

# 有限要素法을 이용한 空心 圓筒形磁石의 인덕탄스計算에 관한 研究

## Inductance Computations of Air-Core Solenoid Magnets by FEM

權 營 顏\*  
(Young-Ahn Kown)

### 요 약

공심 원통형자석의 인덕탄스는 자석의 기하학적 구조 및 권선수에 종속되고 공심이므로 전류와는 무관하게 된다. 이러한 공심 원통형자석에서 인덕탄스계산은 Grover 등에 의한 결과가 이용되고 있는데 본 연구에서는 유한요소법을 이용하여 인덕탄스를 계산하는 방식을 제시하고 본 방식이 기존의 방식과 오차가 거의 없음을 확인하였다. 또한 종래의 결과로서 구하기 어려운 권선분포가 일정하게 분포되지 않은 경우와 보다 복잡한 형상에도 본 방식을 적용하여 결과를 제시하였다.

**Abstract-** The inductances of air-core solenoid magnets with circular cross sections depend on the geometric structure and winding number. For the calculation of the inductance of these magnets, Grover's table is normally used. This study presents a method to calculate the inductance using finite element method. The result of the computation agrees well with those found in the literature. Inductances of solenoid magnets with nonuniform winding distribution of complicated shapes can also be computed using this method.

### 1. 서 론

공심 원통형자석은 원형 전류루프를 효과적으로 쌓아 놓은 형상으로서 자속의 비선형성과 포화가 없고 자심재료의 불균일로 인한 자계의 불균일을 배제할 수 있으며 자심재료의 제거로 인한 경제성

의 장점이 있어 고자계 및 균일자계 발생용 등 여러 방면에서 이용되고 있다. [1, 2] 더욱이 최근에 초전도 응용분야에서 고자계가 발생하는 경우에는 철심이 포화가 되므로 불가피한 형상이 된다. [3, 4] 이들 응용에 있어서 자석의 인덕탄스는 자기에너지와 직접 관련되므로 자석설계시에 매우 중요한 파라메타가 된다. 공심 원통형자석의 인덕탄스는 자석의 내반경 및 외반경, 종축길이 등 자석의 기하학적 구조 및 권선수에 종속되고 공심이므로 전류와는 무관하게 된다. 이러한 공심 원통형자석

\*正 會 員 : 釜山大 工大 電氣工學科 助教授 · 工博  
 接 受 日 字 : 1989年 5月 1日  
 1 次 修 正 : 1989年 8月 24日  
 2 次 修 正 : 1989年 10月 25日  
 3 次 修 正 : 1990年 2月 5日

에서 인덕탄스계산에는 Taylor 급수 확장에 의해 얻어진 결과로서 Grover에 의한 수치표를 이용하는 방식과 Montgomery에 의한 수치곡선을 이용하는 방식이 있으며, [5~7] 최근에는 다중적분 형태의 관계식을 간단화하여 계산을 수행한 연구가 발표되었다. [8]

본 연구에서는 원통형자석의 인덕탄스를 자석 내부의 분할된 요소에서 전류밀도의 자기 벡터포텐셜의 크기로 나타낼 수 있는 관계식을 도출하고 자기 벡터포텐셜을 유한요소법으로 구하여 인덕탄스를 계산하는 방식을 제시하였으며 기존의 방식에서 구한 수치와 본 방식에서 구한 수치를 비교하였다. 또한 종래의 결과로서 구하기 어려운 권선분포가 일정하게 분포되지 않은 경우와 보다 복잡한 형상에도 본 방식을 적용하여 이의 결과를 제시하였다.

