

이산치 직접 적응제어기의 견실성 향상

The Robustness Improvement of Discrete-Time Direct Adaptive Controllers

千 熙 英* · 朴 貴 泰* · 朴 勝 圭** · 權 誠 河***
(Hee-Young Chun · Gwi-Tae Park · Seung-Kyu Park · Sung-Ha Kwon)

요 약

본 논문에서는 새로운 이산치 파라미터 적응알고리즘을 제안하므로써 견실한 이산치 직접 적응 극 배치 제어를 설계하였다. 새로운 적응 알고리즘은 표준 최소 자승법에 정규화된 오차와 회귀벡터를 사용하고, 오차에 지수적으로 반비례하는 항을 추가적으로 덧붙여 줌으로써 구성되며, 이것은 외란과 비모형화 특성에 대한 견실성을 향상시킨다. 견실성 향상의 고찰에 있어서는 전체 적응제어 계통을 입출력 안정도 해석에 알맞도록 재구성하여 섹터이론을 적용하였으며, 아울러 컴퓨터 시뮬레이션을 실행하였다.

Abstract- This paper presents a robust discrete-time direct adaptive pole-placement with new discrete parameter adaptation algorithm(PAA). In the new PAA, the standard RLS is suitably modified by adding a term which is exponentially proportional to the filtered tracking error and using a signal normalization. It is shown that it makes the overall adaptive system more robust in the presence of disturbances or unmodeled dynamics. In order to discuss the robustness improvement by using the input-output stability theory, the overall adaptive control system is reformulated and the sector theory is applied. In addition, computer simulation results are presented to complement the theoretical development.

1. 서 론

적응제어 계통에 대한 대부분의 안정도 결과들

은 제어기 구성에 사용되는 모델이 실제 플랜트를 정확히 표현하고 있다는 가정에 그 근거를 두고 있다. 그러나 대부분의 실제 플랜트는 고차이므로 일반적으로 사용되고 있는 것은 근사 모델들이다. 참고문헌 [1]에서 모델과 플랜트의 불일치에 의해서 야기되는 비모형화 특성이 존재하는 경우에 이상적인 상황에서 유도한 안정한 알고리즘을 직접 사용하면 불안정성을 초래할 수 있음을 증명하

*正 會 員 : 高麗大 工大 電氣工學科 教授 · 工博

**正 會 員 : 昌原大 電氣工學科 專任講師 · 工博

***正 會 員 : 昌原大 電氣工學科 助教授 · 工博

接 受 日 字 : 1989年 10月 4日

1 次 修 正 : 1990年 1月 11日

였다. 참고문헌[1]에서와 같은 연구결과들은 건설한 적응제어 계통을 구성하고자 하는 연구의 새로운 장을 열었다. 어떠한 부류의 섭동(perturbation)에 대한 적응제어 계통의 건설성이라는 것은 섭동이 존재하는 경우에 전체계통이 만족할 만한 성능을 나타낼 수 있음을 의미한다.

미지의 파라미터를 가진 플랜트에 대한 건설한 적응제어기를 구성하기 위한 연구는 최근에 꾸준히 진행되어 왔다. 그 중에서 적응알고리즘을 변형시키는 연구가 큰부분을 차지하고 있으며, 제안된 많은 방법중에서 세가지 방법이 일반적으로 받아들여지고 있다. 첫번째 방법은 적응 루우프의 모든 신호의 크기를 제한하기 위해 사구간(dead zone)을 설정하는 것이다[2]. 이 방법은 외란의 크기에 대한 사전정보가 필요하고 오차가 남는다는 단점이 있다. 두번째 방법은 제어 파라미터에 대한 사전정보를 가지고 파라미터의 추정 영역을 제한하여 주는 것으로 제어기 파라미터의 최대 최소값을 알아야 한다.[3]. 세번째는 일반적으로 σ -변형이라고 불리는 것으로서 파라미터 적응알고리즘에 추가항을 덧붙여 줌으로써 적응 알고리즘의 적분을 제한하는 방법이다[4]. 이 방법은 위의 두 방법에 비해서 추가의 정보를 필요로 하지 않으면서 신호크기의 제한성을 보장해준다. 이 방법의 이산치 형태는 참고문헌[5]에서 보여진다.

본 연구에서는 이산치 적응제어 계통의 건설성을 향상시키기 위하여 표준 측자 최소 자승법(RLS)에 σ -변형 개념을 사용하며 일정한 σ 값 대신 추종오차에 지수적으로 반비례하는 항을 도입한다. 그리고 모델링오차를 크기가 제한된 외란으로 처리하는 것을 가능케 하는 신호정규화 방법을 사용한다. 이 방법은 플랜트에 대한 추가의 정보를 필요로 하지 않고 건설성을 향상시켜줄 수 있으며 적응제어 계통의 성능을 향상시킨다. '건설성 향상'의 고찰에 있어서는 전체 적응제어 계통을 입력 출력 안정도 해석에 알맞도록 재구성하여 섹터 이론을 적용하였으며, 아울러 컴퓨터 시뮬레이션을 실행하였다.

2. 수학적 배경

본 절에서는 본 연구에서 사용되는 수학적 개념에 대해서 설명한다. 이산치 신호들은 실수의 무한 사이퀀스이고 각 신호들은 무한 차원의 벡터로 간주될 수 있으며 선형 벡터 공간의 요소로서 생각할 수 있다. 본 연구에서 필요한 정의들은 다음과 같다.

놈(Norm) : 놈은 벡터의 크기로 생각할 수 있다. E 가 선형 벡터 공간이라 하고 E 내에서 영벡터를 ϕ 로 나타내면 함수 $N : E \rightarrow R^+$ (양의 실수의 집합)가 놈일 충분 조건은 다음과 같다.

- (a) $x \in E$ 이고 $x \neq \phi$ 이면 $N(x) > 0$ 이다.
- (b) $N(ax) = |a|N(x) \forall a \in R, \forall x \in E$
- (c) $N(x+y) \leq N(x) + N(y) \forall x, y \in E$

선형공간 E 와 E 에서의 놈 N 가 주어졌을 때 (E, N) 를 놈 벡터 공간이라고 부른다.

1) L_2 -놈 : $x = (x_1, x_2, \dots)$ 라고 하면 x 의 L_2 -놈은 다음과 같이 정의된다.

$$\|x\|_2 = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 \right\}^{1/2}$$

2) L_{∞} -놈 : $x = (x_1, x_2, \dots)$ 라고 하면 x 의 L_{∞} -놈은 다음과 같다.

$$\|x\|_{\infty} = \sup |x_k| \text{ for } k \geq 1$$

이러한 놈들이 존재하면 이에 상응하는 놈 벡터 공간을 각각 L_2, L_{∞} 이라고 부른다.

