

3차원 적응 유한요소법을 위한 사면체 요소세분에 관한 연구

A Study on Mesh Refinement for 3-D Adaptive Finite Element Method Using Tetrahedral Element

金 炯 碩* · 鄭 炫 教** · 韓 松 曄***
(Hyeong-Seok Kim · Hyun-Kyo Jung · Song-Yop Hahn)

요 약

본 논문에서는 3차원 적응유한요소법을 위한 요소세분 방법을 다루었다. 먼저 삼각형요소에 대해 이분법에 기초한 요소세분방법을 언급하였고, 이분법에 근거한 사면체 요소를 분할하는 새로운 3차원 사면체요소 세분 방법을 제시하였다. 2차원 경우에는 이미 알려진 바와같이 이분법에 의해 삼각형요소를 세분하였을 경우 세분된 요소망 최소각이 초기요소망 최소각의 1/2보다 크거나 같다. 즉 세분된 요소망의 삼각형 요소 질은 초기요소망의 요소 질에 의존한다. 3차원의 경우 사면체 요소로 분할된 요소망에서 새로제안한 세분방법을 적용해, 입체각을 비교해본 결과 초기 사면체 요소망의 최소입체각의 1/2보다 세분된 요소망의 최소입체각이 작지 않음을 보여주었다. 즉 새로 제안한 세분 방법에 의해 세분된 요소망은 초기요소망 정도의 사면체 질을 유지함을 알 수 있다. 따라서 본 논문에서 제안한 3차원 사면체요소의 새로운 세분방법은 3차원 적응유한요소법에 적용시 필요한 하나의 요소 세분 방법으로 유용될 수 있으리라 사료된다.

Abstract- This paper presents a mesh refinement scheme for 3-D adaptive finite element method. Firstly, the refinement of triangular meshes based on the bisection of triangles is discussed. And a new method to refine tetrahedral meshes employing the bisection method is presented. In two dimensional cases, it has been noted that all angles in the triangular meshes refined by the bisection method are greater then or equal to half the smallest angle in the original meshes. Through the examples where the newly proposed method is applied to three dimensional cases, it is shown that regarding the solid angles, the method gives nearly the same result as that in the two dimensional case. Accordingly, it can be concluded that the proposed method will be useful in the mesh refinements for 3-D adaptive finite element method.

1. 서 론

유한요소법이 전자장 문제해석에 도입된[1, 2]이

래 1980년대 초반까지는 전자장문제를 유한요소법을 이용하여 정식화(formulation)하는 방법이 주로 연구되었다. 그러나 해석 모델이 복잡해지고

유한요소 해석 결과의 정확도를 높이기 위해 방대한 요소 분할 자료가 필요하게 됨에 따라 이를 용이하게 처리할 수 있는 자동 요소 분할 방법에 대한 연구가 진행되었다[3, 4].

자동요소분할은 기하학적 입장에서 요소를 나누었으므로 유한 요소법에 의해 계산된 결과의 정확도를 높이려면 해석 모델에 따라 해의 변화가 심한 부분을 예측하여 많은 요소를 집중시켜야 하는데 이는 사용자의 경험을 요구하며, 경험자라 하여도 쉽지않다. 이를 극복하기 위해 최근 들어서는 사용자의 간섭없이 해의 변화가 심한 부분에 효과적인 요소분할로 계산 결과의 정확도를 높일 수 있는 적응 유한 요소법이 대두 되었다.

적응 유한 요소법은 해석 모델을 개략적으로 분할한 초기 요소망에 대해 유한 요소법을 적용하여 해를 구한 다음, 오차를 추정하여 오차가 상대적으로 큰 요소들을 세분하고 세분된 요소망에 위의 과정을 반복 수행하는 방법이다. 따라서 적응 유한요소법을 구현하기 위해서는 유한 요소 해석 결과로부터 실제 오차를 대신할만한 오차 추정 방법과 세분될 요소를 요소의 질이 떨어지지 않도록 하는 적합한 세분방법이 필요하다. 2차원의 경우에 대한 많은 연구가 진행되었다[7, 8, 9, 10].

그러나 실제 해석 모델은 3차원 형상을 가지므로 궁극적으로 3차원 적응 유한 요소해석이 필요하나 이에 대한 연구는 아직 초기 단계이다[11]. 이에 본 논문에서는 두가지 중요한 연구대상 중에서 세분방법으로 2차원 이분법에서 착안한 3차원의 기본모양인 사면체 요소를 세분하는 방법을 연구하였다.