## 2. 인덕탄스

그림 1과 같은 두개의 동축 평행 루프에서 루프 1에 흐르는 전류에 의해 발생된 자기 벡터포텐셜은 루프 2의 한 점 P에서 식(1)과 같이 된다. [9]

$$\begin{aligned} A &= \int \frac{\mu I dl}{4\pi R} \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{\mu I a}{4\pi R} d\phi' \hat{\phi}' \end{aligned} \quad (1)$$

단,  $\mu$ =매질의 투자율

$$\begin{aligned} R &= [a^2 + b^2 + c^2 - 2abc\cos(\phi - \phi')]^{1/2} \\ dl &= ad\phi' \hat{\phi}' \end{aligned}$$

식(1)에서 자기 벡터포텐셜은 축대칭이므로 접선방향 성분만 존재하며 크기는 루프 2의 각점에서  $\phi$ 에 관계없이 일정하다. 이 접선방향 성분의 크기를  $A_\phi$ 라 하면 자기 벡터포텐셜은 식(2)와 같이 된다. 그리고 식(2)는 임의의 루프에서 마찬가지로 적용된다.

$$A = A_\phi \hat{\phi} \quad (2)$$

무한 공간에서 자제에 의해 저장되는 자기에너지는 식(3)과 같다. [9]

$$\begin{aligned} W &= \int_{\infty} \frac{1}{2\mu} B^2 dv \quad (3) \\ &= \int_{\infty} \frac{1}{2\mu} B \cdot (\nabla \times A) dv \\ &= \int_{\infty} \frac{1}{2\mu} A \cdot (\nabla \times B) dv + \int_{\infty} \frac{1}{2\mu} (A \times B) \cdot ds \end{aligned}$$

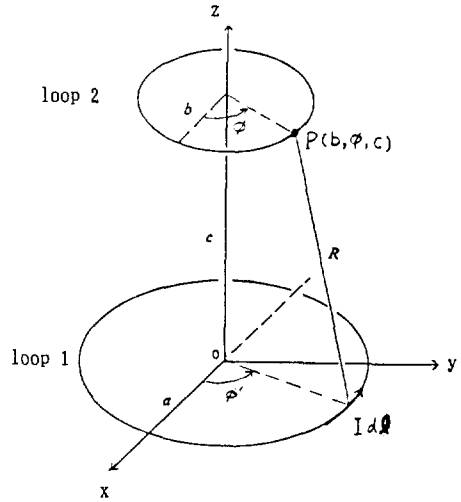


그림 1 두개의 동축 평행 루프  
Fig. 1 Two coaxial parallel loops

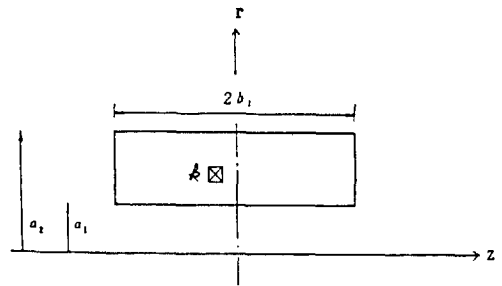


그림 2 단순 원통형자석(종단면 상반부)  
Fig. 2 Simple solenoid magnet

(여기에서 두번째 항은  $R \rightarrow \infty$ 에서 영이 되는 항이다.)

$$= \int_{\infty} \frac{1}{2\mu} A \cdot (\nabla \times B) dv$$

정자장인 경우에는  $\nabla \times B = \mu J$ 이므로 자기에너지는 식(4)와 같이 된다.

$$\begin{aligned} W &= \int_{\infty} \frac{1}{2\mu} A \cdot \mu J dv \quad (4) \\ &= \int_{\infty} \frac{1}{2} A \cdot J dv \end{aligned}$$

단,  $V$ 는  $J \neq 0$ 인 영역

루프 1에서 전류  $I$ 에 의해 저장되는 자기에너지는  $Idl = Jdv$ 이므로 식(4)로부터 식(5)와 같이 된다.

$$W = \frac{1}{2} I \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \quad (5)$$

식(2)와 식(5)로부터 루프 1에 저장되는 자기에너지는 식(6)과 같다.

