

확장 Prony法을 利用한 音原 재구성특성에 관한 연구

이 금 원* · 김 경 기*

=Abstract=

A Study on the Source Reconstruction Feature Using the Extended Prony Method

Keum Won Lee*, Kyong Gi Kim*

In this paper, for acoustic source reconstruction using angular frequency propagation method, the extended Prony method is proposed which is useful due to not having the inherent property of DFT. The simulation is carried out and its improved results are shown explicitly by comparing with DFT case.

1. 서 론

고전적인 방법인 푸리에변환을 음향원 재구성에 이용하면, 잘 알려진대로 본질적인 오차를 나타내고 있는데, 근래에 많이 쓰이고 있는 방법인 parametric method등을 이용하면 이를 줄일 수 있다¹⁾.

본 논문에서는 확장 Prony법을 이용하는데, 이 방법은 위상을 가지고 있으므로, 각주파수전파법에 이용할 수 있다. 즉 수집면에서 얻은 data에서, Prony PSD(power spectrum density)를 구하고, 여기서 실수, 허수성분을 뺀 후 이를 후진전파(back propagation)시키고, 역푸리에변환하여 재구성하는데, 이처럼 푸리에 변환대신에 쓰면, 결과 재구성의 질을 높일 수 있음을 컴퓨터 시뮬레이션을 통해 보였다.

2. 본 론

2.1 각주파수 전파법

$p(x,y,z,t)$ 가 위치 (x,y,z) , 시간 t 에서의 음압이

면 다음의 스칼라 파동방식을 만족한다.

$$\nabla^2 p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \tag{1}$$

여기서 음압 p 를 다음과 같이 둔다.

$$p(x,y,z,t) = \text{Re}\{p(x,y,z) \text{Exp}(j\omega t)\} \tag{2}$$

이를 식(1)에 대입하여 정리하고, Rayleigh적분을 이용하여 그 해를 나타낸후, 이 적분식에서 합성(convolution)을 유도하면 다음과 같다²⁾.

$$p(x,y,z) = p(x,y,0) ** g'(x,y,z) \tag{3}$$

여기서 **는 2차원 합성을 의미하고 $g'(x,y,z)$ 는 자유 반공간 Green 함수의 공간 도함수(spatial derivative)이며, 다음과 같다.

$$g'(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial n} \left[- \frac{1}{2\pi} \frac{\text{Exp}(jkr)}{r} \right] \tag{4}$$

여기서 \bar{n} 은 양의 z 축 방향의 단위 벡터이고, $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ 이며, k 는 파수(wave number)이다³⁾. 식(3)에 합성정리를 적용하면

$$* p(f_x, f_y, z) = p(f_x, f_y, 0) G'(f_x, f_y, z) \tag{5}$$

여기서 $P(f_x, f_y, 0)$ 와 $G'(f_x, f_y, z)$ 는 $p(x,y,0)$ 와 $g'(x,y,z)$ 를 2차원 푸리에변환한 것이며, $G'(f_x, f_y, z)$ 는 다

<접수 : 1990년 11월 27일>

* 한양대학교 전자공학과

* Dept. of Electronic Eng., Hanyang University.

음과 같다.

$$G'(f_x, f_y, z) = \begin{cases} \text{Exp}[jz(k^2 - k_x^2 - k_y^2)^{1/2}] & \text{for } k^2 \geq k_x^2 + k_y^2 \\ \text{Exp}[-z((k_x^2 + k_y^2 - k^2)^{1/2})] & \text{for } k^2 < k_x^2 + k_y^2 \end{cases} \quad (6)$$

단 $k_x = 2\pi f_x$, $k_y = 2\pi f_y$. 식(5)로부터, $p(x, y, z)$ 는 역 푸리에변환으로부터 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$p(x, y, z) = \text{FT}^{-1} [p(f_x, f_y, 0) G'(f_x, f_y, z)] \quad (7)$$

식(7)을 이용하여 음원(sound source)으로부터 거리가 떨어진 복소장(complex field)의 분포를 예측하는 것을 field의 각주파수 전진전파(forward propagation)라고 부른다. 각주파수 후진전파(back propagation)관계식을 얻기 위하여 식(5)를 $G'(f_x, f_y, z)$ 로 나누고, 역 푸리에변환을 취하면 다음과 같다.

$$p(f_x, f_y, 0) = \text{FT}^{-1} [p(x, y, z) G'^{-1}(f_x, f_y, z)] \quad (8)$$

본 논문에서는, 후진전파 경우만을 예로 들어 분석했다. 단, G'^{-1} 대신에 식(9)를 이용하였으며, 이를 의사역필터(pseudo-inverse filter)라고 부른다⁴⁾.

