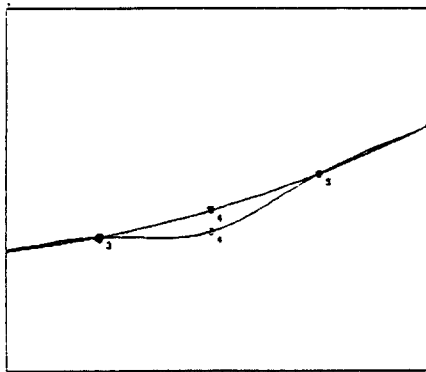
그림 8은 정현전계 분포를 조건으로 형상을 설계한 예이다. 40번 검사점까지 한 주기의 정현파를 설계조건으로 하였다. 그러나 모든 경우 전극이 주어진 설계조건대로 설계된다고 볼 수 없기 때문에 2차 초기 형상을 얻을 때 지정된 전계 조건도 약간의 수정이 필요하다.

그림 9과 10은 각각 증가 및 감소 전계 분포를 갖는 전극과 이 때의 곡률이다. 위의 4가지 모델에 대해 B-Spline 곡선을 사용해 전극을 설계한 결과 만족한 결과를 얻을 수 있음을 확인하였다.

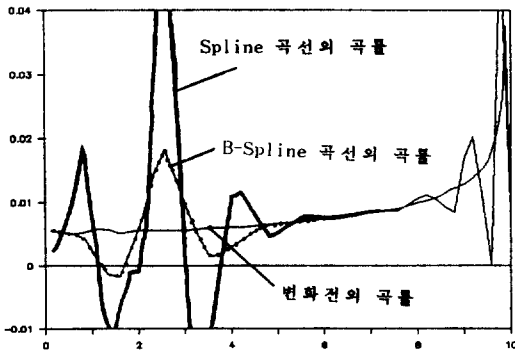
그림 7-10까지의 결과를 보면 곡률과 전계의 그래프가 매우 유사한 형태를 취하고 있음을 알 수 있다. 곡률과 전계와의 관계를 좀 더 살펴보기 위해 그림 7의 a)의 A, B에서 조정점(5번, 14번)의 y 좌표를 0.1만큼 아래로 이동시켜 임의로 곡률을



a) B-Spline 곡선



b) Spline 곡선



c)

그림 12 전계와 곡률  
Fig. 12 Field & Curvature.

변화시켰다. 그림 11은 이때 변화된 전극형상, 곡률과 전계와의 관계를 도시하였다.

그림 7-11까지의 곡률과 전계의 관계에서 우리는 2가지 사실을 알 수 있다. 첫째전계와 곡률은

어느 정도 비례관계를 가지며 움직인다. 둘째 전극 표면의 작고 국부적인 변화가 큰 전계오차를 유발시킨다.

위 결과를 토대로 어떤 곡선이 고전압 전극 형상 함수로 알맞는가를 보자. 우선 곡률의 연속조건을 들 수 있다. 이는 함수의 2계 미분 연속을 의미한다. 따라서 2계 미분이 불연속인 곡선은 그 점에서 큰 전계 변화가 예상된다. (예 : 직선, 소구간 허미트곡선)

다음은 Spline 곡선을 예로 들어 진동과 국부성의 관점에서 살펴보자. 그림 12는 B-Spline 곡선의 조정점과 Spline 곡선의 절점이 그림 7의 a)의 A영역에서 각각 0.1만큼 이동시의 곡률의 변화를 나타낸다.

그림 12의 b)와 c)의 Spline 곡선의 진동을 보

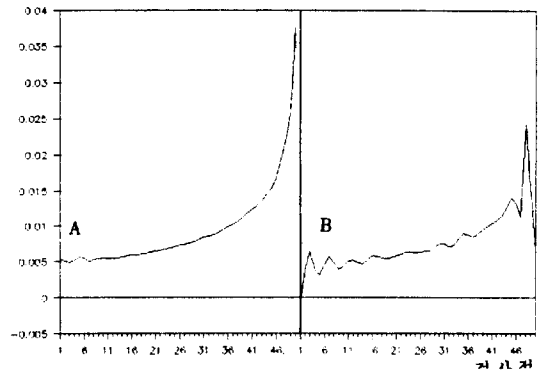


그림 13 곡률  
Fig. 13 Curvature.

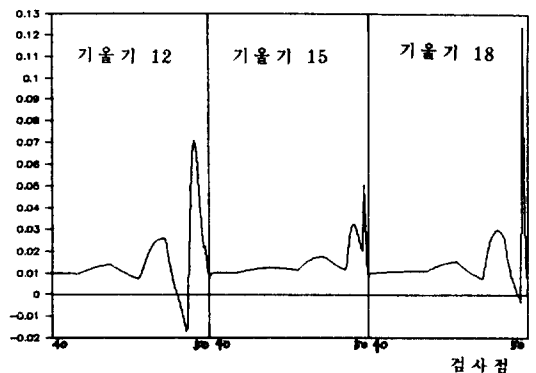


그림 14 곡선의 경계조건에 따른 곡률변화  
Fig. 14 Change of Curvature under Various Boundary Conditions of Curve.