3) L_2 의 확장공간 : L_{2e} 라고 나타내며 truncation이 L_2 에 속하는 요소 x 들로 구성되는 공간이다. 예를 들면 다음과 같은 사이퀀스 x 는 확장공간 L_{2e} 에 속한다.

$$\|x\|_{2,T} = \left\{ \sum_{k=1}^T x_k^2 \right\}^{1/2} < \infty,$$

$$\forall T \in Z^+ \text{ (양정수의 집합)}$$

4) 연산자의 놈은 이득으로 정의되기도 하며 다음과 같이 정의된다.

$$\|H\| = \sup_x \frac{\|Hx\|}{\|x\|}$$

5) 두개의 무한 사이퀀스 x, y 의 스칼라 내적($\langle \cdot | \cdot \rangle$)은 다음과 같이 정의된다.

$$\langle x | y \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x(k)y(k), \langle x | y \rangle_T = \sum_{k=1}^T x(k)y(k)$$

6) Conic 섹터 영역 : 연산자 $H : x \rightarrow y$ 에 대해 다음과 같이 정의한다.

$$\text{여기서 } x, y \in L_{2e}$$

(a) H 가 다음 조건을 만족하면 $\text{cone}(C, R)$ 의 내부에 존재한다.

$$\langle y - (C-R)x | y - (C+R)x \rangle \leq \tau \leq 0$$

$$\forall T \in Z^+$$

(b) H 가 다음 조건을 만족하면 $\text{cone}(C, R)$ 의 내부에 존재한다.

$$\langle y - (C-R)x | y - (C+R)x \rangle \leq \tau \leq 0$$

$$\forall T \in Z^+$$

(c) H 가 어떤 $\epsilon > 0$ 에 대해 다음 조건을 만족하면 $\text{cone}(C, R)$ 의 엄격한 내부에 존재한다.

$$\langle y - (C-R)x | y - (C+R)x \rangle \leq \tau \leq -\epsilon \|x\|$$

$$\|y\|_T^2 \quad \forall T \in Z^+$$

여기서 $\|(x, y)\|_T^2 = \|x\|_T^2 + \|y\|_T^2$

(d) H 가 어떤 $\epsilon > 0$ 에 대해 다음 조건을 만족하면 cone(C, R)의 엄격한 외부에 존재한다.

$$\langle y - (C-R)x | y - (C+R)x \rangle_T \geq -\epsilon \| (x, y) \|_T^2$$

$$\forall T \in Z^+$$

위의 섹터영역은 $\langle y - (C-R)x | y - (C+R)x \rangle$ 인 경우 $\{C+R, C-R\}$ 또는 $CONE(C, R)$ 의 형태로 표현하기도 한다.

3. 문제 설정

본 연구에서는 비모형화 특성이 존재하는 경우의 적응제어 계통을 다루기로 한다. 그러므로 제어하고자 하는 플랜트는 다음과 같이 표현된다.

[6]

$$y(k) = G(q^{-1})u(k) : G(q^{-1}) = Go(q^{-1})[1 + \mu\Delta_2(q^{-1}) + \mu\Delta_1(q^{-1})] \quad (1)$$

$$(C-R)x | y - (C+R)x > t \leq 0$$

여기서 $Go(q^{-1}) = q^{-d}B(q^{-1})/A(q^{-1})$ 는 분모의 차수가 분자의 차수보다 큰 모델링된 공칭(nominal) 전달함수이다. ; $\mu\Delta_1(q^{-1})$ 와 $\mu\Delta_2(q^{-1})$ 는 각각 공칭 전달함수에 더해지고 곱해지는 플랜트 섭동이다. $A(q^{-1})$ 는 최고차항의 계수가 1인 다항식이고 $\mu(k)$ 와 $y(k)$ 는 각각 입력, 출력 사이퀀스이며 각 다항식의 차수와 계수들은 미지이다.

본 연구에서는 모든 영점들이 소거되고 요구되는 극점들을 근으로 갖는 다항식 $Cr(q^{-1})$ 을 사용한 극배치 제어방식을 고찰하기로 한다. 우선 필터링된 추종오차 $e(k)$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$e(k) = Cr(q^{-1})y(k) - w(k) \quad (2)$$

$$= Cr(q^{-1})(x(k) - ym(k))$$

여기서 $w(k)$ 는 기준입력이다.

적응제어 문제는 다음과 같은 목적을 달성하도록 하는 제어입력 $u(k)$ 를 구하는 것이다.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e(k) = 0 \quad (3)$$

본 장에서는 다음과 같은 예측기(predictor)구조의 제어기를 사용한다. [7]

$$w(k+d) = S(k)u(k) - R(k)y(k) \quad (4)$$

여기서 $S(k)$ 와 $R(k)$ 는 각각 차수가 n_s, n_r 이고 계수가 시변인 q^{-1} 의 다항식이고 $w(k)$ 는 d 단계 앞선 값이 알려진 기준신호이다. 식(4)를 벡터 표

현식으로 쓰면 다음과 같다.

$$w(k+d) = \theta(k)^t \phi(k) \quad (5)$$

여기서

$$\phi(k)^t = [u(k) \cdots u(k-n_s), y(k) \cdots y(k-n_r)] \quad (6)$$

$$\theta(k)^t = [s_0(k), s_1(k) \cdots s_{n_s}(k), r_0(k), r_1(k), \cdots r_{n_r}(k)] \quad (7)$$

극배치 제어방식에서는 위와 같은 제어기 구성에 있어서 다음과 같은 가안정화(stabilizability) 가정을 필요로 한다.

가정 1. : S^*, R^* 을 차수가 n_s, n_r 인 다항식이라 하고, $\tau \in (0, 1)$ 를 스칼라라고 하자. 여기서 다항식 계수를 다음과 같이 정의한다.

$$\theta^{*t} = [S^* \ R^*] = [s_0^*, s_1^*, \cdots, s_{n_s}^*, r_0^*, r_1^*, \cdots, r_{n_r}^*] \quad (8)$$

그리고 다항식 C 를 다음과 같이 정의하자.

$$C = S^*A + q^{-d}R^*B \quad (9)$$

이러한 정의와 함께 다음과 같이 정의된 공집합이 아닌 집합 θ_{is} 가 존재한다.

$$\theta_{is} = \{ \theta^* \in R^n : C(q) \neq 0, q \in C, |q| > \tau^{1/2} \} \neq \emptyset \quad (10)$$

여기서 $n = n_s + n_r + 2$

참고 : 집합 θ_{is} 는 계통의 페루우프 극점이 반경 $\tau^{1/2}$ 인 원의 내부에 존재하도록 하는 제어기의 파라미터를 정의하고 있다. 여기서 τ 는 설계자에 의해서 결정되는 값으로 후에 설명하기로 한다. 위의 집합을 우리는 가안정화 집합이라고 부르며 *를 붙여 나타내고 있다. $\tau=1$ 인 경우 위 가정은 단순히 선택된 구조의 선형 제어기에 의해서 계통이 안정화될 수 있다는 것을 나타낸다. 만약 θ_{is} 가 공집합인 경우에는 계수가 완전히 알려졌을 때에

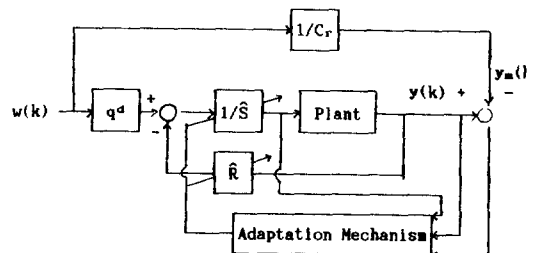


그림 1 적응제어 계통
Fig. 1 Adaptive Control Scheme

조차도 전차 페루우프 계통을 안정화 시킬 수 없다.