$$G'^*(f_x, f_y, z) = \begin{cases} \text{Exp}[-jz(k^2 - k_x^2 - k_y^2)^{1/2}] & \text{for } k^2 \geq k_x^2 + k_y^2 \\ 0 & \text{for } k^2 < k_x^2 + k_y^2 \end{cases} \quad (9)$$

2.2 확장Prony법

Hildebrand에 의거하여 Prony법이 확장되었는데, 요약하면 다음과 같다. 신호를 다음처럼 p 개의 지수함수의 선형조합으로 모델링한다.

$$\hat{X}_n = \sum_{m=1}^p b_m z_m^n \quad \text{for } n=0, 1, \dots, N-1 \quad (10)$$

크기 A_m , 위상 θ_m , 감쇄계수 α_m , 주파수 f_m , 샘플주기 T 로 복소크기 b_m 과 복소지수 z_m 를 표시하면 식(11)과 같다.

$$b_m = A_m \text{Exp}(j\theta_m) \\ z_m = \text{Exp}[(\alpha_m + j2\pi f_m T)] \quad (11)$$

또 전방선형예측식인 식(12)를 만족하는 계수 a 들을 구한다¹⁾.

$$x_n = -\sum_{m=1}^p a_m x_{n-m} \quad (12)$$

이 a 값들을 이용하여 식(13)에서 다항식의 근 z_k 을 구한다.

$$(z) = \prod_{k=1}^p (z - z_k) = \sum_{i=1}^p a_i z^{p-i} \quad (13)$$

한편 식(10)에서 복소크기 b_m 은 의사역(pseudo-inverse)을 이용한 식(14)에서 구한다.

$$B = [\Phi^H \Phi]^{-1} \Phi^H X \\ \text{단} \\ B = [b_1 \ b_2 \ \dots \ b_p]^T \\ X = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_p]^T \\ \Phi = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ z_1^2 & z_2^2 & \dots & z_p^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_1^{N-1} & z_2^{N-1} & \dots & z_p^{N-1} \end{bmatrix} \quad (14)$$

또 식(10)을 Z 변환하면

$$\hat{X}(z) = \sum_{k=1}^p \frac{b_k}{1 - z_k z^{-1}} \quad (15)$$

$z = \text{Exp}(j2\pi f T)$ 로 두면, 식(15)는 푸리에변환이 되고 따라서 스펙트럼은 다음과 같다.

$$\hat{S}(f) = |\hat{TX}(\text{Exp}[j2\pi f T])|^2 \quad (16)$$

3. 시뮬레이션 및 검토

이 각주파수법은 FFT알고리즘을 이용하여 효율적인 계산을 할 수 있다⁵⁾. $z=d$ 에서, 식(9)를 이용한 식(8)의 이산형은 다음과 같다.

$$p(mx_0, ny_0, 0) = \text{DFT}^{-1} [p(pf_{x_0}, qf_{y_0}, d) G'^*(pf_{x_0}, qf_{y_0}, d) W(pf_{x_0}, qf_{y_0})] \quad (17)$$

여기서 x_0 과 y_0 는 공간영역(spatial domain)에서 샘플링 구간이고, f_{x_0} 와 f_{y_0} 는 각주파수 영역(angular frequency domain)에서 샘플링 구간이며, n, m, p 및 $= 0, 1, 2, \dots, N-1$ 이다. N 은 샘플수이고, W 는 window함수이다.

본 논문에서 사용한 radiating frequency는 1MHz이며, 전파속도는 1500m/sec로 가정하였으며, 이때의 파장은 $\lambda = c/\text{freq} = 0.15\text{cm}$ 이고, 따라서 공간 Nyquist구간은 $\lambda/2 = 0.075\text{cm}$ 이다. 컴퓨터 시뮬레이션을 위하여 $z=d$ 에서의 음압 $p(x, y, d)$ 는 $\text{Exp}(jkR)/R^2$ 를 이용했다. 단 R 은 음원이 놓여 있

는 $z=0$ 평면상의 점에서 $z=d$ 의 수집면의 각 점까지의 거리이다. 재구성하는 과정은 다음과 같다.