$$W = \pi a l A_1 \quad (6)$$

단,  $A_1$ 은 루프 1의 위치에서 자기 벡터포텐셜 크기

식(6)을 원형 전류루프들이 쌓여 있는 형태가 되는 공심 원통형자석으로 확장하기 위하여 원통형 자석을  $z$ 축으로 자른 그림 2와 같은 종단면을 고려한다. 그림 2에서 단면적을  $n$ 등분하게 되면  $n$ 개의 원형 전류루프가 쌓여 있는 자석으로 가정할 수 있게 된다. 그리고  $k$ 번째 요소의 전류를  $I_k$ , 반경을  $r_k$ , 자기 벡터포텐셜을  $A_k$ 라 하면  $k$ 번째 전류루프에서 저장되는 자기에너지  $W_k$ 는 식(6)으로부터 식(7)과 같이 된다.

$$W_k = \pi r_k I_k A_k \quad (7)$$

자석 전체에 저장되는 자기에너지는 단면을  $n$ 등분 하였으므로 식(8)과 같이 된다.

$$W_m = \sum_{k=1}^n W_k \quad (8)$$

자석의 인덕탄스를  $L$ , 권선에 흐르는 전류를  $I$ , 총 권선수를  $N$ 라 하면 다음과 같이 된다.

$$W_m = \frac{1}{2} L I^2 \quad (9)$$

$$N I = \sum_{k=1}^n I_k \quad (10)$$

식(7), (8), (9)에서 자석의 인덕탄스는 식(11)과 같이 된다.

$$L = \frac{2\pi}{I^2} \sum_{k=1}^n r_k I_k A_k \quad (11)$$

전류밀도 즉 권선의 분포를 일정하게 하고 자석을 균등하게 분할하는 경우에는 식(10)에서  $I_k = NI/n$ 이므로 이를 식(11)에 적용하면 식(12)와 같이 된다.

$$L = \frac{2\pi N}{nI} \sum_{k=1}^n r_k A_k \quad (12)$$

여기에서 인덕탄스가 전류에 무관함을 나타내고 내반경이 분리되는 관계식을 얻기 위해 다음과 같이 규정화 한다.  $a_1^2$ 으로 규정화한 자석의 단면적을  $S^1$ 라 하면 전류밀도는 식(13)과 같이 되고, 식(12)에서  $a_1$ 으로 규정화한 반경을  $r'_k$ ,  $J a_1^2$ 으로 규정화한 자기 벡터포텐셜을  $A'_k$ 라 하면 식(14)와 같

이 된다.

$$J = \frac{NI}{a_1^2 S^1} \quad (13)$$

$$L = \frac{2\pi N J a_1^3}{nI} \sum_{k=1}^n r'_k A'_k \quad (14)$$

식(13)과 식(14)에서 자석의 인덕탄스는 식(15)가 된다.

$$L = \frac{2\pi N^2 a_1}{n S^1} \sum_{k=1}^n r'_k A'_k \quad (15)$$

식(15)에서 자석의 인덕탄스는 전류와 무관하고 내반경에 단순 비례함을 알 수 있다.

그림 3은 원통형자석을  $a$ 와  $b$ , 두 부분으로 나누어 전류밀도(권선분포)를 다르게 한 경우를 나타낸다. 이러한 형상은 고자계 초전도 자석에서 초전도선의 임계전류가 인가 자계에 종속되므로 전류밀도를 다르게 하여 초전도선을 효율적으로 이용하는 형상이 된다. [10] 이와 같은 형상에서  $a$ 부분의 전류밀도  $J_a$ 로 규정화한, 각 부분의 전류

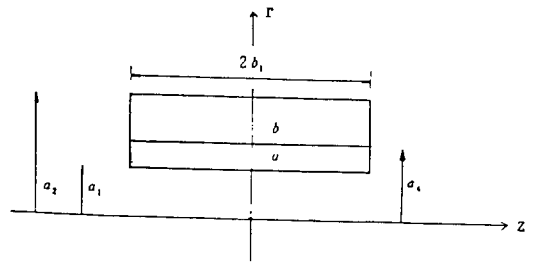


그림 3 권선분포가 다른 원통형자석  
Fig. 3 Solenoid magnet with nonuniform winding distribution