플랜트 파라미터를 아는 경우에 그 계수를 이용하여 제어기를 구성하는 것이 가능하나 그렇지 못한 경우, 즉 적응제어 계통에서는 파라미터 적응 알고리즘으로 계통의 입력과 정보를 이용하여 제어기 파라미터를 결정해야 한다. 그러므로 적응제어 계통에서 파라미터 적응 알고리즘은 가장 중요한 요소이며 건실성에 있어서 결정적인 역할을 한다. 본절에서 설명한 제어기를 포함한 적응제어 계통이 그림 1.에 나타나 있다.

4. 새로운 파라미터 적응 알고리즘

본 절에서는 신호 정규화와 추가항을 더한 형태의 새로운 파라미터 적응 알고리즘을 제안한다.

가장 일반적으로 쓰이고 있는 RLS알고리즘은 다음과 같다. [7]

$$\hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k-d) + P(k)\phi(k-d)e(k) \quad (11)$$

$$= P(k-d) - \frac{P(k-d)\phi(k-d)^t\phi(k-d)P(k-d)}{\beta + \phi(k-d)^tP(k-d)\phi(k-d)} \quad (12)$$

여기서 β 는 망각계수이며 $P(0) > 0$ 이다.

추정된 파라미터를 사용하는 경우 제어기 표현식은 다음과 같다.

$$w(k+d) = \hat{\theta}^t\phi(k) \quad (13)$$

회귀(regression) 벡터 $\phi(k)$ 에 대한 PAA의 독립성을 얻기 위하여 $e(k)$ 와 $\phi(k)$ 의 정규화가 필요하다. 아래의 표현식에서 (-)은 정규화된 변수들을 나타내는데 사용되며 정규화 방법은 아래와 같다.

$$\bar{\phi}(k-d) = \rho(k)^{-1/2}\phi(k-d), \quad (14)$$

$$\bar{e}(k) = \rho(k)^{-1/2}e(k) \quad (14)$$

$$\bar{\Psi}(k) = \rho(k)^{-1/2}\Psi(k) \quad (15)$$

여기서 정규화 요소 $\rho(k)$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$\rho(k) = \tau\rho(k-1) + \max(|\phi(k-d)|^2, \rho_m) \quad (16)$$

$$\rho_m > 0, \tau \in (0, 1)$$

이러한 정규화된 신호와 시변요소 $E(k)$ 로써 (11)(12)의 표준 RLS를 변형시켜 다음과 같은 새로운 PAA를 구성한다.

$$\hat{\theta}(k) = E(k)\hat{\theta}(k-d) + P(k)\bar{\phi}(k-d)\bar{e}(k) \quad (17)$$

$$E(k) = \begin{cases} E_n(k) = \exp(-\lambda|\bar{e}(k)|) & \text{if } E_n(k) > E_o \\ E_o & \text{if } E_n(k) \leq E_o \end{cases} \quad (18)$$

$$P(k-d) = \frac{P(k-d)\bar{\phi}(k-d)\bar{\phi}(k-d)^tP(k-d)}{\beta + \bar{\phi}(k-d)^tP(k-d)\bar{\phi}(k-d)} \quad (19)$$

여기서 λ 는 양의 상수이고 $0 < E_o < 1$ 이다.

표준 RLS의 경우 $E(k) = 1$ 이고 σ -변형 RLS인 경우 $E(k)$ 는 1보다 작은 상수이다. $E(k)$ 는 외란이나 비모형화 특성이 존재할 때 필터링된 추종 오차에 지수적으로 반비례하여 파라미터 적응속도를 적절히 조절해 주는 역할을 하며, 그렇게 함으로써 건실성에 미치는 영향은 6절에서 섹터 안정도 이론을 사용하여 고찰한다.

본 절에서 새로운 PAA를 제안하였으며 다음 절에서는 그것의 수렴성에 대해서 고찰하기로 한다.

5. 새로운 파라미터 적응 알고리즘 (PAA)의 수렴성

새로운 PAA의 수렴성은 다음 정리와 같으며 Lyapunov 제2안정도법에 의해서 증명된다.

정리1. 새로운 파라미터 적응 알고리즘 (17)(18)(19)에 대해 λ, E_o 가 적절히 선정되면 신호 $\tilde{\theta}(k) = \hat{\theta}(k) - \theta^*$ 는 영으로 수렴이 가능하다.

증명 :

식(17)의 양변에서 θ^* 를 빼고 $e(k)$ 를 방정식 오차 $-\bar{\theta}(k-d)^t\bar{\phi}(k-d)$ 로 대치하면 다음식을 얻을 수 있다.

$$\tilde{\theta}(K) = \bar{\theta}(k-d) - \frac{P(k-d)\bar{\phi}(k-d)\bar{\phi}(k-d)^t\tilde{\theta}(k-d)}{\beta + \bar{\phi}(k-d)^tP(k-d)\bar{\phi}(k-d)} + (E(k) - 1)\tilde{\theta}(k-d) \quad (20)$$

식(19)를 이용하고 행렬 역 보조정리(matrix inversion lemma) [12]를 사용하면 다음식을 얻는다.

$$\bar{\theta}(k) = p(k)p(k-d)^{-1}\tilde{\theta}(k-d) + (E(k) - 1)\tilde{\theta}(k-d) \quad (21)$$

여기서 Lyapunov 제2안정도법을 적용하기 위하여 이차함수 $V(k) = \bar{\theta}(k)^tP(k)^{-1}\bar{\theta}(k)$ 를 도입하고 다음 식을 정의한다.

$$\begin{aligned} \Delta V(k) &= V(k) - V(k-d) \\ &= \tilde{\theta}(k)P(k)^{-1}\tilde{\theta}(k) - \tilde{\theta}(k-d)P(k-d)^{-1} \\ &\quad \tilde{\theta}(k-d) \end{aligned} \quad (22)$$

식(21)를 식(22)에 대입하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \Delta V(k) &= (\tilde{\theta}(k) - \tilde{\theta}(k-d)^t P(k-d)^{-1} \tilde{\theta}(k-d) \\ &\quad + \tilde{\theta}(k)^t P(k)^{-1} (E(k) - 1) \tilde{\theta}(k-d) \end{aligned} \quad (23)$$

식(20)은 다음 식과 같이 표현될 수 있다.

