

Rayleigh 積分의 數值解에 관한 誤差分析

李 金 源 · 金 庚 基

Error Analysis in the Numerical Solution of Rayleigh Integral

Keum Won Lee, Kyong Gi Kim

- Abstract -

The numerical evaluation of Rayleigh's integral for the sound source reconstruction can be speeded up by the use of angular frequency propagation method and the FFT.

However, are several source of errors involved during the reconstruction. Besides the aliasing error due to undersampling in space, the wrap around error, which is caused by undersampling the kernel function in frequency domain, and windowing effect are present. We found that there is no replicated source problem and the windowing effect is due to the windowing the kernel function in frequency domain, and, zero padding is always required to improve the quality of reconstruction.

1. 서 론

Discrete Fourier Transform(DFT)를 이용하여, 연속 convolution 적분을 수치계산하면, 예기치 못한 결과들이 발생할 수 있다. 예를 들면 undersampling, 환상 convolution(Circular convolution) 및 windowing 효과 때문에 일어나는 aliasing error, wrap around error 등이 있다. 또 연속 convolution 적분을 DFT를 이용하여 수치해석 하면, 몇가지 혼동되기 쉬운 경우가 있는데, 특히 integral kernel이 공간 및 각주파수 영역서 해석적인 형태로 주어져서, kernel 함수를 샘플링할 경우를 고려해 본다.

본 논문에서는 각주파수 전파법 (angular frequency propagation)를 이용한 Rayleigh 적분의 수치해석을 이용하여 field estimation 시에 생기는 이들을 분석하여 보고, 또한 이들 오차를 줄일 수 있는 방법을 제시하고자 한다.

2. 이 론

$p(x, y, z)$ 가 위치 (x, y, z) , 시간 t 에서의 압력이면 다음의 scalar 파동방정식을 만족한다.

$$\nabla^2 p - \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \tag{1}$$

단 c 는 음속이며 Laplacian 연산자는 다음과 같다.

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{2}$$

〈접수 : 1990년 4 월 30일〉

漢陽大學校 工科大學 電子工學科
Dept. of Electronic Eng., Hanyang Univ.

또 field는 다음 표현을 이용하여 더 구체적으로 나타낸다.

$$p(x, y, z, t) = \text{Re}[p(x, y, z) \text{Exp}(j\omega t)] \quad (3)$$

단 ω 는 각주파수이다. 그리고, 함수 p 는 다음 시독립 (time independent) Helmholtz 방정식을 만족한다.

$$\nabla^2 p(x, y, z) + k^2 p(x, y, z) = 0 \quad (4)$$

여기서 $k = \omega/c = 2\pi f/c = 2\pi/\lambda$ 이며 파수 (wave number)라고 부른다.

Green 함수의 기법을 이용하여 Helmholtz 방정식은 압력이나 pressure gradient 방정식으로부터 복소 (complex) field를 계산하는데 이용할 수 있다. Rayleigh 적분은 radiation 이론의 기초를 이루는 Helmholtz 방정식의 특수한 형태이다. $z \geq 0$ 인 때, Rayleigh 적분 공식의 하나는 다음과 같다.

$$p(x, y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(x', y', 0) \frac{\partial}{\partial n} \left[\frac{-\text{Exp}(jkR)}{2\pi R} \right] dx' dy' \quad (5)$$

단 $R = [(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2]^{1/2}$ 이고, n 은 z 축의 양의 방향의 단위벡터이다. 그리고 식(5)는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$p(x, y, z) = p(x, y, 0) ** g'(x, y, z) \quad (6)$$

여기서 **는 2차원 convolution을 의미하고, $g'(x, y, z)$ 는 자유 반공간 Green 함수의 공간 도함수 (spacial derivative)이며, 다음으로 주어진다.

$$g'(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial n} \left[-\frac{1}{2\pi} \frac{\text{Exp}(jkr)}{r} \right] \quad (7)$$

여기서 n 은 양의 z 축 방향의 단위 벡터이고, $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ 이며, k 는 파수 (wave number)이다.¹⁾ 식(6)에 convolution 정리를 적용하면

$$P(f_x, f_y, z) = p(f_x, f_y, 0) G'(f_x, f_y, z) \quad (8)$$

여기서 $P(f_x, f_y, 0)$ 와 $G'(f_x, f_y, z)$ 는 $P(x, y, 0)$ 와 $g'(x, y, z)$ 를 2차원 Fourier transform한 것이며,