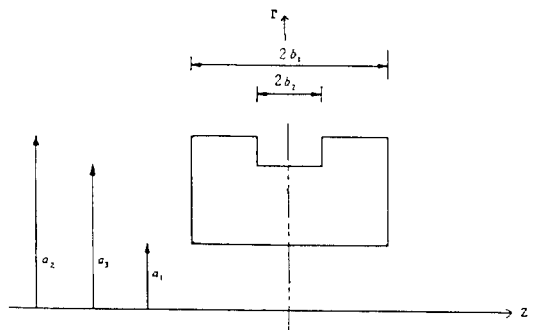


그림 4 외부보상 원통형자석  
Fig. 4 Outside notched solenoid magnet

밀도를  $J'_a$ (즉 1이 됨),  $J'_b$ 라 하고  $a_i^2$ 으로 규정화한 각 부분의 단면적을  $S'_a, S'_b$ 로,  $J_a a_i^2$ 으로 규정화한 벡터포텐셜을  $A'_k$ 라 하면 자석의 인덕탄스는 식(16)과 같이 된다.

$$L = \frac{2\pi N^2 a_i}{n(S'_a + S'_b) \left[ 1 + \frac{S'_b}{(S'_a + S'_b)} (J'_b - 1) \right]^2} \sum_{k=1}^n r'_k A'_k J'_k \quad (16)$$

단,  $J'_k$ 는  $a$ 부분에서는  $J'_a$ 가 되고  $b$ 부분에서는  $J'_b$ 가 된다.

그림 4는 보다 복잡한 형상으로서 외부보상 원통형자석을 나타낸다. 이러한 형상은 자석 내경안의 공간에서 균일자계를 발생하기 위해 설계되는 자석으로 많이 이용되는 형상이다. [6, 11] 이와 같은 형상에서도 자석의 인덕탄스는 식(15)와 식(16)이 마찬가지로 적용될 수 있다.

### 3. 유한요소법에 의한 정식화 [7, 12]

식(15)와 식(16)에서 나타난 바와 같이 원통형 자석의 인덕탄스는 자석 단면의 각 점에서 진류밀도와 자기 벡터포텐셜의 크기로 표시된다. 여기에서 자석 단면 각 점의 자기 벡터포텐셜을 유한요소법에 의해서 구하기 위한 정식화를 아래에 기술한다.

정자계의 경우에 앞서서도 기술한, 암배어 법칙 미분형은 식(17)과 같다.

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{J} \quad (17)$$

식(17)에  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ 를 대입하여 정리하면 식(18)과 같이 된다.

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J} \quad (18)$$

전술한 원통형 자석에서 벡터포텐셜은 원통좌표계에서 식(2)에 나타난 바와 같이 접선방향 성분만 존재하고  $\phi$ 에 무관하므로 식(2)와 식(18)에서 식(19)와 같이 된다.

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial (r A_\phi)}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 A_\phi}{\partial z^2} = -\mu J \quad (19)$$

단,  $J$ 는 접선방향 성분의 진류밀도  
자계의 각 성분은 식(2)와  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ 에서 다음과 같이 된다.

$$B_r = -\frac{\partial A_\phi}{\partial z} \quad (20)$$

$$B_\phi = 0 \quad (21)$$

$$B_z = \frac{A_\phi}{r} + \frac{\partial A_\phi}{\partial r} \quad (22)$$

식(19) - (22)의 관계식에서 에너지 범함수를 구하면 식(23)과 같다.

$$\begin{aligned} X &= \int_s \frac{1}{2\mu} \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} 2\pi r dr dz \\ &\quad - \int_s \mathbf{J} \cdot \mathbf{A} 2\pi r dr dz \\ &= \int_s \frac{1}{2\mu} \left\{ \left( \frac{A_\phi}{r} + \frac{\partial A_\phi}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \right)^2 \right\} 2\pi r dr dz \\ &\quad - \int_s \mathbf{J} A_\phi 2\pi r dr dz \end{aligned} \quad (23)$$

해석대상의 영역을 1차 3각형요소로 분할하는 경우, 요소내의 벡터포텐셜은 식(24)와 같다.

