

잡음하에서의 적응관측자 및 적응식별기에 관한 연구

A Study on the Adaptive Observer/Adaptive Identifier in the Presence of Noise

崔 棕 鎬* · 南 碩 祐**
(Chong-Ho Choi · Seok-Woo Nam)

요 약

본 논문에서는 ARMA(Autoregressive Moving Average) 모델 형태의 시스템에 잡음이 있을 때 사용할 수 있는 적응관측자를 제안하였다. 시스템의 입력을 MA(Moving Average) 형태의 적응관측자를 통과시킴으로써 시스템을 MA 형태로 나타낼때의 매개변수를 추정하고 이로부터 시스템에 잡음이 없는 경우에 해당하는 출력을 추정한다. 이 방법은 Suzuki가 제시한 방법의 특수한 경우에 해당된다. 그 다음에는 잡음이 없는 경우에 해당하는 추정된 출력을 가지고 Suzuki의 적응법칙에 따라서 시스템의 매개변수를 구하고 이 매개변수로부터 상태변수들을 추정한다. 여기서 제안한 방법에서는 시스템에 잡음이 있더라도 시스템 매개변수 추정오차는 충분히 작게 할 수 있으며 시스템에 공정잡음이 없는 경우에는 상태변수 추정오차도 충분히 작게 할 수 있다는 것을 보인다. 이러한 제안된 적응 관측기의 성질들을 컴퓨터 시뮬레이션에 의하여 확인한다.

Abstract- An adaptive observer which is applicable to discrete linear time invariant systems of ARMA type in the presence of noise is proposed. It first estimates the system parameters of the MA type by applying only the system input to the observer. Then it estimates the output which corresponds to the output of the system without any noise. This is a special case of Suzuki's adaptive observer. This estimated output is applied to Suzuki's adaptive observer to estimate the system parameters of ARMA type and the states. The proposed method can make the estimate errors of the system parameters sufficiently small even in the presence of noise in the system. It can also make the estimate errors of the states of the system sufficiently small when there is no process noise. These properties of the proposed adaptive observer is certified by computer simulation.

*正 會 員 : 서울大 工大 制御計測工學科 副教授 · 工博
 **正 會 員 : 서울大 工大 制御計測工學科 碩士課程 修了
 接受日字 : 1989年 5月 29日
 一次修正 : 1989年 11月 15日

1. 서 론

어떤 선형시스템의 매개변수를 알고 있으며 Luenberger 관측자를 사용하여 그 시스템의 입력과 출력을 갖고 상태변수를 추정할 수 있다. 그러

나 실제의 경우에는 플랜트의 매개변수가 알려져 있지 않는 경우가 많이 있다. 또한 상태변수들도 항상 측정할 수 없기 때문에 연속적으로 미지의 매개변수들과 직접 측정이 불가능한 상태변수들을 입력과 출력만을 가지고 추정하는 적응관측자의 구성이 필요하게 된다. 이러한 적응관측자의 개념이 Carroll과 Lindorff[1]에 의해 단일 입력력 연속시간 시스템에 처음 도입된 이후로 다중 입력력을 포함하는 연속시간과 이산시간 시스템에 대한 여러가지 방법들이[2~5] 발전되어 왔다. 이때까지의 단일입력 단일출력을 갖는 적응관측자들은 점근적 안정도가 증명된다고 하더라도 그 수렴속도에 있어서는 성능이 좋지 않았으나 1977년 Kreisselmeier[4]가 제안한 단일 입력력 연속시간 시스템에 대한 파라미터화된 적응관측자는 시스템의 매개변수를 추정하는 적응식별기로서 또는 상태변수를 추정하는 적응관측자로서 그 수렴속도에 있어서 괄목할 만한 성과가 있었다. 1980년에는 Suzuki등[5]이 Kreisselmeier의 방법을 이산시간 시스템에 적용시켰다. 그러나 이러한 방법들은 모두 잡음이 없는 경우에 적용되는 것들인데 실제에 있어서는 많은 경우에 측정잡음이 존재하므로 이러한 경우에 위와같은 적응관측자들을 적용시켜 보면 매개변수와 상태변수의 추정치가 수렴하지 못하고 오차가 커지는 것을 알 수 있다. 본 논문에서는 Suzuki의 적응관측자를 이용하여 잡음이 있는 경우에도 매개변수의 추정치가 참값에 수렴하며 공정잡음은 없고 측정잡음만 있는 경우에는 상태변수 추정치도 참값에 수렴하는 적응관측자를 제안한다.

2. 제안된 적응관측자

일반적으로 선형 시불변 이산 시스템에 잡음이 들어가면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + bu(k) + gw_1(k) \\ y(k) &= c^T x(k) + w_2(k) \end{aligned} \quad (1)$$

여기서 $u(k)$ 는 입력, $y(k)$ 는 출력이고 A, b, c, g 는 상수행렬 및 벡터들이다. 또 $x(k)$ 는 직접 측정할 수 없는 상태벡터이고 $w_1(k)$ 는 공정잡음, $w_2(k)$ 는 측정잡음이다. Suzuki[5]는 시스템 (A, b, c) 를 모르고 잡음 $w_1(k)$ 및 $w_2(k)$ 가 없는 경우에 시스템의 매개변수 및 상태변수의 추정오차가 0으로 수렴하는 적응관측자를 제시하였다. 그러나 잡음이 있으면 이러한 적응관측자는 매개변수 및 상태변수의 추정오차가 상당히 클 수 있으므로 이들

을 줄이는 방법에 대하여 생각하자. 우선 시스템에 대한 가정은 다음과 같다.