$$\begin{aligned} P(k-d)^{-1}(\tilde{\theta}(k) - \tilde{\theta}(k-d)) \\ = -\frac{\tilde{\phi}(k-d)\tilde{\phi}(k-d)^t\tilde{\theta}(k-d)}{\beta + \tilde{\phi}(k-d)^t P(k-d)\tilde{\phi}(k-d)} \\ + P(k-d)^{-1}(E(k) - 1)\tilde{\theta}(k-d) \end{aligned} \quad (24)$$

식(24)을 식(23)에 대입하면 다음식을 얻는다.

$$\begin{aligned} \Delta V(k) &= -\frac{\tilde{\theta}(k-d)^t\tilde{\phi}(k-d)\tilde{\phi}(k-d)^t\tilde{\theta}(k-d)}{\beta + \tilde{\phi}(k-d)^t P(k-d)\tilde{\phi}(k-d)} \\ &\quad + \tilde{\theta}(k-d)^t (E(k) - 1) P(k-d)^{-1} \tilde{\theta}(k-d) \\ &\quad + \tilde{\theta}(k)^t P(k)^{-1} (E(k) - 1) \tilde{\theta}(k-d) \end{aligned} \quad (25)$$

첫번째 항을 무시하면 다음식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \Delta V(k) \leq \Delta V_1(k) &= \tilde{\theta}(k-d)^t (E(k) - 1) P \\ &\quad (k-d)^{-1} \tilde{\theta}(k-d) \\ &\quad + \tilde{\theta}(k)^t P(k)^{-1} \\ &\quad (E(k) - 1) \tilde{\theta}(k-d) \end{aligned} \quad (26)$$

식(20)의 관계를 사용하여 $\tilde{\theta}(k)$ 를 $\tilde{\theta}(k-d)$ 의 함수로 대치하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \Delta V_1(k) &= (E(k) - 1) \{ \tilde{\theta}(k-d)^t P(k-d)^{-1} \tilde{\theta} \\ &\quad (k-d) + \theta^{*t} P(k-d) \tilde{\theta}(k-d) \\ &\quad + \tilde{\theta}(k-d)^t P(k-d)^{-1} \tilde{\theta}(k-d) \\ &\quad + \tilde{\theta}(k-d)^t P(k-d)^{-1} \theta^* \} \\ &\quad + (E(k) - 1)^2 \{ \tilde{\theta}(k-d)^t P(k)^{-1} \tilde{\theta} \\ &\quad (k-d) + 2\tilde{\theta}(k-d)^t P(k)^{-1} \theta^* \\ &\quad + \theta^{*t} P(k)^{-1} \theta^* \} = (E(k) - 1) \| \tilde{\theta}(k-d) \\ &\quad + P_{s0}(k) P_{s1}(k)^{-1} \theta^* / 2 \| P_{s0}(k)^{-1} \\ &\quad - (E(k) - 1) \| \theta^* \|^2_{s2(k)}^{-1} \end{aligned} \quad (27)$$

$$- (E(k) - 1) \| \theta^* \|^2_{s2(k)}^{-1} \quad (28)$$

여기서

$$\begin{aligned} P_{s0}(k)^{-1} &= 2P(k-d)^{-1} + (E(k) - 1) P(k)^{-1} \quad (29) \\ P_{s1}(k)^{-1} &= 2P(k-d)^{-1} + 2(E(k) - 1) P(k)^{-1} \quad (30) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{s2}(k)^{-1} &= P_{s1}(k)^{-1} P_{s0}(k) P_{s1}(k)^{-1} / 4 \\ &\quad + (1 - E(k)) P(k)^{-1} \end{aligned} \quad (31)$$

식(28)으로부터 $P_{s0}(k) > 0$ 이라고 하면 집합 D_3 를 다음과 같이 정의할 때 D_3^c 에서 $\Delta V < 0$ 임을 알 수 있다.

$$\begin{aligned} D_3 &= \{ \tilde{\theta} | \frac{\tilde{\theta}(k-d)^t \tilde{\phi}(k-d) \tilde{\phi}(k-d)^t \tilde{\theta}(k-d)}{1 + \tilde{\phi}(k-d)^t P(k-d) \tilde{\phi}(k-d)} \\ &\quad + (E(k) - 1) \| \tilde{\theta}(k-d) \\ &\quad + P_{s0}(k) P_{s1}(k)^{-1} \theta^* / 2 \|^2 P_{s0}(k)^{-1} \\ &\quad \leq (E(k) - 1) \| \theta^* \|^2_{s2(k)^{-1}} \} \end{aligned} \quad (32)$$

식(32)으로부터 $P_{s0}(k)^{-1} > 0$ 이 되도록 E_0 가 선정되면 다음과 같이 $\tilde{\theta}(k-d)$ 의 크기가 유한함을 알 수 있다.

식(32)에서 좌변의 첫번째 항을 소거하고 식(29)(31)의 $P_{s0}(k)^{-1}$ 의 정의에서 볼때 $P_{s0}(k)^{-1} > P_{s0}(k)^{-1}$ 이므로 좌변에서 $P_{s0}(k)^{-1}$, 우변에서 $P_{s2}(k)^{-1}$ 을 생략해도 부등호의 방향은 바뀌지 않으며 D_3 의 최대 영역 D_{3m} 은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} D_{3m} &= \{ \tilde{\theta} | \tilde{\theta}(k-d) + P_{s0}(k) P_{s1}(k)^{-1} / 2 \|^2 \\ &\quad \leq \| \theta^* \|^2 \} \end{aligned} \quad (33)$$

여기서 $P_{s0}(k) P_{s1}(k)^{-1}$ 은 그 크기가 유한하므로 $\tilde{\theta}(k)$ 의 크기가 유한하다. 게다가 식(32)에서 $1 - E(k)$ 가 곱해지는 항에 비해 나머지 항이 충분히 크도록 λ , E_0 가 적절히 선정되면 집합 D_3 의 영역이 작아지게 되며 그에 따라 $1 - E(k)$ 항도 더욱 작아져 수렴 영역은 점점 작아지게 된다. 그러므로 $1 - E(k)$ 항은 영으로 수렴하게 되며 결국 $\tilde{\theta}(k)$ 가 영으로 수렴하게 되어 L_2 -공간에 속하게 됨을 알 수 있다.

증명 끝

정리 4. 에서 $P_{s0}(k)^{-1} > 0$ 조건은 $P(k)^{-1} = P(k-d)^{-1} + \tilde{\phi}(k-d)\tilde{\phi}(k-d)^t$ 이므로 $P(k)^{-1}$ 가 시간이 감에 따라 커지고 $P(k)^{-1}$ 와 $P(k-d)^{-1}$ 간의 차이는 신호 정규화 때문에 크지 않은 값이므로 처음에 이 조건이 만족 되도록 하는 E_0 가 선정되면 시간이 감에 따라 더욱 쉽게 만족될 수 있다.

다음 절에서 새로운 파라미터 적응 알고리즘이 사용되는 경우 적응제어 계통의 건실성 향상을 섹터이론으로 고찰한다.