$$A_\phi^e = N_i^e A_i + N_j^e A_j - N_k^e A_k \quad (24)$$

$$\text{단, } N_i^e = \frac{a_i + b_i r + c_i z}{2\Delta^e}$$

$$a_i = r_j z_k - r_k z_j$$

$$b_i = z_j - z_k$$

$$c_i = r_k - r_j$$

$$\Delta^e = \text{요소의 면적}$$

$r_i, z_i, A_i$ 는 요소 각 정점의 좌표 및 벡터포텐셜의 크기이고  $i, j, k$ 는 순환관계임

3각형요소 내에서 에너지 범함수를 구하면 식(23)과 식(24)에서 식(25)와 같이 된다.

$$\begin{aligned} X^e &= \int_{\Delta^e} \frac{1}{2\mu^e} \left\{ \left( \frac{A_\phi^e}{r} + \frac{\partial A_\phi^e}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{\partial A_\phi^e}{\partial z} \right)^2 \right\} 2\pi r dr dz \\ &\quad - \int_{\Delta^e} \mathbf{J}^e A_\phi^e 2\pi r dr dz \end{aligned} \quad (25)$$

단,  $\mu^e$  = 요소내 매질의 투자율

$J^e$  = 요소내의 진류밀도

식(25)를 각 정점의 벡터포텐셜로 편미분하여 구한, 요소 행렬방정식을 구성하는 기본식이 식(26)과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial X^e}{\partial A_i} &= 2\pi \left[ \frac{r_0}{4\mu^e \Delta^e} \sum_{l=i,j,k} (b_l b_l + c_l c_l) A_l + \frac{\Delta^e}{9\mu^e r_0} \right. \\ &\quad \left. \sum_{l=i,j,k} A_l + \frac{1}{6\mu^e} \sum_{l=i,j,k} (b_i + b_l) A_l \right. \\ &\quad \left. - \frac{J^e \Delta^e}{4} \left( r_0 + \frac{r_i}{3} \right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (26)$$

$$\text{단, } r_0 = \frac{r_i + r_j + r_k}{3}$$

$i, j, k$ 는 순환관계임

### 4. 적용사례 및 검토

공심 원통형자석의 인덕탄스는 식(15)와 식(16)에서 나타난 바와 같이 자석의 내반경 및 외반경, 종축길이, 권선분포 등에 의해 종속되는 데, 여기

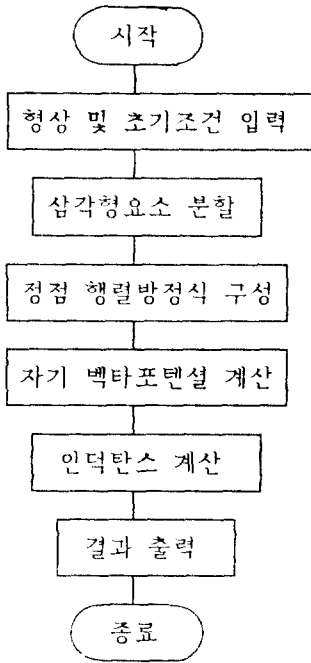


그림 5 인덕탄스 계산 흐름선도  
Fig. 5 Flowchart of inductance computation

표 1 단순 원통형자석에서 인덕탄스 비교  
Table 1 Inductances of simple solenoid magnets

치수	$L'[\mu H/m]$	본 결과	문헌[5]
$a_2=1.1, b_1'=2$		0.839	0.848
$a_2=1.5, b_1'=2$		1.020	1.026
$a_2=2, b_1'=2$		1.261	1.269
$a_2=2, b_1'=1$		1.904	1.917
$a_2=2, b_1'=0.1$		3.417	3.449

표 2 분할 요소수에 따른 인덕탄스( $a_2=2, b_1'=2$ )

Table 2 Inductances due to element numbers

분할요소수	49	199	577	881
$L'[\mu H/m]$	1.085	1.215	1.251	1.256

에서는 인덕탄스를  $N^2 a_1$ 으로 규정화하여 자석의 기하학적 구조 및 권선분포에 따른 인덕탄스를 검토하였다.