- 가정 1) (A, b) 가 완전 가제어하고 (A, c) 가 완전 가관측하다.
- 2) 행렬 A 는 안정하다.
- 3) 입력 $u(k)$ 는 유한하며 (즉 $u(k) \leq u_{max} \forall k$) 또한 persistantly exciting 하다.
- 4) 시스템의 차수는 n 이다.
- 5) $E[w_1(k)] = E[w_2(k)] = 0$ 이고 $w_1(k)$ 및 $w_2(k)$ 는 상관관계가 없으며 (uncorrelated) 유한하다.

시스템 (1)은 관측 가능한 표준형(observable canonical form)으로 다음과 같이 A, b, c, g 를 잡을 수 있다.

$$A := \begin{bmatrix} a_1 & 1 & \cdots & 0 \\ a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & 1 \\ a_n & 0 & & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots & & & I_{n-1} \\ a & \vdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & & & 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} a &:= [a_1 a_2 \cdots a_n]^T \\ b &:= [b_1 b_2 \cdots b_n]^T \\ c &:= [1 \ 0 \ \cdots \ 0]^T \\ g &:= [g_1 g_2 \cdots g_n]^T \end{aligned}$$

여기서 $a, b : (i=1, \dots, n)$ 는 시스템의 운동을 나타내는 최소 갯수의 매개변수이고 I_{n-1} 은 $(n-1) \times (n-1)$ 단위행렬을 나타낸다. 본 논문에서 다룰 문제는 a, b, g 를 모르고 입력 $u(k)$ 와 출력 $y(k)$ 가 주어졌을 때 어떻게 a, b 및 $x(k)$ 를 추정하는가 이다. 입력 $u(k)$ 와 $y(k)$ 와의 관계는 (1)에서

$$\begin{aligned} y(k) &= c^T (zI - A)^{-1} b u(k) + c^T (zI - A)^{-1} g w_1(k) + w_2(k) \\ &= \frac{q(z)}{r(z)} u(k) + c^T (zI - A)^{-1} g w_1(k) + w_2(k) \end{aligned} \quad (3)$$

$$\frac{q(z)}{r(z)} := c^T (zI - A)^{-1} b$$

이 되는데 $r(z)$ 의 차수가 $q(z)$ 의 차수보다 항상 크기 때문에 $r(z)$ 가 중근을 갖지 않는 경우에는 다음과 같이 전개시킬 수 있다.

$$\frac{q(z)}{r(z)} = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{z - r_i} \quad (4)$$

여기서 행렬 A 가 안정하므로 각각의 극점 $|r_i| < 1$ 이다. 그리고

$$\frac{q_i}{z - r_i} = \sum_{j=1}^{\infty} q_i r_i^{j-1} z^{-j} \quad (5)$$

이므로 (5)를 (4)에 대입하면

$$\frac{q(z)}{r(z)} = \sum_{j=1}^{\infty} h_j z^{-j} \quad (6)$$

$$h_j := q_1 r_1^{j-1} + q_2 r_2^{j-1} + \dots + q_n r_n^{j-1}$$

이고 z^{-j} 의 계수 h_j 는 $j \rightarrow \infty$ 로 가면 $|r_i| < 1$ 이므로 $h_j \rightarrow 0$ 로 접근한다. (이와 같은 성질은 $r(z)$ 가 중근을 갖더라도 성립한다.) 이러한 성질을 이용하여 (6)을 MA(Moving Average) 모델의 형태로 근사시킬 수 있다. 즉 (3)을 다시쓰면

$$y(k) = y_1(k) + y_2(k) \quad (7)$$

$$y_1(k) := c^T (zI - A)^{-1} b u(k)$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} h_j z^{-j} u(k)$$

$$y_2(k) := c^T (zI - A)^{-1} g w_1(k) + w_2(k)$$

인 형태이다. 여기서 $y_1(k)$ 는 출력중 입력 $u(k)$ 에 의하여 발생한 부분이며 $y_2(k)$ 는 잡음에 의하여 발생한 부분이다. 뒷식에서 $y_1(k)$ 를 h_i 중 처음 m 개의 항으로만 근사시킬때를 $y_{1a}(k)$ 라 하자. 그러면 $m \rightarrow \infty$ 이면 $y_{1a}(k) \rightarrow y_1(k)$ 가 되는 것은 (6)으로부터 알 수 있다. $y_{1a}(k)$ 와 $u(k)$ 와의 관계를 상태방정식으로 나타내면

$$\bar{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & \vdots & \\ 0 & \vdots & I_{m-1} \\ & \vdots & \dots \\ 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \bar{x}(k) + \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_m \end{bmatrix} u(k) \quad (8)$$

$$y_{1a}(k) = [1 \ 0 \ \dots \ 0] \bar{x}(k)$$

와 같이 되는데 $q(z)/r(z)$ 를 모르므로 $h_i (i=1, \dots, m)$ 도 미지의 매개변수이다. $\hat{y}_{1a}(k)$ 를 $y_{1a}(k)$ 의 추정치라 할 때, h_i 의 추정치 $\hat{h}_i(k)$ 를 구할 수 있다면 (8)로부터 $\hat{y}_{1a}(k)$ 도 구할 수 있다. 먼저 다음의 행렬 및 벡터들을 정의하자.

$$\bar{F} := \begin{bmatrix} 0 & \vdots & \\ 0 & \vdots & I_{m-1} \\ & \vdots & \dots \\ 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$h := [h_1 \ h_2 \ \dots \ h_m]^T$$

$$\bar{c} := [1 \ 0 \ \dots \ 0]^T$$

그리고 행렬 \bar{F} 를 이용하여 $m \times 1$ 벡터 $\bar{\phi}(k)$ 를 다음과 같이 정의하자.