$G'(f_x, f_y, z)$ 는 다음과 같다.

$$G'(f_x, f_y, z) = \begin{cases} \text{Exp}[jz(k^2 - k_x^2 - k_y^2)^{1/2}] & \text{for } k^2 \geq k_x^2 + k_y^2 \\ \text{Exp}[-z(k_x^2 + k_y^2 - k^2)^{1/2}] & \text{for } k^2 < k_x^2 + k_y^2 \end{cases} \quad (9)$$

단 $k_x = 2\pi f_x$, $k_y = 2\pi f_y$, $k^2 \geq k_x^2 + k_y^2$ 일 때, 식(8) 및 식(9)의 결과는 거리 z 를 전파시에, 그 효과는 각주파수 (angular frequency)의 여러 성분들의 상대적인 위상 (relative phase)의 변화를 나타내고, $k^2 < k_x^2 + k_y^2$ 일 때는, 지수 부분이 음의 실수이며, 이들 성분은 전파에 의해, 강하게 감쇄된다. 그래서, 전파현상은 선형추이 불변시스템 (linear shift invariant system)으로 간주되며, 반면에 전달 함수 식(9)는 선형의 dispersive한 유한 공간대역을 갖는 필터로 볼 수 있다. 식(8)로부터, $p(x, y, z)$ 는 역 Fourier 변환으로부터 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$p(x, y, z) = \text{FT}^{-1} [p(f_x, f_y, 0) G'(f_x, f_y, z)] \quad (10a)$$

식(10a)를 이용하여 source function으로부터 거리가 떨어진 complex field의 분포를 예측하는 것을 field의 각주파수 전진전파 (forward propagation)라고 부른다. 각주파수 후진전파 (back propagation) 관계식을 얻기 위하여 식(10a)를 $G'(f_x, f_y, z)$ 로 나누고, 역 Fourier 변환을 취하면 다음과 같다.

$$p(x, y, 0) = \text{FT}^{-1} [P(f_x, f_y, z) G'^{-1}(f_x, f_y, z)] \quad (10b)$$

본 논문에서는, 2차원 DFT를 이용하고, 후진전파 경우만을 예로 들어 오차분석을 했다. 단, G'^{-1} 대신에 식(10c)를 이용하였으며, 식(10c)는 의사역필 본 논문에서는, 2차원 DFT를 이용하고, 후진전파 경우만을 예로 들어 오차분석을 했다. 단, G'^{-1} 대신에 식(10c)를 이용하였으며, 식(10c)는 의사역필터 (pseudo-inverse filter)라고 부른다.⁶⁾

$$G'^*(f_x, f_y, z) = \begin{cases} \text{Exp}[jz(k^2 - k_x^2 - k_y^2)^{1/2}] & \text{for } k^2 \geq k_x^2 + k_y^2 \\ 0 & \text{for } k^2 < k_x^2 + k_y^2 \end{cases} \quad (10c)$$

3. ERROR 분석

각주파수 방법 (angular frequency method)는 개념적으로 Rayleigh의 회절적분 (diffraction integral)과 등가이나, 이 각주파수법은 FFT알고리즘을 이용하여 효율적인 계산을 할 수 있다. $z=d$ 에서, 식(10.c)를 이용한 식(10.b)의 이산형은 다음과 같다.

$$p(mx_0, ny_0, 0) = \text{DFT}^{-1} [P(pf_{x_0}, qf_{y_0}, d)G^* (pf_{x_0}, qf_{y_0}, d)W(pf_{x_0}, qf_{y_0})] \quad (11)$$

여기서 x_0 과 y_0 는 공간영역 (spacial domain)에서 샘플링 구간이고, f_{x_0} 와 f_{y_0} 는 각주파수 영역 (angular frequency domain)에서 샘플링 구간이며, n, m, p 및 $q=0, 1, 2, \dots, N-1$ 이다. N 은 샘플수이고, W 는 윈도우함수이다. 공간 샘플링 속도와 윈도우 폭의 관계는 다음과 같다.

$$T_x = N x_0, \quad T_y = N y_0 \quad (12)$$

여기서 T_x 와 T_y 는 공간 윈도우폭이다. 각주파수 영역에서 주파수 범위는, 다음과 같이 W 의 공간 영역에서 샘플링속도에 의해 결정된다.

$$T_{k_x} = N k_{x_0} = 2\pi/x_0, \quad T_{k_y} = N k_{y_0} = 2\pi/y_0 \quad (13)$$