6. 건실성 향상 고찰

6.1 오차 페루우프 계통의 구성

적응제어 계통을 입출력 안정도 이론 즉 섹터이론으로 해석하기 위하여 오차 페루우프 계통으로 재구성한다.

식(1)을 식(9)의 다항식 C로 곱하면 다음 식과 같다.

$$Cy(k) = C \frac{q^{-d} B}{A} (1 + \mu \Delta_2 + \mu \Delta_1) u(k)$$

$$\begin{aligned}
 &= (AS^* + q^{-d}R^*B) \left(\frac{q^{-d}B}{A} (1 + \mu\Delta_2) \right. \\
 &\quad \left. + \mu\Delta_1 \right) u(k) \\
 &= B[S^*u(k-d) + R^*y(k-d)] + S^*\delta(k) \quad (34)
 \end{aligned}$$

$$\text{여기서 } \delta = (q^{-d}B\mu\Delta_2 + A\mu\Delta_1)u(k) \quad (35)$$

그러므로 식 (34) 으로부터

$$y(k) = C^{-1}B\theta^* \phi(k-d) + C^{-1}S^*\delta(k) \quad (36)$$

필터링된 정규화 추종오차는 식 (2) 와 식 (34) 으로부터 계산할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 \bar{e}(k) &= C_r \bar{y}(k) - \bar{w}(k) \\
 &= -\bar{H}_2(\hat{\theta}(k-d) - \theta^*)^t \bar{\phi}(k-d) \\
 &\quad + C_r C^{-1} S^* \delta(k) + (H_2 - 1)\bar{w}(k) \\
 &= -\bar{H}_2 \bar{\Psi}(k) + \bar{e}(k)^* \quad (37)
 \end{aligned}$$

여기서 $\bar{H}_2 = C_r C^{-1} B$,

$$\begin{aligned}
 \bar{e}(k)^* &= C_r C^{-1} S^* \delta(k) + (\bar{H}_2 - 1)\bar{w}(k) \\
 \bar{\Psi}(k) &= \hat{\theta}(k-d)^t \bar{\phi}(k-d) \quad (38)
 \end{aligned}$$

위의 오차 페루우프 계통은 그림 2에 의해서 표현될 수 있다.

이 오차 모델에서 $\bar{H}_1 : \bar{e}(k) \rightarrow \bar{\Psi}(k)$ 는 새로운 PAA에 의해서 정의되는 연산자를 나타낸다. 적응 제어 계통은 이제 입력력 안정도 이론을 적용할 수 있는 형태로 재구성되었다. 오차 모델을 구성하는 과정에서 정규화는 비모형화 특성 δ 가 크기가 유한한 외란으로 처리되는 것을 가능하게 한다.

6.2 건설성 항상 고찰

그림 2의 페루우프 계통이 L_2 -안정하기 위한 \bar{H}_2 의 섹터 조건을 고찰하기 위해 다음과 같은 안정도 정리를 사용한다.

정리 2. 그림 4.4의 페루우프 계통내의 신호 관계는 다음과 같다.

$$\bar{e}(k) = \bar{e}(k)^* - \bar{x}(k) \quad (39-a)$$

$$\bar{\Psi}(k) = \bar{H}_1 \bar{e}(k) \quad (39-b)$$

$$\bar{x}(k) = \bar{H}_2 \bar{\Psi}(k) \quad (39-c)$$

여기서 $\bar{H}_1, \bar{H}_2 : L_{2e} \rightarrow L_{2e}$ 이고 $\bar{x}(k), \bar{\Psi}(k), \bar{e}(k) \in L_{2e}$ 이며 $\bar{e}(k)^* \in L_2$ 이다. 이때 \bar{H}_1 과 \bar{H}_2 가 각각 다음의 두 조건 (a)(b) 를 만족하면 페루우프 신호 $\bar{x}(k), \bar{\Psi}(k)$ 는 L_2 에 속하게 된다.

(a) $\bar{H}_1 : \bar{e}(k) \rightarrow \bar{\Psi}(k)$ 는 다음 조건을 만족한다.

$$\begin{aligned}
 &\sum_{k=0}^N \left[\bar{\Psi}(k)^2 + \alpha_1 \bar{e}(k) \bar{\Psi}(k) + \beta_1 \bar{e}(k)^2 \right] \\
 &\geq -\gamma - \sum_{k=0}^N M_1(k) \quad (40)
 \end{aligned}$$

(b) $\bar{H}_2 : \bar{\Psi}(k) \rightarrow \bar{x}(k)$ 는 다음 조건을 만족한다.

$$\begin{aligned}
 &\sum_{k=0}^N \left[\beta_1 \bar{x}(k)^2 - \alpha_1 \bar{x}(k) \bar{\Psi}(k) + \bar{\Psi}(k)^2 \right] \\
 &\leq -\eta \|\bar{x}(k), \bar{\Psi}(k)\|_N^2 \quad (41)
 \end{aligned}$$

여기서 임의의 신호 $M_1(k) \in L_2$, 크기가 유한한 임의의 함수 α_1, β_1 ,

임의의 상수 $\gamma, \eta \in R, \gamma, \eta > 0$

증명 : 참고문헌 「10」 참조

Gawthrop 「13」, Ortega, Praly, Landau 「7」 등은 \bar{H}_1 의 조건을 섹터영역으로 나타내었으나 $\hat{\theta}(k)$ 의 초기치가 영이 아니면 \bar{H}_1 의 조건을 섹터영역의 정의에 의해서 나타낼 수가 없다. 이에 Cluett 「10」는 식 (38)에서 $M_1(k)$ 항이 영인 경우를 정의해 주는 dissipative 조건을 이용하여 \bar{H}_1 의 조건을 나타내었으며 본 연구에서는 내용상 필요에 의해서 $M_1(k)$ 항을 추가하여 \bar{H}_1 의 조건을 나타낸다. 조건 (b)는 섹터영역의 정의에 의해서 다음과 같은 섹터영역의 엄격한 내부를 나타내고 있다.

식 (41)은 다음식과 같이 정리될 수 있다.

$$\begin{aligned}
 &\sum_{k=0}^N \left[(\bar{\Psi}(k)^2 - \frac{\alpha_1}{2} \bar{x}(k))^2 / 2 - (\frac{\alpha_1^2}{4} - \beta_1) \bar{x}(k)^2 \right] \\
 &\leq -\eta \|\bar{x}(k), \bar{\Psi}(k)\|_N^2 \quad (42)
 \end{aligned}$$

위 식에서의 $\bar{H}_2^{-1} : \bar{x}(k) \rightarrow \bar{\Psi}(k)$ 는 $\text{CONE}(C, R)$ 의 엄격한 내부에 있다고 정의된다.

여기서

$$C = \frac{\alpha_1}{2}, R^2 = (\frac{\alpha_1^2}{4} - \beta_1) \quad (43)$$

위의 정리를 이용하여 \bar{H}_2 의 섹터 영역을 고찰하기 위해 우선 정리 2의 조건 (a)에서 새로운 파라미터 적응 알고리즘을 사용하였을 때 α_1, β_1 의 구체적인 값을 구한 다음 조건 (b)에 해당하는 \bar{H}_2 의 섹터 영역을 고찰한다.