$$\bar{\phi}(k+1) := \bar{F}^T \bar{\phi}(k) + \bar{c} u(k), \bar{\phi}(0) = 0$$

이 $\bar{\phi}(k)$ 를 이용하여 $y_{1a}(k)$ 를 표시하면

$$y_{1a}(k) = \bar{\phi}^T(k) h$$

이 된다. 그리고 h 를 구하기 위하여 시간 k 에서 평가함수를

$$\bar{J}(k) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k (y(j) - y_{1a}(j))^2$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k [y(j) - \bar{\phi}^T(j) h]^2 \quad (9)$$

라 놓고 이 $\bar{J}(k)$ 를 최소로 하는 h 를 $\hat{h}(k)$ 라 하자. $\bar{J}(k)$ 에서 $x_{1a}(j)$ 를 사용하면 더 정확한 $\hat{h}(k)$ 를 얻을 수 있었으나 $y_{1a}(j)$ 를 모르므로 $y(j)$ 를 대신 사용한 것이다. 이렇게 하여 매개변수 벡터 $\hat{h}(k)$ 를 구하면 (8)에서 h 대신 $\hat{h}(k)$ 를 사용함으로써 $\hat{y}_{1a}(k)$ 를 구할 수 있다. 이때 $\Delta y_1(k)$ 를 다음과 같이 정의하자.

$$\Delta y_1(k) := y_1(k) - \hat{y}_{1a}(k) \quad (10)$$

Suzuki[5]의 적응관측자에서는 $x(k)$ 를 추정하는데 관측자의 입력으로 시스템의 입력과 출력을 사용하였는데 여겨지 제시한 방법은 관측자의 입력으로 시스템의 입력만 사용하였다. (그림 1). 따라서 이것은 Suzuki가 제안한 방법의 특수한 경우로 볼 수 있고 Suzuki의 매개변수 추정방법을 그대로 사용할 수 있다. 더욱이 이 경우는 \bar{F} 의 특수한 형태 때문에 Suzuki의 추정방법은 보통의 시스템 매개변수 추정방법에 사용하는 최소자승법과 동일하다. 이렇게 구한 $\hat{h}(k)$ 는 다음과 같은 성질을 가지고 있다.

정리 : 2절의 가정을 만족하고 시스템의 입출력

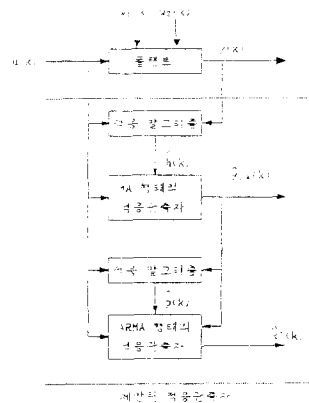


그림 1 제안된 적응관측자의 블록선도
Fig. 1 Block diagram of the proposed adaptive observer.

이 (3)으로 표시된다. 하자. 또한 이 시스템의 MA형태의 모델의 차수 및 입출력 데이터 수를 각각 m 과 k 라 하자. 그러면 평가 함수 (9)를 최소로 하는 $\hat{h}_i(k)$, $i=1, 2, \dots, m$ 는 $m \rightarrow \infty$, $k/m \rightarrow \infty$ 이면 h_i 에 수렴한다(converges in the mean square sense). 이때 $\hat{y}_{1a}(k)$ 도 $y_1(k)$ 에 수렴한다.

증명) 부록을 볼 것.

따라서 위의 정리로부터 $m \rightarrow \infty$, k/m 이면 $\Delta y_1(k) \rightarrow 0$ 이 됨을 알 수 있다. 또한 (7)에서의 $y_1(k)$ 를 상태변수 $x'(k)$ 를 사용하여 나타내면

$$\begin{aligned} x'(k+1) + Ax'(k) + bu(k), \quad x'(0) = x(0) \quad (11) \\ y_1(k) = c^T x'(k) \end{aligned}$$

가 된다. 위의 (11)과 같은 시스템에서는 잡음이 없으므로 Suzuki 적응관측자를 그대로 사용하면 시스템의 매개변수 및 $x'(k)$ 의 추정치가 참값에 수렴하게 된다. 이 적응관측자는 시스템 (11)을 안정한 행렬 F 를 써서 다음과 같은 과정을 통하여 구성할 수 있다.

$$\begin{aligned} F = \begin{bmatrix} f \\ \vdots \\ \frac{I_{n-1}}{0} \end{bmatrix}, \quad f = [f_1 f_2 \dots f_n]^T \\ x'(k+1) = Fx'(k) + p_a y_1(k) + p_b u(k) \quad (12) \\ p_a := a - f \quad p_b := b \end{aligned}$$

그리고 (12)를 다시 정리하면

$$x'(k) = \sum_{j=0}^{k-1} F^{k-j-1} (y_1(j) p_a + u(j) p_b) + F^k x(0) \quad (13)$$

으로 나타낼 수 있다. 다음과 같이 $n \times n$ 행렬 $S_1(k)$, $S_2(k)$ 를 정의하자.

$$\begin{aligned} S_1(k+1) &:= FS_1(k) + I_n y_1(k), \quad S_1(0) = 0 \\ S_2(k+1) &:= FS_2(k) + I_n u(k), \quad S_2(0) = 0 \end{aligned}$$

이 $S_i(k)$, $i=1, 2$ 를 이용하여 (13)를 다시쓰면

$$\begin{aligned} x'(k) &= S(k) p + F^k x(0) \quad (14) \\ S(k) &:= [S_1(k) \quad S_2(k)] \\ p &:= [p_a^T \quad p_b^T]^T \end{aligned}$$

이고 (11)의 출력식은

$$\begin{aligned} y_1(k) &= c^T S(k) p + c^T F^k x(0) \\ &= \phi(k)^T p + c^T F^k x(0) \quad (15) \\ \phi_i(k) &:= S_i(k)^T c, \quad i=1, 2 \\ \phi(k) &:= [\phi_1(k)^T \quad \phi_2(k)^T]^T \end{aligned}$$