여기서 k_{x_0} 와 k_{y_0} 는 k 영역에서 샘플링 속도이고, 공간 윈도우 폭과는 다음의 관계가 있다.

$$k_{x_0} = 2\pi f_{x_0} = 2\pi/T_x, \quad k_{y_0} = 2\pi f_{y_0} = 2\pi/T_y \quad (14)$$

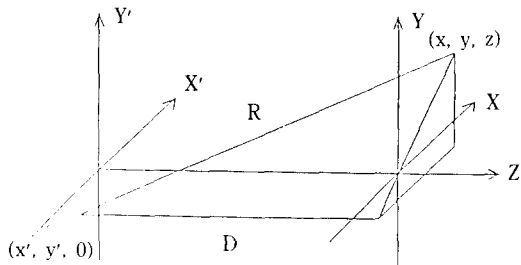


그림 1 점(x, y)에서 X', Y'평면에 놓여있는 source로부터 복사장을 계산하는 좌표계

Fig. 1 Coordinate system for calculating radiated field from a source lying in the X', Y' plane at the field point(x, y)

(1) Aliasing error

공간영역에서 undersampling때문에 발생하는 aliasing error가 가장 큰 error중의 하나이다. 실제로 지금의 기술로는 대부분의 초음파진단 응용에서 overlapping없이 field를 scan하는 것이 불가능하다. Huygens원리에 의하면 source는 이산 점원 (point source)의 무한한 조합으로 생각할 수 있으며, 각각은 발산하는 구면파를 발생한다. 그림 1에 보여진 대로 $z=0$ 평면상의 $x'=0, y'=0$ 에 존재하고 있는

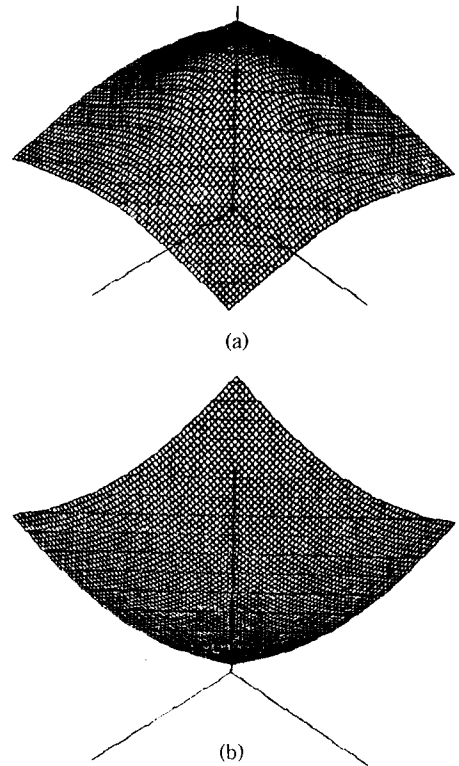


그림 2 (a) 진폭 분포 (b) 위상 분포(거리 $DT=4\text{cm}$, 샘플링 구간 $X_0, Y_0=0.14\text{cm}$, 장방형 수집면 크기 $AP=8.96\text{cm} \times 8.96\text{cm}$, 장방형 수집 data 점 수 $N=65 \times 65$)

Fig. 2 (a) Amplitude distribution. (b) Phase distribution. (Distance $DT=4\text{cm}$, sampling interval $X_0, Y_0=0.14\text{cm}$, square aperture size $AP=8.96\text{cm} \times 8.96\text{cm}$, and square data collecting points $N=65 \times 65$)

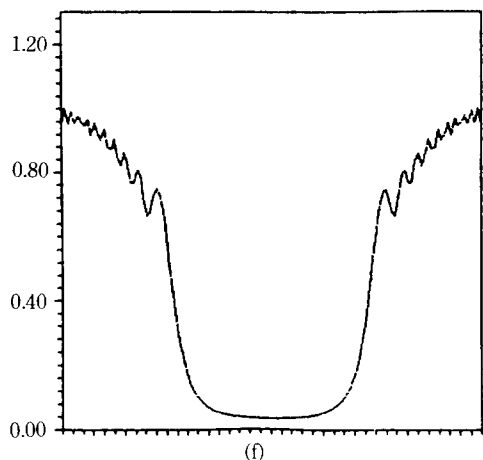
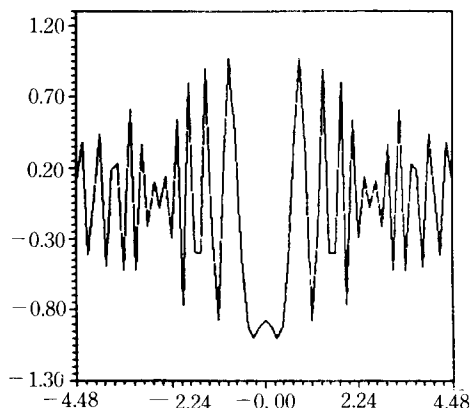