정리 3. 새로운 파라미터 적응 알고리즘을 사용하는 경우 정리 2의 조건 (a)에서의 α_1, β_1 에 해당하는 구체적인 값은 다음과 같다.

$$\alpha_1 = 2/E(k), \beta_1 = a/E(k)^2 \quad (44)$$

여기서 α_1, β_1 은 다음과 같이 그 크기가 유한하다.

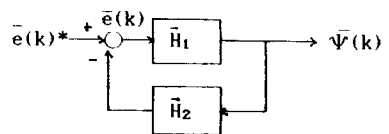


그림 2 오차 모델
Fig. 2 Error Model

$$2 \leq \alpha_1 \leq \frac{2}{E_0}, \quad \alpha \leq \beta_1 \leq \frac{\alpha}{E_0} \quad (45)$$

증명: 다음과 같은 이차 함수를 고려하자,

$$V(k) = \tilde{\theta}(k)P(k)^{-1}\tilde{\theta}(k) \quad (46)$$

식 (17)의 양변에서 θ^* 를 빼면 다음과 같은 관계식을 얻는다.

$$\tilde{\theta}(k) = E(k)\tilde{\theta}(k-d) + P(k)\bar{\phi}(k-d)\bar{e}(k) + W(k) \quad (47)$$

여기서 $W(k) = (E(k) - 1)\theta^*$
 새로운 PAA를 사용하는 경우 $V(k)$ 는 다음과 같이 정리된다.

$$\begin{aligned} V(k) &= [E(k)\tilde{\theta}(k-d) + P(k)\bar{\phi}(k-d)\bar{e}(k) \\ &\quad + W(k)]^T P(k)^{-1} \\ &\quad [E(k)\tilde{\theta}(k-d) \\ &\quad + P(k)\bar{\phi}(k-d)\bar{e}(k) + W(k)] \\ &= E(k)^2 \tilde{\theta}(k-d)^T P(k)^{-1} \tilde{\theta}(k-d) \\ &\quad + 2E(k)\tilde{\theta}(k-d)^T \bar{\phi}(k-d)\bar{e}(k) \\ &\quad + \bar{\phi}(k-d)^T P(k)\bar{\phi}(k-d)\bar{e}(k)^2 \\ &\quad + 2W(k)^T P(k)^{-1} E(k)\tilde{\theta}(k-d) \\ &\quad + 2W(k)^T \bar{\phi}(k-d)\bar{e}(k) \\ &\quad + W(k)^T P(k)^{-1} W(k) \\ &= E(k)^2 \tilde{\theta}(k-d)^T (\beta P(k-d)^{-1} \\ &\quad + \bar{\phi}(k-d)\bar{\phi}(k-d)^T) \tilde{\theta}(k-d) \\ &\quad + 2E(k)\tilde{\theta}(k-d)^T \bar{\phi}(k-d)\bar{e}(k) \\ &\quad + \bar{\phi}(k-d)^T P(k)\bar{\phi}(k-d)\bar{e}(k)^2 \\ &\quad + M(k) \\ &= \beta E(k)^2 V(k-d) + E(k)^2 \Psi(k)^2 \\ &\quad + 2E(k)\bar{\Psi}(k)\bar{e}(k) \\ &\quad + \bar{\phi}(k-d)^T P(k)\bar{\phi}(k-d)\bar{e}(k) \\ &\quad + M(k) \end{aligned} \quad (48)$$

여기서

$$\begin{aligned} M(k) &= 2W(k)^T P(k)^{-1} E(k)\tilde{\theta}(k-d) \\ &\quad + 2W(k)^T \bar{\phi}(k-d)\bar{e}(k) + W(k)^T P(k)^{-1} W(k) \end{aligned}$$

$\beta E(k)^2$ 항을 1로 대치하면 다음과 같은 부등식이 성립한다.

$$\begin{aligned} &\bar{\Psi}(k)^2 + 2\bar{\Psi}(k)\bar{e}(k)/E(k) \\ &\quad + \bar{\phi}(k-d)^T P(k)\bar{\phi}(k-d)\bar{e}(k)^2/E(k)^2 \\ &\geq (V(k) - V(k-d))/E(k)^2 - M(k)/E(k)^2 \end{aligned} \quad (49)$$

식 (49)을 0에서 N 까지 더하면

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^N \{ \bar{\Psi}(k)^2 + 2\bar{\Psi}(k)\bar{e}(k)/E(k) \\ &\quad + \bar{\phi}(k-d)^T P(k)\bar{\phi}(k-d)\bar{e}(k)^2/E(k)^2 \} \end{aligned}$$

$$\geq \sum_{k=d}^1 [V(k)/E(k)^2] - \sum_{k=0}^N M(k)/E(k)^2 \quad (50)$$

여기서 다음과 같은 관계[10]를 사용하면 식 (52)의 관계를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} &\bar{\phi}(k-d)^T P(k)\bar{\phi}(k-d) \\ &= \frac{\bar{\phi}(k-d)^T P(k-d)\bar{\phi}(k-d)}{\beta + \bar{\phi}(K-d)^T P(k-d)\bar{\phi}(k-d)} \quad (51) \\ &\sum_{k=0}^N \{ \bar{\Psi}(k)^2 + 2\bar{\Psi}(k)\bar{e}(k)/E(k) \\ &\quad + a\bar{e}(k)^2/E(k)^2 \} \geq \sum_{k=d}^1 [V(k)/E(k)^2] \\ &\quad - \sum_{k=0}^N M(k)/E(k)^2 \end{aligned} \quad (52)$$

여기서 $\alpha > \frac{\bar{\phi}(k-d)^T P(k-d)\bar{\phi}(k-d)}{\beta + \bar{\phi}(K-d)^T P(k-d)\bar{\phi}(k-d)}$ (51)
 $M(k) = 2W(k)^T P(k)^{-1} E(k)\tilde{\theta}(k-d) + 2W(k)^T \bar{\phi}(k-d)\bar{e}(k) + W(k)^T P(k)^{-1} W(k)$ (54)

식 (52)과 정리 2의 조건 (a)를 비교하면 $\alpha_1 = 2/E(k)$, $\beta_1 = a/E(k)^2$ 임을 알 수 있다.

증명 끝

새로운 알고리즘을 사용하는 경우 오차 페루우프 계통이 안정할 \bar{H}_2^{-1} 이 섹터 영역이 다음정리에 주어진다.

정리 4. 새로운 파라미터 적응 알고리즘을 사용하는 경우 \bar{H}_2^{-1} 이 $\text{cone}(C_1, R_1)$ 의 엄격한 내부에 존재하면 오차 페루우프 계통이 안정하다.