가 된다. 그러면 (14)과 (15)에 대응하는 적응관측자는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \hat{x}'(k) &= S(k) \hat{p}(k) + F^k \hat{x}(0), \quad \hat{x}(0) = x(0) \quad (16) \\ \hat{y}_1(k) &= \phi(k)^T \hat{p}(k) + c^T F^k \hat{x}(0) \\ \hat{p}(k) &:= [[a(k) - f]^T \quad b(k)^T]^T \end{aligned}$$

여기서 $\hat{x}'(k)$ 는 상태벡터 $x'(k)$ 는 상태벡터 $x'(k)$ 의 추정치이고 $\hat{y}_1(k)$ 는 관측자의 출력이며 $a(k)$ 와 $b(k)$ 는 a 와 b 의 추정치, 그리고 $\hat{x}(0)$ 는 $x(k)$ 의 초기치이다. 다음과 같이 평가함수를 정하고,

$$J(k) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k [y_1(j) - \phi(j)^T \hat{p} - c^T F^j \hat{x}(0)]^2 \quad (17)$$

$p(k)$ 는 이 평가함수를 최소로 하는 해라 하자. 이 해는 최소자승법에 의하여 쉽게 구하여지며 이렇게 구한 $p(k)$ 를 (14) 및 (16)에 대입하면 $a(k)$, $b(k)$ 및 $\hat{x}'(k)$ 를 구할 수 있는데 k 가 커짐에 따라 $p(k)$ 는 p 에 수렴하고 \hat{x}' 도 $x'(k)$ 에 수렴한다. [5] 그러나 $y_1(k)$ 는 알 수 없으므로 $\hat{y}_{1a}(k)$ 를 대신 사용하여 시스템의 매개변수 및 $x'(k)$ 를 추정하는 경우에 대하여 생각하자. 우선 $n \times n$ 행렬 $S_{1a}(k)$, $\Delta S_1(k)$, 이로부터 발생하는 행렬 $\hat{S}_a(k)$ 및 벡터 $\hat{\phi}_{1a}(k)$, $\Delta \phi_1(k)$, $\hat{\phi}_a(k)$ 를 아래와 같이 정의하자.

$$\begin{aligned} \hat{S}_{1a}(k+1) &:= F S_{1a}(k) + I_n \hat{y}_{1a}(k), \quad S_{1a}(0) = 0 \\ \Delta S_1(k+1) &:= F \Delta S_1(k) + I_n \Delta y_1(k), \quad \Delta S_1(0) = 0 \\ \hat{S}_a(k) &:= [\hat{S}_{1a}(k) \quad S_2(k)] \\ \hat{\phi}_{1a}(k) &:= \hat{S}_{1a}(k)^T c \\ \Delta \phi_1(k) &:= \Delta \hat{S}_1(k)^T c \\ \Delta \phi_1(k) &:= [\hat{\phi}_{1a}(k)^T \quad \phi_2(k)^T]^T \quad (18) \end{aligned}$$

그러면 정의로부터

$$\begin{aligned} S_1(k) &= S_{1a}(k) + \Delta S(k) \quad (19) \\ \phi_1(k) &= \hat{\phi}_{1a}(k) + \Delta \phi_1(k) \end{aligned}$$

가 되는 것을 알 수 있다.

$J(k)$ 를 (10)과 (19)를 사용하여 $y_1(k)$ 대신에 $\hat{y}_{1a}(k)$ 로, $\phi_1(k)$ 대신에 $\hat{\phi}_a(k)$ 로 나타내면

$$\begin{aligned} J(k) &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k [\hat{y}_{1a}(j) - \hat{\phi}_a(j)^T \hat{p} - c^T F^j \hat{x}(0) \\ &\quad + \Delta y_1(j) - \Delta \phi_1(j)^T a]^2 \end{aligned}$$

이 된다. 여기서 $\Delta y_1(k)$ 및 $\Delta \phi_1(k)$ 는 m 과 k/m 가 커짐에 따라 0에 수렴하므로 $J(k)$ 에 미치는 영향도 감소한다. 따라서 $J(k)$ 대신에 $\Delta y(j) - \Delta \phi_1(j)^T a$ 의 영향을 무시한

$$\hat{J}(k) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k [\hat{y}_{1a}(j) - \hat{\phi}_a(j)^T \hat{p} - c^T F^j \hat{x}(0)]^2$$

를 사용하고 이를 최소화하는 p 를 $\hat{p}(k)$ 라 하자. 그러면 m 및 k/m 가 커짐에 따라 $\hat{p}(k)$ 는 $p(k)$ 에

수렴한다. 그런데 k 가 커짐에 따라 $p(k)$ 는 k 에 수렴하므로 결국 m 및 k/m 가 커지면 $\hat{p}(k)$ 는 p 에 수렴하게 된다. 이는 m 을 크게 잡으면 k 가 커짐에 따라 여기에 제시한 방법으로부터 시스템의 매개변수는 충분히 정확하게 알아 낼 수 있다는 것을 의미한다.

또한 (16)에서 $S(k)$ 대신에 $\hat{S}_a(k)$ 를, $p(k)$ 대신에 $\hat{p}(k)$ 를 사용하여 추정된 $x'(k)$ 를 $\hat{x}'(k)$ 라 할 때

$$\hat{x}'(k) = \hat{S}_a(k) \hat{p}(k) + F^k \hat{x}(0), \quad \hat{x}(0) = x(0)$$

가 되며 m 및 k/m 가 커짐에 따라 $\hat{S}_a(k)$ 와 $\hat{p}(k)$ 가, $S_a(k)$ 와 $p(k)$ 에 각각 수렴하므로 $x'(k)$ 도 $x'(k)$ 에 수렴하게 된다. 이는 시스템에 측정잡음만 있는 경우에 m 를 충분히 크게 잡으면 여기서 제시한 방법으로 시스템의 상태변수도 잘 추정해 낼 수 있음을 의미한다. 그러나 시스템에 공정잡음이 있는 경우에는 여기서 제시한 방법은 입력에 의하여 변환만큼의 상태변수 $x'(k)$ 를 추정하므로 공정잡음이 상태변수에 미치는 영향만큼의 오차를 유발한다.