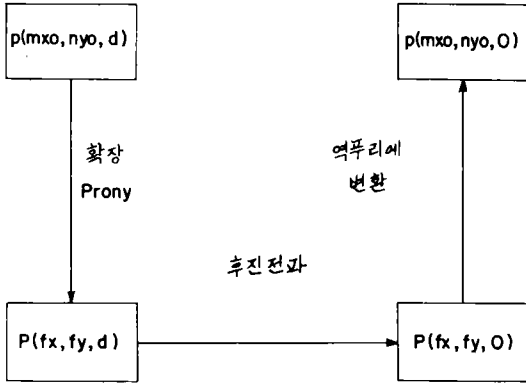


그림 1 재구성 과정의 블럭도
Fig. 1 Block diagram for reconstruction process

확장 Prony법 대신에 푸리에 변환을 이용하여 실행한 경우와 그림 1의 결과를 서로 비교한다.

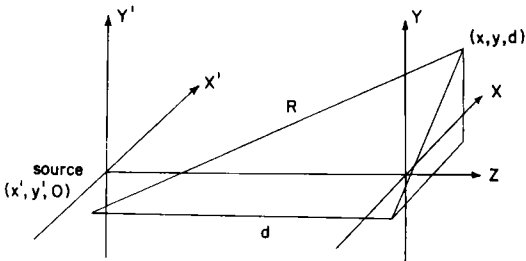
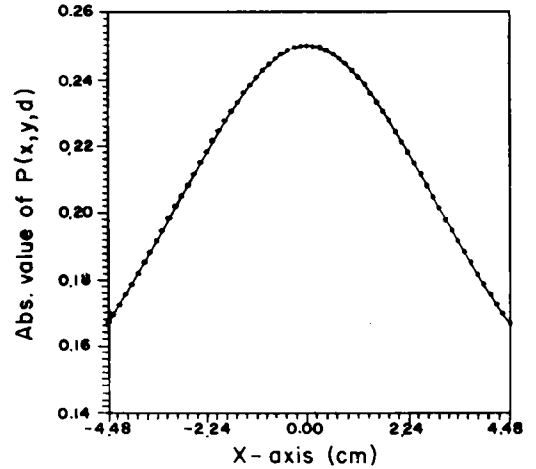


그림 2 복소장을 계산하는 좌표계
Fig. 2 Coordinate system calculating complex fields

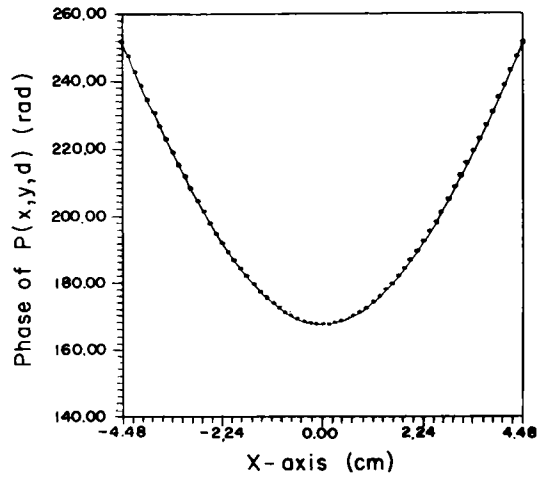
그림 2에 보여진 대로 $z=0$ 평면상의 $(x', y', 0)$ 에 존재하고 있는 한개의 점원을 고려한다. 수집면 (collecting aperture)은 $z=d$ 평면에 위치하고 있다. 그림 3은 $d=4\text{cm}$, 샘플링 간격 $SP=0.14\text{cm}$, data점 $N=65$ 인 경우에 x 축을 따라서 field 분포를 보여주고 있다. 이때, 수집면의 규격은 $AP=64X$. $14\text{cm}=8.96\text{cm}$ 이다.

그림 3에서 보는 바와 같이 중심축에서 멀어질수록 공간 주파수가 증가하고, 크기는 감소한다.

그림 4(a)는 그림 3의 데이터를 확장 Prony법으로 구한 스펙트럼이고, 이때 참고로 푸리에변환에 의한 스펙트럼은 그림 4(b)에 나타내었다. 그림 5(a)는 푸리에변환을 이용한 후진전파의 경우에 재구성한 음원을 나타내고, 그림 5(b)는 확장 Prony



(a)



(b)

그림 3 (a) 진폭 (b) 위상 ($DT=4\text{cm}$, $SP=0.14$, $N=64\text{cm}$)

Fig. 3 (a) Amplitude (b) Phase ($DT=4\text{cm}$, $SP=0.14\text{cm}$, $N=64$)

법에 의한 재구성을 보여준다. 또 이 두 경우는 다음 식(18)를 만족하여, 두 경우 모두 좋은 결과를 보였다. 그림 5(c)는 추정된 복소지수를 단위원을 중심으로 나타냈다.

$$SP=0.07\text{cm} < 0.075\text{cm} = \text{Nyquist 구간} \quad (18)$$

그림 6.의 경우는 (18)를 만족하지 않는 unders

mpled 경우로서 푸리에변환 경우에 재구성오차를 나타내고 있다. 그러나 확장 Prony법의 경우에는 더 나은 결과를 볼 수 있다. 그림 6.(c)는 추정된 복소지수들을 나타냈다.