여기서 C_1, R_1 은 각각 다음과 같다.

$$C_1 = 1/E(k) \quad R_1 = \sqrt{(1-\alpha)}/E(k) \quad (55)$$

증명:

정리 2와 정리 3의 결과 참조

견실성 향상의 고찰은 계통의 견실성이 가장 많이 요구되는 때의 섹터영역을 고찰해 보아야 하며 견실성이 가장 많이 요구되는 때는 외란이나 비모형화 특성의 영향이 가장 큰 때로 오차가 커지고 $E(k)$ 의 값이 작아져 E_0 로 제한되므로 견실성 향상을 논할 때의 섹터 영역은 다음과 같다.

$$\text{CONE}(C_2, R_2) \quad (56)$$

여기서 $C_2 = 1/E_0$, $R_2 = \sqrt{(1-\alpha)}/E_0$

위에서 표준 RLS 알고리즘을 사용한 경우보다 \bar{H}_2^{-1} 의 섹터 영역이 커졌음을 알 수 있고 그림 3에서 알수 있듯이 \bar{H}_2 의 섹터 영역도 넓어지게 된다. 그림 3(a)와 그림 3(b)에 \bar{H}_2^{-1} 과 \bar{H}_2 의 섹터 영역이 보여진다.

식 (44)에서의 α 의 크기는 모든 신호들이 정규화되었으므로 $P(0)$ 의 최대 고유치에 결정된다

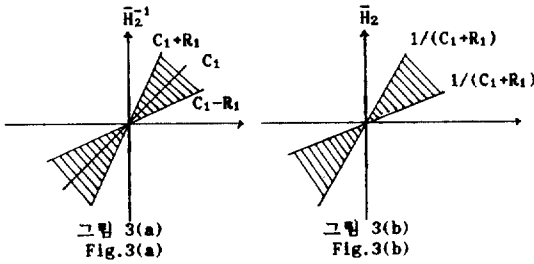


그림 3 (a) H_2^{-1} 섹터영역 (b) H_2 섹터영역
 Fig. 3 (a) sectorregion of the H_2^{-1}
 (b) sectorregion of the H_2

[10]. 기존의 RLS를 사용하는 경우에 R_1 의 크기는 $P(0)$ 이 최대 고유치에 의해서만 결정되지만 본 연구에서의 새로운 PAA를 사용하는 경우 R_1 의 크기가 $P(0)$ 의 최대 고유치에 의해서 뿐만 아니라 $E(k)$ 항에 의해서도 결정됨을 알 수 있다. 이것은 다음과 같은 견실성 향상의 가능성을 설명해 주고 있다.

새로운 파라미터 적응 알고리즘을 사용하는 경우 R_1 이 $1/E_0$ 배 만큼 커졌으므로 그에 따라 그림 3의 오차 페루우프 계통을 안정하게 하는 \bar{H}_2 의 섹터 영역은 표준 RLS($E_0=1$)를 사용한 경우보다 넓어지게 된다. \bar{H}_2 의 허용 섹터 영역은 곧 계통이 수용할 수 있는 비모형화 특성이나 외란 등에 의한 비정상적인 이득의 범위를 의미하므로 이것이 넓어질수록 적응제어 계통은 더 좋은 견실성을 지니게 되며 새로운 알고리즘을 사용함으로써 견실성이 향상됨을 알 수 있다. \bar{H}_2 의 섹터영역 크기와 견실성간의 관계는 참고문헌[11]에서 예제와 나이퀴스트선도등을 이용하여 설명되고 있다. 본 연구에서 이제까지 다룬것은 정규화된 신호에 대한 것이다. 이에 \bar{H}_1 에 대한 섹터 영역과 H_1 에 대한 섹터 영역간의 관계 그리고 정규화된 신호와 정규화되지 않은 신호들간의 안정도 해석 광계가 참고문헌[7]에서 보여지며 위에서의 결과들이 그대로 적용된다.

7. 수치예 및 컴퓨터 시뮬레이션

제어하고자 하는 플랜트의 전달함수는 다음과 같다.

$$G(q^{-1}) = \frac{q^{-1} + 0.5q^{-2}}{1 - 2q^{-1} + 0.99q^{-2}} (1 + \mu \frac{q^{-1}}{1 - 0.5q^{-1}}) + \mu \frac{q^{-1}}{1 - 0.5q^{-1}}$$

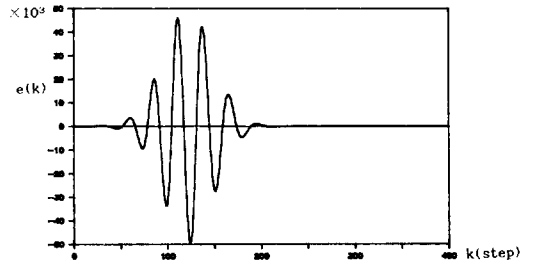


그림 4 정규화된 RLS를 사용하는 경우의 필터링된 추종오차
 Fig. 4 Filtered tracking error with normalized RLS algorithm

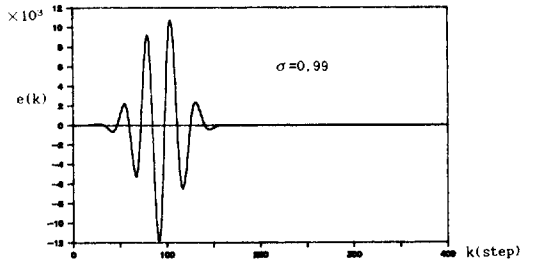


그림 5 σ -변형 RLS 알고리즘을 사용한 경우의 필터링된 추종오차
 Fig. 5 Filtered tracking error with normalized σ -modification RLS algorithm

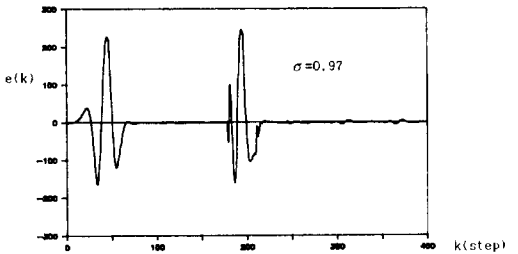


그림 6 σ -변형 RLS 알고리즘을 사용한 경우의 필터링된 추종오차
 Fig. 6 Filtered tracking error with normalized σ -modification RLS algorithm

여기서 $\mu=0.25$
 기준입력은 다음과 같다.

$$w(k) = 1.$$

정규화 요소는 다음과 같이 결정된다.