여기서 제안된 적응관측자의 전체적인 블록선도는 그림 1과 같다.

3. 시뮬레이션 및 결과

다음과 같은 2차 시스템[5]에 대하여 제안된 적응관측자와 Suzuki의 적응관측자를 적용하여 같은 조건하에서 시뮬레이션하였다.

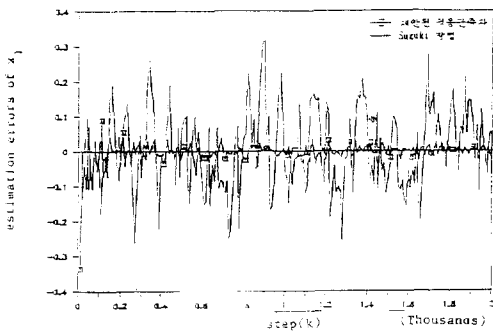


그림 2 제안된 적응관측자와 Suzuki방법의 $x(1)$ 추정오차(측정잡음이 표준편차가 0.1인 백색잡음 일때)

Fig. 2 Estimation error of $x(1)$ in the proposed method and Suzuki's adaptive observer(standard deviation of measurement noise=0.1)

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ a_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} w_1(k)$$

$$y(k) = x_1(k) + w_2(k)$$

여기서 시스템의 매개변수 값은

$$a_1 = 1.52, \quad a_2 = -0.60, \quad b_1 = 0.43, \quad b_2 = -0.35$$

로 하였고 입력 $u(k)$ 는 크기가 ± 1 을 갖는 주파수로

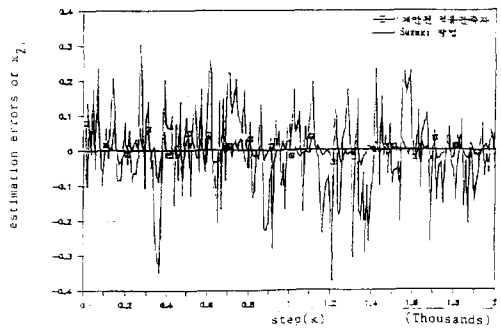


그림 3 제안된 적응관측자와 Suzuki 방법의 $x(2)$ 추정오차(측정잡음이 표준편차가 0.1인 백색잡음 일때)

Fig. 3 Estimation error of $x(2)$ in the proposed method and Suzuki's adaptive observer(standard deviation of measurement noise=0.1)

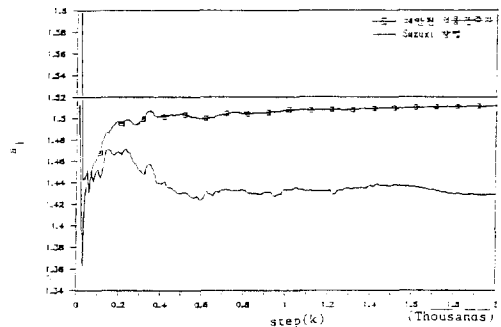


그림 4 제안된 적응관측자와 Suzuki방법의 매개변수 a_1 추정(측정잡음이 표준편차가 0.1인 백색잡음 일때)

Fig. 4 Estimation of parameter a_1 in the proposed method and Suzuki's adaptive observer(standard deviation of measurement noise=0.1)

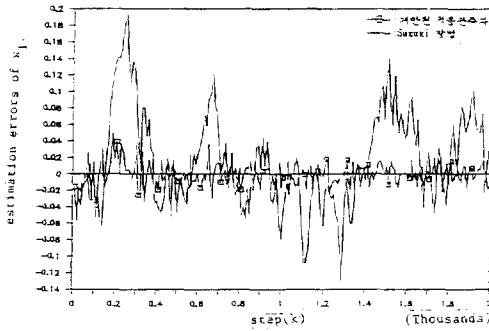


그림 5 제안된 적응관측자와 Suzuki방법의 $x(1)$ 추정오차(측정잡음이 표준편차가 0.01인 백색잡음을 $1/(z-0.99)$ 를 통과시켜 얻은 유색잡음 일때)

Fig. 5 Estimation error of $x(1)$ in the proposed method and Suzuki's adaptive observer(in case of colored measurement noise)

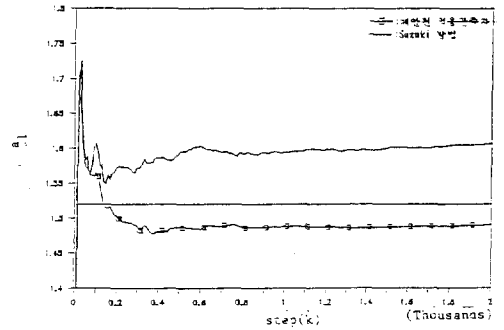


그림 7 제안된 적응관측자와 Suzuki방법의 매개 변수 a_1 추정(공정잡음이 표준편차가 0.01인 백색잡음 일때)

Fig. 7 Estimation of parameter a_1 in the proposed method and Suzuki's adaptive observer(standard deviation of process noise = 0.01)