단순 원통형자석에서 유한요소법에 의해 자기

표 3 각 형상에서의 인덕탄스  
Table 3 Inductances of different shapes

제원	형상	불균일전류밀도 ( $J'_a=1, J'_b=2$ )	Helmholtz	외부보상
$a_2$		2	2	2
$a_3$			1	1.5
$a_1$		1.5		
$b_1$		2	2	2
$b_2$			0.5	1
$L'[\mu H/m]$		1.428	1.262	1.108

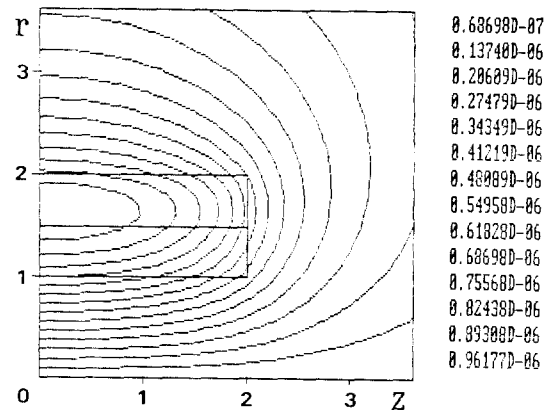


그림 6 등 자기 벡터포텐셜 곡선(불균일 전류밀도)  
Fig. 6 Equipotential lines (nonuniform current density)

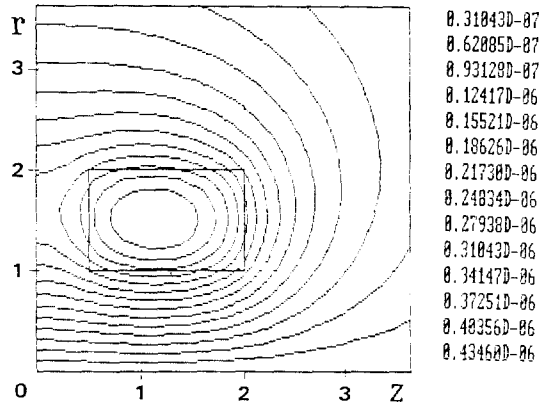


그림 7 등 자기 벡터포텐셜 곡선(Helmholtz형)  
Fig. 7 Equipotential lines (Helmholtz shape)

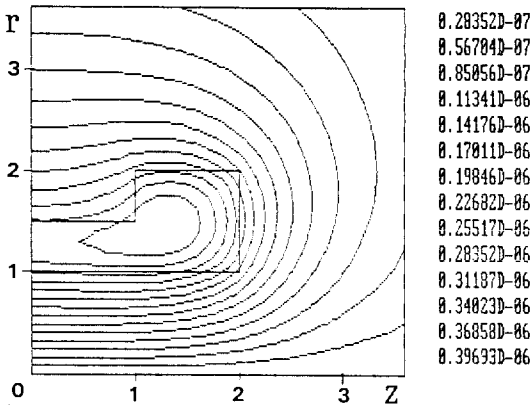


그림 8 등 자기 벡타포텐셜 곡선(외부보상형)  
**Fig. 8 Equipotential lines (outside notched shape)**

벡타포텐셜을 구하여, 식(15)에 의해 규정화한 인덕탄스를 구하는 흐름선도는 그림 5와 같고 이의 결과는 표 1과 같다. 여기에서 모든 길이는  $a_1$ 으로 규정화한 값이다.

표 1의 결과는 해석대상 영역을 2591개의 요소로 분할하여 얻은 수치로서 Grover에 의한 결과를 내삽하여 얻은 수치와 오차가 1% 이하임을 보이고 있다.

표 2는  $a_2=2, b_1=2$ 인 경우에 대하여 분할 요소수에 따른 오차의 정도를 비교하기 위해 얻은 결과이다.

표 2에서 분할 요소수가 49개인 경우 14.5%, 199개인 경우 4.3%, 577개인 경우 1.4%, 881개인 경우 1%의 오차를 보이고 있다.