그림 5,6에서 지수의 갯수를 추정하는 방법은

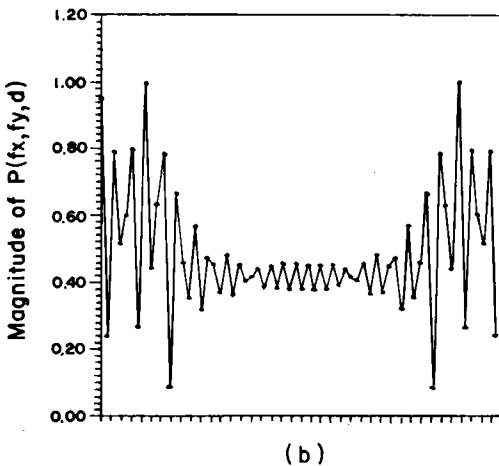
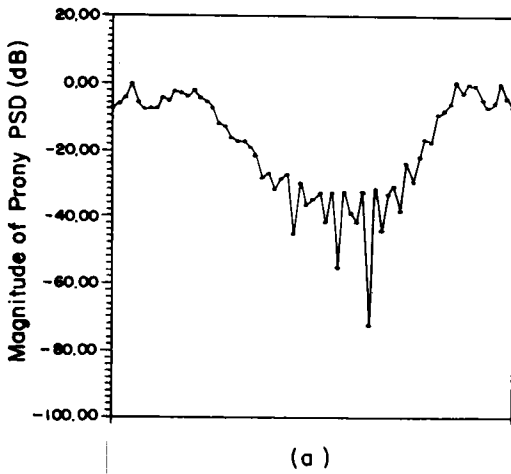


그림 4 (a) 확장 Prony법에 의한 스펙트럼 (b) 푸리에변환에 의한 스펙트럼 (DT=4cm, SP=0.14cm, N=64)

Fig. 4 (a) Spectrum by extended Prony method (b) Spectrum by Fourier transform (DT=4cm, SP=0.14cm, N=64)

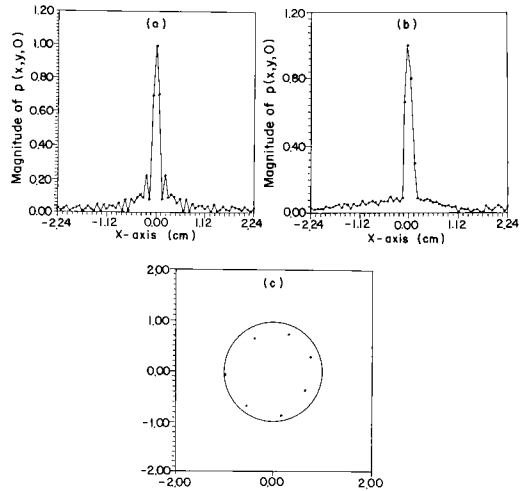


그림 5 (a) 푸리에 변환에 의한 음원 재구성 (b) 확장 Prony법에 의한 음원 재구성 (c) 추정된 복소지수들 (DT=4cm, SP=0.07cm, N=64)

Fig. 5 (a) Source reconstruction by Fourier transform (b) Source reconstruction by extended Prony method (c) Estimated complex exponentials (DT=4cm, SP=0.07cm, N=64)

표 1 그림 5 경우의 특이치들

Table 1 Singular values for Fig. 5 case

순번	특이치	백분율(1번 기준)
1	1.988138	100.000000
2	1.969165	99.045680
3	1.959889	98.576100
4	1.943365	97.747960
5	1.600523	80.503580
6	7.767766E-01	39.070550
7	1.753315E-01	8.818879
8	1.060232E-07	5.332787E-06
9	9.875436E-08	4.967178E-06
10	9.437202E-08	4.746753E-06
11	8.901538E-08	4.477323E-06
12	7.101249E-12	3.571808E-10
13	1.258888E-14	6.331996E-13
14	5.614774E-15	2.824137E-13
15	3.759079E-15	1.890753E-13