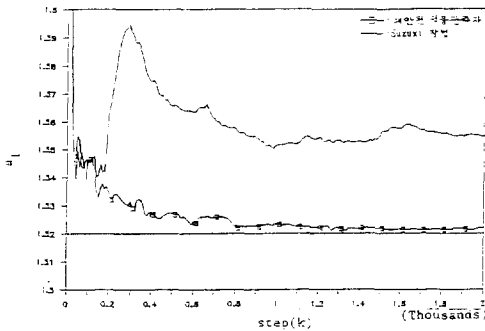


그림 6 제안된 적응관측자와 Suzuki방법의 매개 변수 a_1 추정(측정잡음이 표준편차가 0.01인 백색잡음을 $1/(z-0.99)$ 를 통과시켜 얻은 유색잡음 일때)

Fig. 6 Estimation of parameter a_1 in the proposed method and Suzuki's adaptive observer(in case of colored measurement noise)

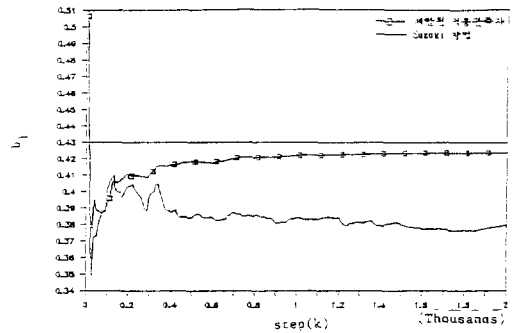


그림 8 제안된 적응관측자와 Suzuki방법의 매개 변수 b_1 추정(공정잡음이 표준편차가 0.01인 백색잡음 일때)

Fig. 8 Estimation of parameter b_1 in the proposed method and Suzuki's adaptive observer(standard deviation of process noise = 0.01)

성분이 많은 PRBS(Pseudo random binary number)를 사용했다. 또 안정한 행렬 F 를

$$F = \begin{bmatrix} 1.49 & 1 \\ -0.9 & 0 \end{bmatrix}$$

로 하였다. 각각의 초기치는

$$x(0)=0, a(0)=0, b(0)=0, h(0)=0, \Gamma(1, 0)=100I_4[5]$$

로 주고 h_i 의 갯수를 m 을 16개로 하여 시뮬레이션을 하였다. 측정잡음을 표준편차가 0.1인 백색잡음으로 넣고 공정잡음은 없다고 하였을 때의 결

과를 그림 2~그림 4에 나타냈다. 그림에서 보듯이 측정잡음이 존재할 경우에는 제안된 적응관측자의 상태변수 추정오차가 Suzuki 적응관측자의 추정오차보차 훨씬 적고 매개변수도 제안된 적응관측자의 경우가 더 적은 오차를 갖는 것을 볼 수 있었다. 매개변수 a_2 와 b_1, b_2 의 추정치의 경우도 a_1 의 추정치가 그림 4에서 보여주는 바와 같이 거의 비슷한 결과가 나왔으므로 여기서는 생략하였다. 그리고 표준편차가 0.01인 백색잡음을 전달함수가 $1/(z-0.99)$ 인 필터를 통과시켜서 얻은 유색잡음을 측정잡음으로 넣고 시뮬레이션한 결과를 그림 5와 그림 6에 나타냈다. 여기에서도 제안된

적용관측자의 상태변수 추정오차가 Suzuki의 경우보다 훨씬 적게 나온 것을 알 수 있다. 그리고 매개변수의 추정오차도 측정잡음으로 백색잡음을 넣었을 때와 비슷한 추세를 보였다. 이번에는 측정잡음이 없이 표준편차가 0.04인 백색잡음을 공정잡음으로 넣고 시뮬레이션을 하였다. 이 경우 $x_1(k)$ 와 $x_2(k)$ 의 추정오차분산은 제안된 방법인 경우 0.1035와 0.0378이고 Suzuki의 방법인 경우 0.0659와 0.0512로 비슷하였으나 매개변수의 추정치는 그림 7과 그림 8에서 알 수 있듯이 제안된 적용관측자가 Suzuki의 적용관측자보다 좋은 결과를 나타냈다. [10] 따라서 이 시뮬레이션 결과는 예상했던 대로 여기서 제안된 적용관측자가 시스템 매개변수 추정에는 좋은 결과를 주며 공정잡음이 없는 경우에는 상태추정을 잘 하지만 공정잡음이 큰 경우에는 상태추정에는 큰 장점이 없다는 것을 보여준다.

4. 결 론

본 논문에서는 ARMA모델 형태의 이산시간 선형 시불변 시스템에 잡음이 들어갈 때에도 사용할 수 있는 적용관측자 사용법을 제안하였다. 이 관측자는 Suzuki의 적용관측자를 처음에는 MA형태로 사용하고 그 결과로 얻은 출력의 추정치를 사용하여 적용관측자를 ARMA형태로 사용하므로써 시스템의 매개변수를 추정하고 이로부터 상태벡터를 추정하는 것이다. 이 제안된 관측자는 잡음이 있는 상황하에서도 시스템의 매개변수를 충분히 정확하게 찾아낼 수 있다. 그리고 공정잡음이 없고 측정잡음만 있는 경우에는 제안된 적용관측자는 Suzuki의 방법에 비하여 상태추정오차를 더 적게 하며 매개변수의 추정오차도 적게 한다. 그러나 공정잡음이 있는 경우에 상태추정 오차는 제안된 적용관측자가 Suzuki의 적용관측자와 비슷했는데 이 부분은 앞으로 더 연구되어야 하겠다. 따라서 본 논문에서 제시한 시스템에 잡음이 있더라도 적용식별기로써는 좋은 결과를 주리라 기대되며 공정잡음이 없는 경우에는 적용 관측자로서도 매우 유용할 것이다. 이상의 결과를 컴퓨터 시뮬레이션을 통하여 확인하였다.