표 3은 종래의 방식으로 적용이 어려운 전류밀도(권선분포)가 일정하게 분포되지 않은 경우, 외부보상 원통형자석의 경우 및 자석이 두개로 분리되는 Helmholtz형 자석의 경우에 대해 얻은 결과이다.

표 3에 나타난 바와 같이, 같은 외형차수와 권선수에서 바깥쪽 부분에 권선분포가 많이 되는 자석이 인덕탄스가 크게 된다. 그림 6, 7 및 8은 각각 표 3에서 전류밀도가 일정하지 않은 형상, Helmholtz형상 및 외부보상 형상에 대한 등 자기 벡타포텐셜 곡선으로서 우측의 수치는 각 곡선의 규정화된 포텐셜 크기를 나타낸다. 그림에서 보면 포텐셜의 최대치가 전류밀도가 큰 쪽으로 기울어지고 있음을 알 수 있다.

**5. 결론**

공심 원통형자석에서 인덕탄스는 자기에너지와 직접 관련되므로 이의 계산은 매우 중요하다.

본 연구에서는 원통형자석의 인덕탄스를 자석단면의 각 점에서 전류밀도와 자기 벡타포텐셜의 크기로 나타내는 관계식을 도출하고 자기 벡타포텐셜을 유한요소법으로 구하여 인덕탄스를 계산하는 방식을 제시하였다. 그리고 적용사례에서 나타난 바와 같이 기존의 방식에서 구한 수치와 본 방식에서 분할 요소수를 크게 하는 경우에 오차가 거의 없음을 보이고 있다. 분할 요소수가 200개 정도로 작은 경우에도 오차가 5% 이하로서 자석 설계중, 간략계산에 유용하게 이용될 수 있다. 그러나 자석의 단면적이 매우 작은, 벽이 얇은 경우나 디스크형의 경우에는 요소의 분할에 어려움이 따른다. 그리고 종래의 결과로서 구하기 어려운 권선분포가 일정하게 분포되지 않은 경우와 외부보상 원통형자석, Helmholtz형 자석등 형상이 복잡한 경우에도 본 방식을 적용하여 결과를 제시하였다.

본 연구에서 제시된 방식은 철심을 가지는 형상을 포함하여 어떠한 형상에도 적용을 확장할 수 있으며 자기 인덕탄스 뿐만 아니라 상호 인덕탄스 계산에도 이용될 수 있다.

본 연구는 1988년도 한국과학재단 연구비 지원에 의해 수행된 연구입니다.

**참 고 문 헌**

- [1] J.P. Blewett, "Design of Air Core Synchrotron," J. Appl. Phys., vol. 18, pp. 976 ~983, Nov. 1947
- [2] M.W. Garrett, "Axially Symmetric Systems for Generating and Measuring Magnetic Fields Part I," J. Appl. Phys., vol. 22, pp. 1091 ~1107, Sep. 1951
- [3] H. Brechna, Superconducting Magnet Systems, Springer-Verlag, 1973
- [4] M.N. Wilson, Superconducting Magnet, Oxford Univ. Press, 1983
- [5] F.W. Grover, Inductance Calculations, D. Van Nostrand Co., 1946
- [6] D.B. Montgomery, Solenoid Magnet Design, Robert E. Krieger, 1980
- [7] 이승원 외, 초전도 전력에너지 저장장치에 관한 연구보고서, 서울대 생산기술연구소,

- 1985
- [8] Dingan Yu and K.S. Han, "Self-Inductance of Air-Core Circular Coils with Rectangular Cross Section," IEEE, MAG-23, no 6, pp. 3916 ~ 3921, Nov. 1987
- [9] R.K. Wangsness, Electeomagnetic Fields, John Wiley & Sons, 1979
- [10] K. Kaiho et al. "Optimization of Superconducting Solenoid," Cryogenics, vol. 16, pp. 587~588, Oct. 1976
- [11] M.P. Janawadkar et al. "Computation of Minimum Volume Sixth Order Superconducting Solenoids," Cryogenics, vol. 21, pp. 403~407, 1981
- [12] 임달호, 전기계의 유한요소법, 동명사, 1987
-