이해를 돕기 위해 먼저 기존의 2차원 이분법에 대해 설명하였고 본 논문에서 연구된 사면체 요소 세분 방법을 기술하였다. 그리고 직육면체를 6개의 요소로 분할한 초기 요소망에 본 세분 방법을 적용하여 보았다.

2. 요소세분원리

이분법을 사용하여 요소를세분할 경우 최종요소망은 초기요소망 정도의 질(quality)을 유지하게 된다[12]. 따라서 초기요소망의 질은 매우 중요시된

다. 먼저 2차원 삼각형요소 세분에 대한 이분법 적용과정을 설명한 다음 본 논문에서 제시한 3차원 사면체 요소세분 방법에 대해 기술하였다.

2.1 2차원 삼각형 요소세분

2.1.1 삼각형요소의 세분방법

그림 1의 꼭지점 A, B, C로 이루어지는 삼각형을 $T(\overline{AC} < \overline{BC} < \overline{AB})$ 라 하자. 이분법에서는 요소 세분을 위해 변의 중간에 점을 발생시키게 되는데 이때 3가지 경우가있다. 즉 그림 1의 (a)와같이 가장 긴변 (\overline{AB})에만 한점 발생시키는 경우, 그림 1의(b)와 같이 가장 긴변과 중간변(\overline{BC})에 한점씩 두점을 발생시키는 경우 및 그림 1의(c)와 같이 세변 모두에 각각 한점씩 3점을 발생시키는 경우들이다.

첫번째 경우로서 변 \overline{AC} 의 중점D를 발생시켜 그림 1의 (a)에서와 같이 삼각형 T를 두개의 삼각형 ACD와 BCD로 나눈다. 두번째 경우로서 두개의 긴 변, \overline{AB} 와 \overline{BC} 에 중점 D와 E를 발생시켜 그림 1의 (b)에서와 같이 세개의 삼각형 ACD, CDE 및 BDE로 나눈다. 마지막으로 삼각형 T의 세변 모두에 중점 D, E와 F를 발생시켜 그림 1의 (c)에서와 같이 네개의 삼각형 ADF, CDF, CDE 및 BDE로 나눈다.

요소망의 질은 유한 요소 계산 결과의 정확도에 영향을 미치므로 요소의 질이 떨어지지 않아야 한다[13]. 삼각형 요소에 대해 그림 1의 방법으로 세분하면 초기요소망 정도의 질을 유지한다. 즉 초기요소망의 삼각형 요소중 가장 작은 각을 α_0 라 하고 그림 1의 방법에 의해 i번째 세분된 요소망 중 가장 작은 각을 α_i 라하면

$$\alpha_i \geq \frac{\alpha_0}{2} \tag{1}$$

인 관계가 성립한다[12]

2.1.2 인접요소의 세분방법

어떤 요소가 세분되면 그 요소에 인접된 요소도 변에 점이 발생된 경우이므로 세분되어야만 한다. 이때 두가지 경우가 존재한다. 먼저 그림 2의 (a)와 같이 세분된 삼각형 ABC에 인접해 있는 삼각형 ABD의 가장 긴변 \overline{AB} 가 인접해 있는 경우에는 삼각형 ABD를 두개의 삼각형 ADP와 BDP로 나눈다.