부록 : 정리의 증명

앞의 (3)에서 $c^T(zI - A)^{-1}gw(k) + w_2(k)$ 는 어떤 스펙트럼을 갖는 유색잡음으로써 백색잡음 $w(k)$ 를

어떤 안정한 필터 $H_2(z)$ 를 통과시킴으로써 같은 스펙트럼을 갖는 잡음을 만들 수 있다. 따라서 (3)을 다음과 같이 표현하여도 $y(k)$ 의 통계적 특성은 바뀌지 않는다.

$$y(k) = \frac{q(z)}{r(z)}u(k) + H_2(z)w(k) \\ = \sum_{i=1}^m h_i z^{-i}u(k) + \Delta H_1(z)u(k) + H_2(z)w(k) \quad (A.1)$$

여기서

$$\Delta H_1(z) := \sum_{i=m+1}^{\infty} h_i z^{-i}$$

$$H_2(z) := \sum_{i=0}^{\infty} d_i z^{-i}$$

$$E[w(k)] = 0$$

$$E[w(k_1)w(k_2)] = \sigma^2 \delta_{k_1 k_2}$$

으로 $\{|d_i|\}$ 는 기하급수적으로 0으로 감소하는 급수이며 σ_2 는 $w(k)$ 의 분산이고 $\delta_{k_1 k_2}$ 는 크로네커 델타 함수를 나타낸다. 먼저 여러가지 벡터와 행렬들을 정의하자.

$$h := [h_1 \ h_2 \ \dots \ h_m]^T \quad (A.2)$$

$$X(k) := \begin{bmatrix} u(m) & u(m-1) & \dots & u(1) \\ u(m+1) & & & u(2) \\ \vdots & & & \vdots \\ u(m+k-1) & & & u(k) \end{bmatrix}$$

$$Y(k) := [y(m+1) \ y(m+2) \ \dots \ y(m+k)]^T$$

$$U(k) := [u(m+1) \ u(m+2) \ \dots \ u(m+k)]^T$$

$$w(k) := [w(m+1) \ w(m+2) \ \dots \ w(m+k)]^T$$

위에서 정의한 벡터와 행렬들 간의 관계식을 나타내면

$$Y(k) = X(k)h + \Delta H_1(z)U(k) + H_2(z)W(k) \quad (A.3)$$

가 되고 최소자승법에 의하여 미지의 매개변수 벡터 h 를 추정하면 그 추정치 $\hat{h}(k)$ 는

$$\hat{h}(k) = (X^T(k) \times(k))^{-1} \times(k)^T Y(k) \\ = h + (X(k)^T \times(k))^{-1} \times(k)^T \Delta H_1(z) U(k) \\ + (X(k)^T \times(k))^{-1} \times(k)^T H_2(z) W(k)$$

가 되므로 $(X^T(k) \times(k))^{-1}$ 가 존재해야 하는데 입력의 주파수성분이 충분히 많다고 가정했으므로 역행렬이 존재한다. 그러므로 $\hat{h}(k)$ 의 기대값은

$$E[\hat{h}(k)] = h + (X(k)^T X(k))^{-1} X(k) \Delta H_1(z) U(k)$$

이 되는데 $r(z)$ 의 근이 단위원 안에 있고 입력 $u(k)$ 가 유한하므로 충분히 m 을 크게 하면 $\Delta H_1(z)U(k) \rightarrow 0$ 으로 접근하므로 $E[\hat{h}(k)]$ 는 h 로 수렴한다. 또 $\hat{h}(k)$ 의 상호분산을 알아보면

$$\begin{aligned}
 & E[(\hat{h}(k) - \hat{h})(\hat{h}(k) - h)^T] \\
 &= (X(k)^T X(k))^{-1} X(k)^T (\Delta H_1(z) U(k)) \\
 &\quad (\Delta H_1(z) U(k))^T X(k) (X(k)^T X(k))^{-1} \\
 &\quad + (X(k)^T X(k))^{-1} X(k)^T E[(H_2(z) W(k))
 \end{aligned}$$

$$(H_2(z) W(k))^T] X(k) (X(k)^T X(k))^{-1} \quad (A.4)$$

인데 (A.4)의 우변의 두번째 항에서

$$\begin{aligned}
 & (H_2(z) W(k))(H_2(z) W(k))^T \\
 1 = & \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{\infty} d_i z^{-i} w(m+1) \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^{\infty} d_i z^{-i} w(m+k) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{\infty} d_i z^{-i} (m+1) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{\infty} d_i z^{-i} w(m+k) \end{bmatrix} \quad (A.5)
 \end{aligned}$$

가 된다. 그리고 (A.5)의 p 번째 행과 q 번째 열의 성분의 기대값은

$$\begin{aligned}
 & E[(H_2(z) W(k))(H_2(z) W(k))^T]_{pq} \\
 &= \sigma^2 \sum_{i=1}^{\infty} r_i r_{q-p+i} \quad (\text{단 } q-p+i > 0)
 \end{aligned}$$

이고 $|d_i|$ 는 기하급수적으로 감소하므로 유한하다. M_{pq} 를 다음과 같이 정의하자.

$$M_{pq} := \sum_{i=1}^{\infty} r_i r_{q-p+i} < \infty$$

그러면

$$\begin{aligned}
 & E[(H_2(z) W(k))(H_2(z) W(k))^T] = \sigma^2 M \\
 & M := \{M_{ij}\}
 \end{aligned}$$

이고 M 은 positive definite한 행렬이다. 그러므로 M 을 대각행렬 D 로 변환시키는 similarity transform S 가 존재하여

$$M = S^{-1} D S$$

를 만족시킨다. 행렬 D 의 성분중 가장 큰 성분을 d_{\max} 라고 하면

$$M = S^{-1} D S \leq d_{\max} I_k \quad (A.6)$$

를 만족한다. 따라서

$$\begin{aligned}
 & E[(H_2(z) W(k)) (H_2(z) W(k))^T] \\
 &= d_{\max} \sigma^2 I_k
 \end{aligned}$$