여준다. 이는 c)에서 보듯이 곡률이 4번 음과 양의 값으로 바뀌어 전극에 요철을 발생시킴을 알 수 있다. 결국 전극의 전계는 곡률과 비례하여 변하여 불안정한 전계를 만들 뿐 아니라 최적화 작업의 수렴성에 좋지 않은 영향을 미친다. 또한 절점의 변화량이 커지면 전체곡선에 미치는 영향이 커진다. 이에 반해 B-Spline 곡선의 경우 영향을 미치는 구간이 정해져 있어 전체 전계치의 큰 변화없이 최적화를 행할 수 있다.

그림 13의 A는 평등 전계를 조건으로 B-Spline 곡선을 이용해 조정점 15개로 최적화한 전극의 곡률이고 B는 절점 25개로 최적화한 전극을 Spline 곡선으로 보간했을때의 곡률이다. 후자의 경우 검사점 40번까지의 전계오차는 2%정도이다.

검사점 40-50번까지의 전계는 최적화부와 고정부를 어떤 기울기로 연결하느냐에 따라 변동된다. 곡률을 검사해 본 결과 기울기가 15근처에서 가장 매끈한 전극이 생성됨을 알 수 있다. 그림 14은 기울기를 12, 15, 18세가지로 주어 그때의 곡률은 검사한 결과이다. 그림 13의 A곡률과 비교시 변화가 크며 이에 따른 전계변화도 크다는 것을 예상할 수 있다.

위 그래프에서 알 수 있듯이 잘못된 기울기를 조건으로 줄 경우 전계 오차가 발생함을 알 수 있다. 이는 곡선을 정의하기 위해  $n$ 차 미분계수를 사용하는 곡선(예: Osculating 곡선)은 형상이 아주 매끈하여 미분계수를 예측하기 쉬운 경우나 경험적으로 값을 알고 있는 경우를 제외하고는 미분계수들이 미지변수가 됨을 알 수 있다. 본 논문에서 사용한 B-Spline 곡선의 경우 시작부분의 미분계수없이 미지변수로서 조정점만을 이용하여 형상을 설계하였다. 계산은 PC/386에서 행하였으며 1회 수렴시간은 미지변수가 15개 정도일때 1시간 정도의 시간이 소요되며 반복회수(15개 미지변수의 선상탐색을 1회 계산으로 함)는 네가지 모델 모두 20회 미만이었다. 그러나 위의 계산 시간은 초기 형상에 따라 크게 달라진다. 또한 주어진 전계 조건의 실현 가능 여부에따라서 지정 전계조건

의 수정이 필요하므로 통상 2~3회의 전체적인 수렴과정을 거친다.

## 7. 결 론

이상에서 본 바와 같이 고전압 전극 설계에는 매끈함과 진동이 적은 B-Spline 곡선이 유용하며 또 실제 이를 사용하여 적은 변수로 균등전계의 경우 0.5%이하의 최대전계오차를 갖는 고정도의 전극을 설계하였다. 하지만 앞으로 다매질장이나 일반 3차원장으로 최적화 대상의 확대를 위해 B-Spline과 Rational-B-Spline의 곡선 및 곡면(3차원)의 연구, 국부성을 이용한 수렴알고리즘의 개발등을 앞으로의 과제로 남기고 있다.

## 참 고 문 헌

- [1] Nazar H. Malik, "A Review of the Charge Simulation Method and its Applications" IEEE Trans. EI. 24, 1, pp. 3~20, 1989. 2.
- [2] 河野照哉, 宅間 董, "數値電界計算法", コロナ社, 1980, pp. 51~63.
- [3] H. Singer, "Computer of Optimized Electrode Geometry", 3rd ISH Symp., Milan, No. 11 ~06, 1979. 8.
- [4] D. Metz, "Optimization of High Voltage Field", 3rd ISH Symp., Milan, No. 11~12, 1979. 8.
- [5] 坪井 始, 美 降吉, "表面電荷法에 의한 電極形狀의 最適化에 대하여" 電學論 A, 103. 12, pp. 675~682, 1983.
- [6] Richard L. Burden et al., "Numerical Analysis", Prindle, Weber & Schmid, 1981, pp. 101 ~119.
- [7] Michael E. Mortenson, "Geometric Modeling", John Wiley & Sons. 1985, pp. 113~149, pp. 282~285.