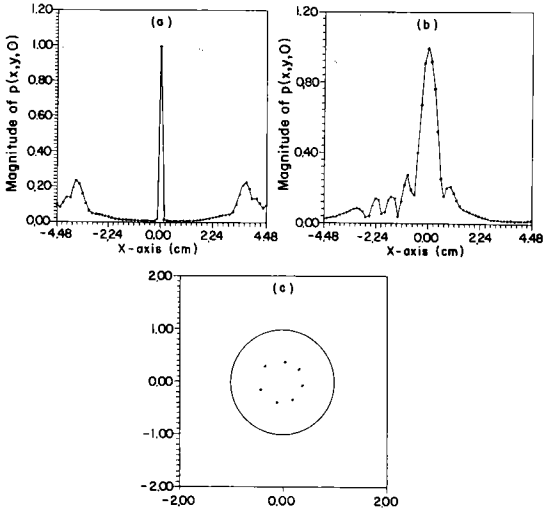


그림 6 (a) 푸리에변환에 의한 음원 재구성 (b) 확장 Prony법에 의한 음원 재구성 (c) 추정된 복소 지수들 (DT=4cm, SP=0.14cm, N=64cm)

Fig. 6 (a) Source reconstruction by Fourier transform (b) Source reconstruction by extended Prony method (c) Estimated complex exponentials (DT=4cm, SP=0.14cm, N=64)

Akaike법대신⁶⁾, 특이치분해법을⁶⁾ 이용하는데, 주특이치들을 구성한 후 축소급수근사(reduced rank approximation)를 만들고, 여기서 계수 a들을 구한 후 앞서의 (13)서부터 계속해 간다. 또 Akaike법으로도 유사한 결과를 얻으며, 어느방법이나 추정된 복소지수의 갯수에 따라 결과가 달라진다. 그림 5(c) 및 그림 6(c)는 15개의 특이치를 구한 후 이 중에서 주특이치를 각각 표1,2를 참고하여 모두 7개로 선택하여 얻은 결과이다.

4. 결 론

본 논문에서 실행한 확장 Prony법은 윈도우 효과등이 없는 parametric법의 장점도 이용하고, 특히 위상정보를 가지고 있으므로, 이를 각주파수전파법을 이용하여 음향원을 재구성하면, 고전적인 방법인 Fourier변환방법이 갖는 원천적인 오차가 어느정도 감소되어 음원 재구성의 질을 높임을 컴

표 2 그림 6 경우의 특이치들

Table 2 Singular values in Fig. 6 case

순번	특이치	백분율(1번 기준)
1	1.794966	100.000000
2	1.710137	95.274080
3	1.503482	83.761020
4	1.431375	79.743860
5	1.418062	79.002170
6	1.412617	78.698820
7	1.410001	78.553050
8	1.562986E-07	8.707606E-06
9	1.419579E-07	7.908665E-06
10	7.458413E-08	4.155183E-06
11	7.142424E-08	3.979141E-06
12	1.238959E-11	6.902411E-10
13	1.554564E-14	8.660685E-13
14	5.663208E-15	3.155050E-13
15	2.991917E-15	1.666838E-13

어느정도 감소되어 음원 재구성의 질을 높임을 컴퓨터 시뮬레이션을 통하여 보였다. 특히 undersampled된 데이터의 경우는 aperture size가 8.96cm 인 때 $x=3.64\text{cm}$ 에서 보조엽으로 나타나는 크기 0.23의 오차가 확장 Prony법에서는 거의 0이 되었다. 주엽은 늘어나는 경향을 나타내고 있다. 그러나 확장 Prony법은 낮은 SNR경우에 지수를 잘못 추정할 수 있으므로, 정확한 지수의 갯수를 추정하거나 특이치분해법의 정확한 해석 또는 반복 Prony법의 연구도 기대된다.

참 고 문 헌

- 1) Steven M. Kay and Stanley L. Marple, "Spectrum Analysis—A Modern Perspective," Proc of IEEE, vol 69, No. 11, Nov., 1981.
- 2) 이금원, 김경기, "Rayleigh적분의 수치해에 관한 오차분석," 의공학지, 제11권, 제1호, 1990.
- 3) J. W. Goodman: Introduction to Fourier Optics, McGraw-Hill, Inc., 1968.

- 4) L. Hua, "Resolution enhancement by wavefield extrapolation," IEEE transactions on Sonics and Ultrason. vol. SU-31(6), pp.642-645, Nov., 1984.
- 5) E. G. Williams and J. D. Maynard, "Numerical evaluation of the Rayleigh integral for planar radiators using the FFT," J. Acoust. Soc. Am., vol. 72(6), pp.2020-2030, Dec., 1982.
- 6) S. Lawrence Marple: Digital Spectral Analysis, Prentice-Hall Inc, 1987.