이고 (A.6)을 (A.4)에 대입하면

$$\begin{aligned}
 & E[(\hat{h}(k) - h)(\hat{h}(k) - h)^T] \\
 &\leq (X(k)^T X(k))^{-1} X(k)^T (\Delta H_1(z) U(k)) \\
 &\quad (\Delta H_1(z) U(k))^T X(k) (X(k)^T X(k))^{-1} \\
 &\quad + d_{\max} \sigma^2 (X(k)^T X(k))^{-1}
 \end{aligned}$$

과 같다. $U(k)$ 는 유한하므로 $\Delta H_1(z) U(k)$ 의 모든 i 번째 요소 $[\Delta H_1(z) U(k)]_i$ 는 어떤 상수 $c_1 (> 0)$ 과 $\rho (0 < \rho < 1)$ 가 존재하여

$$[\Delta H_1(z) U(k)]_i \leq c_1 \rho^m, \quad i=1, \dots, k \quad (A.7)$$

가 성립하며

$$(\Delta H_1(z) U(k)) (\Delta H_1(z) U(k))^T \leq k c_1^2 \rho^{2n} I_k$$

이 성립한다. 따라서

$$\begin{aligned}
 & E[(\hat{h}(k) - h)(\hat{h}(k) - h)^T] \\
 &\leq d_{\max} \sigma^2 (X(k)^T X(k))^{-1} \\
 &\quad + k c_1^2 \rho^{2m} (X(k)^T X(k))^{-1} \quad (A.8)
 \end{aligned}$$

이다. 이제는 $(X(k)^T X(k))^{-1}$ 가 data갯수 k 에 어떻게 변하는지에 관하여 살펴보자. 입력 $u(k)$ 가 persistently exciting하다는 가정으로부터 다음관계를 얻을 수 있다. 즉 주어진 임의의 상수 c_2 에 대하여 어떤 유한한 $\ell (\geq m)$ 이 존재하여

$$X^T(k+\ell) X(k+\ell) - X^T(k) X(k) \geq c_2 I_m$$

이다. 그러면 k 가 $(k_3+1) \ell > k > k_3 \ell$ 이면

$$X^T(k) X(k) \geq k_3 c_2 I_m$$

이 되어 (A.8)은

$$\begin{aligned}
 & E[(\hat{h}(k) - h)(\hat{h}(k) - h)^T] \\
 &\leq \left(\frac{d_{\max} \sigma^2 + (k_3+1) \ell c_1^2 \rho^{2m}}{k_3 c_2} \right) I_m
 \end{aligned}$$

이 된다. 따라서 $m \rightarrow \infty$ 이고, $k/m \rightarrow \infty$ (즉 $k_3 \rightarrow \infty$)이면

$$E[(\hat{h}(k) - h)(\hat{h}(k) - h)^T] \rightarrow 0 \quad (A.9)$$

이 되어 $\hat{h}(k)$ 는 h 에 수렴한다. (converges in the mean square sense) 또 (7), (A.2), (A.3)에서

$$\begin{aligned}
 y_1(k) = & [u(k-1) u(k-2) \dots u(k-m)]^T h \\
 & + \Delta H_1 u(k)
 \end{aligned}$$

이 되고 (A.7)을 사용하면

$$\begin{aligned}
 & |y_1(k) - \hat{y}_{1a}(k)| \\
 &\leq |[u(k-1) u(k-2) \dots u(k-m)]^T [h \\
 &\quad - \hat{h}(k)]| + c_1 \rho^m
 \end{aligned}$$

이고

$$\begin{aligned}
 & E[(y_1(k) - \hat{y}_{1a}(k))^2] \\
 &\leq 2 u_{\max}^2 E[(h - \hat{h}(k))^T (h - \hat{h}(k))] + 2 c_1^2 \rho^{2m}
 \end{aligned}$$

이므로 $m \rightarrow \infty, k/m \rightarrow \infty$ 이면 (A.9)로부터

$$E[(y_1(k) - \hat{y}_{1a}(k))^2] \rightarrow 0$$

이 된다.

참 고 문 헌

- [1] R.L. Carroll and D.P. Lindorff, "An adaptive observer for single-input single-output linear system," IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-18, pp. 428~435, 1973.
- [2] G. Luders and K.S. Narendra, "A new canonical form for an adaptive observer," IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-19, pp. 117~119, 1974.
- [3] G. Luders and K.S. Narendra, "Stable adaptive schemes for state estimation and identification of linear systems," IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-19, pp. 841~847, 1974.
- [4] G. Kreisselmeier, "Adaptive observer with arbitrary exponential rate of convergence," IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-22, pp. 2~8, 1977.
- [5] T. Suzuki, T. Nakamura and M. Koga, "Discrete adaptive observer with fast convergence," Int. J. Control, vol. 31, pp. 1107~1119, 1980.
- [6] M. Shahrokhi and M. Morari, "A discrete adaptive observer and identifier with arbitrary fast rate convergence," IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-27, pp. 506~509, 1982.
- [7] G.C. Goodwin and R.L. Payne, Dynamic System Identification: Experiment Design and Data Analysis, Academic Press, vol. 136, 1977.
- [8] G.W. Stewart, Introduction to Matrix Computation, Academic Press, 1973.
- [9] 남광희, "Sampled Data에 의한 적응식별기에 관한 연구," 공학석사 학위논문, 서울대학교, 1982.
- [10] 남석우, "잡음하에서의 적응관측자/적응식별기에 관한 연구," 공학석사 학위논문, 서울대학교, 1989.