그리고 두번째 경우로서 그림 2의 (b)와 같이 세분된 삼각형 ABC에 인접해 있는 삼각형 ABD

*正 會 員 : 順天郷大 工大 電氣工學科 專任講師 · 工博

**正 會 員 : 江原大 工大 電氣工學科 副教授 · 工博

***正 會 員 : 서울大 工大 電氣工學科 教授 · 工博

接受日字 : 1989年 12月 26日

1次修正 : 1990年 5月 25日

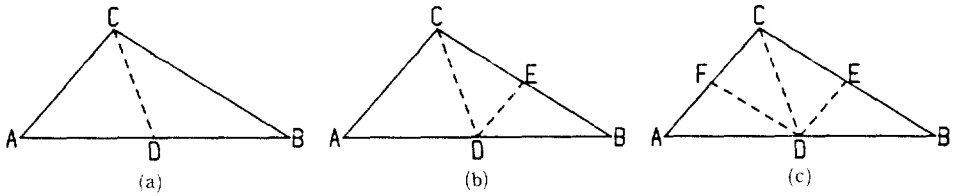
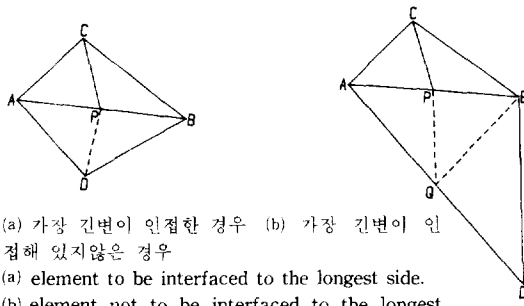


그림 1 이분법에 의한 삼각형요소 분할도
 Fig. 1 Refinement of triangular element by the bisection method



(a) 가장 긴변이 인접한 경우 (b) 가장 긴변이 인접해 있지않은 경우
 (a) element to be interfaced to the longest side.
 (b) element not to be interfaced to the longest side.

그림 2 인접요소의 분할도
 Fig. 2 Refinement of the adjacent triangular element.

의 가장 긴변 \overline{AD} 가 인접해 있지 않고 변 \overline{AB} 가 인접해 있는 경우에는 요소 ABD의 가장 긴변 \overline{AD} 에 점 Q를 발생시켜 세개의 삼각형 APQ, BPQ, BDQ로 나눈다. 이때 인접한 삼각형들에 대한 요소세분과정은 그림 2의 (a)와 같이 인접한 삼각형들의 가장 긴 두변이 만날때까지 계속된다. 여기서 그림 2의 (b)의 인접 삼각형 ABD에서 \overline{AB} 가 가장 작은 변인 경우라면 그림 1의 세가지 세분방법에 속하지 않게 된다.

그림 1의 (c)에서 선분 \overline{DE} 가 없어진 경우에 속하게 된다. 이때 삼각형 ADF는 초기 삼각형 ABC와 닮은 꼴이고 삼각형 CDF는 삼각형 CDE와 합동이므로 식(1)의 관계를 유지함을 알 수 있다. 즉 인접요소 또한 초기 요소망 정도의 질을 유지함을 알 수 있다.

2.2 3차원 사면체 요소세분

2.2.1 사면체 요소의 세분방법

사면체 요소세분은 사면체 면(삼각형)을 기존의 이분법에 의해 세분하고, 사면체내에 새로운 삼각형을 정의한 후 네개의 삼각형을 각각 취하여 사면체들을 정의함으로써 이루어진다. 이때 세분을

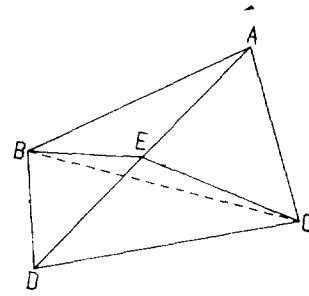


그림 3 한점이 발생된 경우의 분할도
 Fig. 3 Refinement of tetrahedron in case of generating a point

위한 점의 발생은 2차원의 경우와 마찬가지로 각 변의 중점에 발생시킨다. 따라서 하나의 사면체에 대해 한 개에서 부터 여섯개까지 점을 발생시킨 경우들에 대한 요소세분을 생각할 수 있다.

(1) 한점이 발생된 경우

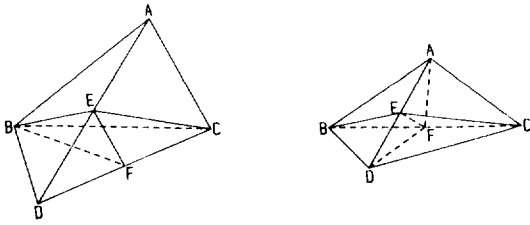
그림 3의 점 A, B, C, D로 이루어진 사면체를 H라 하자 사면체 H의 가장 긴 변을 \overline{AD} 라 하고 \overline{AD} 의 중점에 점 E가 발생된 경우를 분할하자.

사면체H는 네개의 면 ABD, ACD, BCD, ABC로 구성되는데 점 E가 발생된 모서리 \overline{AD} 를 공유하는 삼각형 ABD와 ACD를 각각 두개의 삼각형 ABE, BDE와 ACE, CDE로 나눈다. 따라서 사면체 H를 면 ABE, BCE, ACE, ABC로 이루어지는 사면체 ABCE와 면 BDE, CDE, BCE, BCD로 이루어지는 사면체 BCDE의 두개의 사면체로 나눌 수 있다.