$$\rho(k) = 0.5\rho(k-1) + \max(|\Phi(k-d)|, 1)$$

$$\rho(0) = 0.1$$

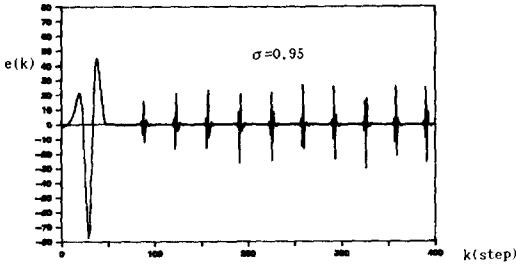


그림 7 σ -변형 RLS 알고리즘을 사용한 경우의 필터링된 추종오차

Fig. 7 Filtered tracking error with normalized σ -modification RLS algorithm

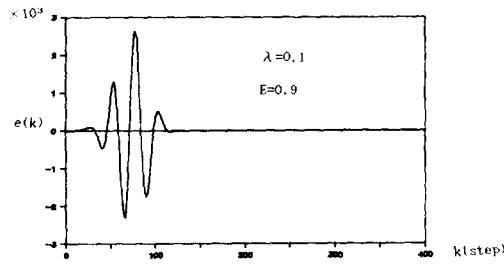


그림 8 새로운 PAA를 사용한 경우의 필터링된 추종오차

Fig. 8 Filtered tracking error with new PAA

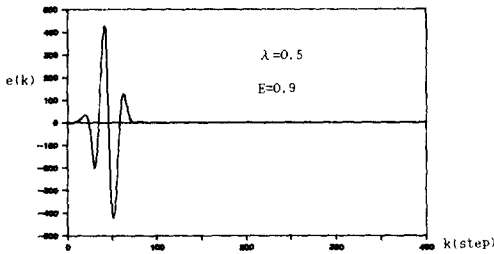


그림 9 새로운 PAA를 사용한 경우의 필터링된 추종오차

Fig. 9 Filtered tracking error with new PAA

식 (16) (17) (18)의 PAA에서 망각요소는 1로 설정했으며 $P(k)$ 의 초기치와 $\phi(k)$, $\hat{\theta}(k)$ 의 초기치는 다음과 같다.

$$P(0) = 100 \times I_{6 \times 6}, \quad I_{6 \times 6} \text{는 } 6 \times 6 \text{ 단위 행렬}$$

$$\phi(0) = [1. \ 1. \ 1. \ 1. \ 1. \ 1.]$$

$$\hat{\theta}(0) = [10. \ 0.1 \ 0.1 \ 0.1 \ 0.1 \ 0.1]$$

n_s, n_R 는 각각 2이며 페루우프 특성 방정식은 다음과 같다.

$$C_T = 1 - 2.6q^{-1} + 2.51q^{-2} - 1.066q^{-3} + 0.168q^{-4}$$

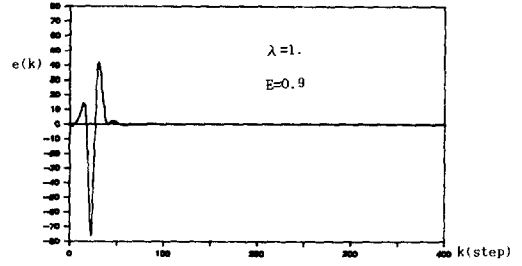


그림 10 새로운 PAA를 사용한 경우의 필터링된 추종오차

Fig. 10 Filtered tracking error with new PAA

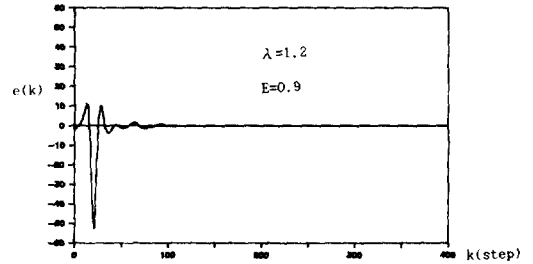


그림 11 새로운 PAA를 사용한 경우의 필터링된 추종오차

Fig. 11 Filtered tracking error with new PAA

위 방정식의 근 즉 요구되는 극점들은 다음과 같다.

$$(0.5, 0.6, 0.7, 0.8)$$

컴퓨터 시뮬레이션에 있어 그림 4에서 $E(k)=1$ 인 경우의 정규화된 표준 RLS의 성능을 보였으며 그림 5, 6, 7, 8, 9, 10 그리고 11에서는 정규화된 σ -변형 RLS와 새로운 PAA의 σ 값과 λ 값을 변화시켜 견실성 비교를 하였다. 시뮬레이션 결과로부터 새로운 PAA는 정규화된 RLS, 그리고 정규화된 σ -변형 RLS 알고리즘보다 견실함을 알 수 있다.

8. 결 론

본 장에서는 표준 RLS 알고리즘을 정규화 신호와 추가항을 덧붙여 변형시킴으로써 새로운 PAA를 제안하였고 새로운 알고리즘을 사용하므로써 외란이나 비모형화 특성이 존재할 때 적응제어계통의 견실성이 향상됨을 알 수 있다. 새로운 PAA에 있어서 정규화는 모델링 오차를 유한한 외란으로 처리하는 것을 가능하게 해주었고 $E(k)\hat{\theta}(k-d)$ 항은 외란 비모형화 특성과 밀접한 관계가

있는 추종오차에 따라 적응을 지연시키는 역할을 하고 있다. 견실성 향상의 고찰에 있어서는 새로운 파라미터 적응 알고리즘을 사용할 때의 견실성이 섹터이론 구조로 해석되었으며 본 연구에서의 L_2 -안정도 해석은 참고문헌[10]에서와 같은 방법으로 L_∞ 안정도 경우까지 고찰될 수 있다.

참 고 문 헌

- [1] Rohrs, L. Valavani, M. Athans, G. Stein, 'Robustness of Adaptive control algorithms in the presence of unmodeled dynamics,' IEEE CDC, 1982
- [2] R.B. Peterson, et al, 'Bounded error adaptive control,' IEEE AC-27, 1982
- [3] K.A. Ossman, et al, 'Adaptive regulation of MIMO linear discrete time systems without requiring a persistent excitation,' IEEE AC -32, 1987
- [4] P.A. Ioannou, P.V. Kokotovic, 'Adaptive system with reduced models,' New York; Springer-Verag, 1983
- [5] P. Wiemer, H. Unbehauen, 'Decentralized discrete model reference adaptive control,' IFAC, 1987
- [6] P.A. Ioannou, K. Tsakalis, 'A robust Discrete-time Adaptive Controller,' IEEE CDC, 1986
- [7] R. Ortega, L. Praly, I.D. Landau, 'Robustness of discrete-time direct adaptive controllers,' IEEE AC, 1985
- [8] G. Zames, 'On the input-output stability of time-varying nonlinear feedback systems part 1: conditions derived causing concepts of loopgain, Conicity, and positivity,' AC-11, 1966
- [9] S.K. Park, et al, 'A study on the robust discrete adaptive control algorithm,' Proceedings of the 1988 KACC
- [10] W.R. Cluett, et al, 'Robustness analysis of discrete-time adaptive control systems using input-output stability theory: a tutorial,' IEEE Proceedings, Vol. 135, 1988
- [11] W.R. Cluett, et al, 'Robust design of adaptive control systems using conic sector theory,' automatica, 23, 1987
- [12] Goodwin, Sin, 'Adaptive filtering prediction and control,' 1984
- [13] P. Gawthrop, K. Lim, 'Robustness of self-tuning controllers,' Proc. IEEE, pp. 21-29, 1982