(2) 두점이 발생된 경우

i) 두점이 한면에 속한 경우

그림 4의 (a)와 같이 사면체 H의 가장 긴변 \overline{AD} 와 두번째 긴변 \overline{DC} 가 한면에 속한 경우로서 각각 중점에 점 E와 F가 발생된 경우를 분할하자. 사면체 H의 면 ABD를 두개의 삼각형 ABE와 BDE로 나누고 면 BCD를 두개의 삼각형 BDF와 BCF로 나누고면 ACD를 세개의 삼각형 ACE, CEF, DEF로 나누며 면 ABC는 그대로 둔다. 그



(a) 두점이 한 면에 속한 경우 (b) 두점이 각각 다른 면에 속한 경우
 (a) The case of generating two points on the same face.
 (b) The case of generating two points on the different face.

그림 4 두점이 발생된 경우의 분할도
Fig. 4 Refinement of tetrahedron in case of generating two points

리고 사면체 내에서 두개의 삼각형 BEF와 BCE를 정의한다. 따라서 사면체 H를 면 ABE, BCE, ACE, ABC로 이루어지는 사면체 ABCE, 면 BCE, BEF, BCF, CEF로 이루어지는 사면체 BCEF와 면 BEF, BDE, DEF, BDF로 이루어지는 사면체 BDEF의 세개의 사면체로 나눌 수 있다.

ii) 두점이 각각 다른 면에 속한 경우

그림 4의 (b)와 같이 사면체 H의 가장 긴 변 AD와 두번째 긴 변 BC가 각각 다른 면에 속한 경우로서 중점에 E와 F가 발생된 경우를 생각해 보자.

우선 사면체의 H의 ABD를 두개의 삼각형 ABE, BDE로 나누고 면 BCD를 두개의 삼각형 BDF, CDF로 나누고, 면 ADC를 두개의 삼각형 ACE, CDE로 나누고, 면 ABC를 두개의 삼각형 ABF, ACF로 나눈다. 그리고 사면체 H 내의 네개의 삼각형 AEF, BEF, CEF와 DEF로 정의한다. 따라서 사면체 H를 면 ABE, BEF, AEF, ABF로 이루어지는 사면체 ABEF, 면 BDE, DEF, BEF, BDF로 이루어지는 사면체 BDEF, 면 CDE, CEF, DEF, CDF로 이루어지는 사면체 CDEF와 면 CEF, ACF, AEF, ACE 이루어지는 사면체 ACEF의 4개의 사면체로 나눌 수 있다.

두점이 발생된 경우에 대해 다른 각도에서 다시 한번 다루자. 그림 4의 (a)에서보면 가장 긴 변 AD의 중점 E와 맞은편 변 BC로 이루어지는 면에 의해 두개의 사면체 ABCE와 BCDE로 나누어지고 사면체 BCDE에 두번째 발생된 점 F가 있어 F의 맞은편 변 BE와 F에 의해 두개의 사면체 BCEF와 BDEF로 나눌 수 있음을 알 수 있다.

그림 4의 (b)는 가장 긴 변 AD중점에 점 E가

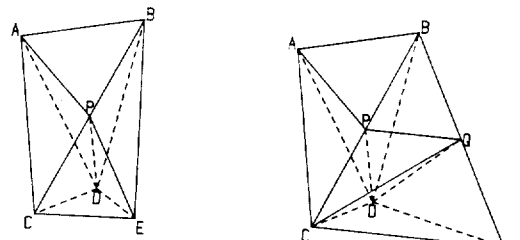
발생되고 또한 맞은편에 점 F가 발생된 경우로 점 E와 맞은편 변 BC로 이루어지는 면에 의해 두개의 사면체 ABCE와 BCDE로 나누어지고, 분할된 두사면체의 공통인 변인 BC에 점 F가 있으므로 사면체 ABCE는 점 F와 맞은편 변 AE로 이루어지는 면에 의해 두개의 사면체 ABEF와 ACEF로 나누어지고 사면체 BCDE는 점 F와 맞은편 변 ED로 이루어지는 면에 의해 두개의 사면체 BDEF와 CDEF로 나누어진다.

사면체에 3-6점 까지 발생된 경우 세분방법도 앞에서 설명한 것과 같이 두점이 발생된 경우 세분방법과 유사한 방법 즉 가장 긴변에 발생된 점과 맞은편 면에 의해 두개의 사면체로 나누고, 나누어진 사면체에 대해서도 똑같은 과정을 반복하여 사면체를 세분할 수 있다.

2.2.2 인접 사면체의 분할 방법

그림 5에서 세분된 사면체는 ABCD이고 여기에 인접한 사면체가 BCDE라고 하자. 그림 5의 (a)와 같이 사면체 ABCD의 가장 긴 변 BC에 점 P가 발생되었을 경우에 BC가 인접 사면체 BCDE에서도 가장 긴변이면 사면체 BCDE를 두개의 사면체 CDEP, BDEP로 나눈다.

그리고 그림 5의 (b)와 같이 ABCD에 인접 사면체 BCDE의 가장 긴변이 BC가 아닌 경우에는 가장 긴 변 BE의 중점에 점 Q를 발생시켜 세개의 사면체 CDEQ, CDPQ와 BDPQ로 나눈다. 이러한 세분 과정은 그림 5의 (a)의 경우와 같이 가장 긴 변이 인접한 경우가 될때까지 계속된다. 이와같이 세분된 요소망의 질은 사면체들의 꼭지점에 대한 입체각들을 조사함으로써 판단할 수 있다.



(a) 가장 긴변이 인접해 있는 경우 (b) 가장 인접해 있지 않은 경우
 (a) Element to be interfaced to the longest side.
 (b) Element not to be interfaced to the longest side.

그림 5 인접 요소의 분할도
Fig. 5 Refinement of the adjacent tetrahedral element

표 1 임의의 한 요소에 6개의 점을 발생시키는 경우

Table 1 The case of generating six points on a tetrahedron

세분적용횟수	전체 요소수	최소 입체각
0	6	0.2388
1	26	0.1630
2	87	0.1630
3	153	0.1251
4	238	0.1251
5	323	0.1251
6	408	0.1251
7	493	0.1251
8	578	0.1251

표 2 모든 요소에 1-6개의 점을 발생시킨 경우

Table 2 The case of generating from one to six points on each element

세분적용횟수	전체 요소수	최소 입체각
0	6	0.2388
1	33	0.1630
2	199	0.1630
3	1309	0.1270
4	8741	0.1270

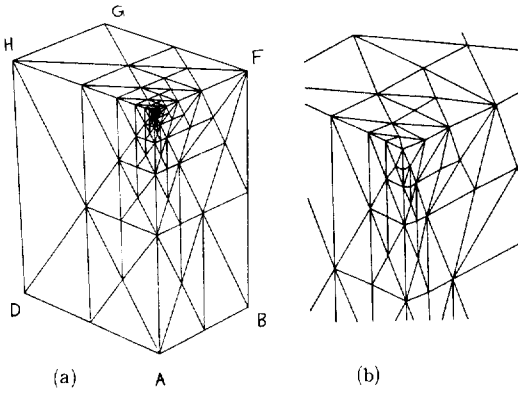


그림 8 세분된 최종 요소망
Fig. 8 Final Refined mesh

그림 6의 초기요소망에 대해 1점~6점까지 골고루 요소에 발생시켜 본 세분방법을 반복 적용한 결과가 표2에 나타나 있다.

표2에서 보는 바와 같이 최소입체각이 초기요소망의 반 값 정도를 가짐을 알 수 있다. 세분방법이 4번 적용된 최종요소망이 그림 9에 나타나 있다. 이때 최소사면체의 체적은 $7.32 \times 10^{-2} [cm^3]$ 정도의 크기를 가졌다.

표1, 표2에서 보는 바와같이 본 방법에 의해 요소를 세분해 갔을 경우에 초기요소망의 최소입체각의 크기의 1/2 정도로 최소입체각이 유지됨을 알 수 있다. 즉 본 세분방법의 적용시 초기요소망의 사면체가 가지는 정도의 사면체의 질이 유지됨을 알 수 있다.

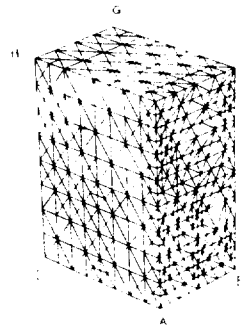


그림 9 세분된 최종 요소망
Fig. 9 Final refined mesh

4. 결 론

본 논문에서는 3차원 적용 유한 요소법을 위한 사면체 요소의 세분 방법을 제안하였다. 제안된 방법의 요소세분 과정은 2차원 이분법을 근거로 하여 연구되었다. 먼저 사면체의 모서리의 중점에 점을 발생시키고 각 면(삼각형)을 기존의 2차원 이분법에 의해 분할한 다음 사면체 요소를 분할하였다.

본 세분 알고리즘의 타당성을 조사하기 위해 6개의 사면체로 분할된 직육면체의 초기 요소망을 여러가지 경우에 대해 본 세분 방법으로 분할하여 보았다. 세분된 요소망의 최소 입체각을 조사해 본 결과 초기 요소망의 최소 입체각의 1/2값 정도의 크기를 유지하였다.

그러므로 2차원 이분법에서 착안한 3차원 요소 세분 방법에 의하여 분할된 요소망은 초기 요소망 정도의 사면체 질을 유지한다.

따라서 본 논문에서 제안한 사면체 요소 세분

방법은 3차원 적용 유한 요소법의 적용시 필요한 하나의 사면체 요소 세분 방법으로 유용하리라 사료된다.

앞으로는 3차원 적용 유한 요소 알고리즘의 적용을 위해 중요한 연구 대상의 하나인-본 논문에서 연구된 사면체 요소 세분방법에 적합한-오차 추정방법에 대한 연구가 필요하다.

본 연구는 1989년도 한국과학재단의 목적 기초 연구비에 의하여 이루어졌음을 알려 드립니다.

참 고 문 헌

[1] Z.J. Cendes and P.Silvester, "Numerical solution of dielectric loaded waveguides: I- Finite-element analysis", IEEE Trans. Microwave Theory Tech., vol. MTT-18, pp. 1124 ~1131, Dec. 1970.

[2] P. Daly, "Hybrid-mode analysis of microstrip by finite-element methods", IEEE trans. Microwave Theory Tech., vol. MTT-19, pp. 19~25, Jan. 1971.

[3] W.C. Thacker, "A brief review of techniques for generating irregular computational grids", Int. J. Num. Math. Engng., vol. 15, pp. 1335~1341, 1980

[4] J.F. Berkery, R.K. Barton and A. Konrad, "Automatic finite-element grid generation for motor design analysis", IEEE Trans. on Mangnetics, vol. MAG-20, no. 5, pp. 1924 ~1926, Sep. 1984.

[5] A. Bowyer, "Computing Dirichlet tessellation", The Computer Journal, vol. 24, no. 2, pp. 162~166, 1981.

[6] D.F. Watson. "Computing the n-dimensional Delaunay tessellation with application to Voronoi polytopes", The Computer Journal, vol. 24, no. 2, pp. 167~172, 1981

[7] Z.J. Cendes, D. Shenton and H. Shahnasser, "Magnetic field computation using Delaunay triangulation and complementary finite element methods", IEEE Trans. on Magnetics, vol. MAG-19, no. 6, pp. 2551~2554, Nov. 1983.

[8] D. Shenton and Z. Cendes, "MAX-an expert system for automatic adaptive magnetic modelling", IEEE Trans. on Magnetics, vol. MAG-22, no. 5, pp. 805~807, 1986

[9] Song-yop Hahn et al, "A posteriori error estimate for adaptive finite element mesh generation", IEEE Trans. on Magnetics, vol. MAG-24, no. 1 pp. 315~317, Jan. 1988

[10] 김형석, 최홍순, 한송엽, "정전자장의 적용 유한요소해석을 위한 오차추정", 전기학회 논문지, 38권 1호, pp. 22~28, Jan. 1989

[11] F. Schmoellebeck and H. Haas, "3-Dimensional adaptive fe-preprocessing using a programmable cad-system", IEEE Trans. on Magnetics, vol. MAG-24, no. 1, pp. 370~373, Jan. 1988

[12] M. Cecilia Rivara, "Algorithm for refining triangular grids suitable for adaptive and multigrid techniques", Int. J. Numer. Methods Eng., vol. 20, pp. 754~756, 1984

[13] I. Babuska and A.K. Aziz, "On the angle condition in the finite element method", SIAM J. Numer. Anal., vol. 13, no. 2, pp. 214 ~216, 1976