그림 3 (d) 단면 field분포의 실수부 (e) 단면 field분포의 허수부 (f) (d) 및 (e)에 대한 DFT의 단면 크기(DT=4cm, $X_0, Y_0=0.07$ cm, AP=8.96cm×8.96cm, N=129×129)

Fig. 3 (d) Real part of crosssectional field distribution (e) Imaginary part of crosssectional field distribution (f) Crosssectional magnitude of DFT of (d) and (e) (DT=4cm, $X_0, Y_0=0.07$ cm, AP=8.96cm×8.96cm, N=129×129)

때는 분명히 Nyquist 샘플링 속도보다 높아서, 그림 3(f)에서 처럼 aliasing이 없어졌으며, 이 때도 수직면 크기는 같다.

본 논문에서는, 식(11)에서처럼, G^{-1} 를 pseudo-

inverse filter인 G^* 로 대체한다. 샘플링한 kernel 함수 $G^*(pf_{x0}, qf_{y0}, d)$ 와 Fourier변환한 $P(pf_{x0}, qf_{y0}, d)$ 를 곱하는데, 이 때 P 는 data점 $N \times N$ 으로 샘플링 속도 x_0, y_0 로 샘플링 했다. 식(14)에서 처럼 각주파수 영역에서 샘플링 속도가 결정된다. 이것은 각각, $k_{x, \max}$ 및 $k_{y, \max}$ 보다 적은 k_x, k_y 에 대한 각 주파수 정보만을 포함한다는 것을 의미한다. 단

$$k_{x, \max} = Tk_x/2 = \pi/x_0$$

$$k_{y, \max} = Tk_y/2 = \pi/y_0 \quad (15)$$

이처럼 제한된 통과 대역폭은 지역통과 여파기의 역할을 한다. 샘플링 속도가 점원이 발생하는 field분포에 포함된 최고 주파수의 절반보다 낮으면 aliasing효과가 aliasing출발각 보다 더 작은 각에서 일어나기 시작한다. 이 aliasing출발각은 주파수 영역에서 차단주파수와 관계가 있다. 따라서 field분포에서 aliasing된 부분에 해당하는 정보를 kernel함수는 잃어버린다. aliasing출발각과 통과 대역폭은 공간영역에서 샘플링 속도만의 함수이다.

(2) Wrap-around error

DFT를 사용하여 전방으로의 최대 전파거리는 replicated source문제에 의해 제한된다고 알려져 있다. 여기서는 replicated source문제가 DFT의 주기성 가정때문이 아니라, 주파수 영역에서 kernel함수를 undersampling하기 때문에 일어남을 알 수 있다. 최대 전파거리 제약은 후진전파 경우에도 존재한다. replicated source 문제는 입력파의 샘플 값이 주기적인 2차원 배열로 반복된다고 가정하는 DFT의 특성에 기인한다. 이것은 반복되는 입력과 샘플값의 주기적인 가정때문이 아니라, 각주파수 영역에선 공간적으로 제한되지 않은 kernel의 undersampling때문임을 알 수 있다. 식(9)에서의 전달함수는 각주파수 영역에서 대역제한(band limited)되어서, 식(7)은 공간적으로 제한될 수 없다. 결과적으로 주파수 영역에서 불가피하게 전달함수를 undersampling하고, 이것이 공간 영역에서 wrap-around error를 일으킨다. overlapping을 줄이기 위하여 source의 zero padding을 하는 효과는 실제로는 공간에서 수직면의 크기를 증가시키고, 결과적으로 각주파수 영역에서

한개의 점원을 고려한다. 수집면 (collecting aperture)은 $z=d$ 평면에 위치하고 있다. 그림 2는 $d=4$ cm, 샘플링 구간 $SPX, SPY=0.14$ cm, 데이터점 $N=65 \times 65$ 인 경우에 x, y 축을 따라서 field 분포를 분포를 보여주고 있다. 이 때, 수집면의 규격은 $AP=(64 \times 0.14) \times (64 \times 0.14)=8.96\text{cm} \times 8.96\text{cm}$ 이다.

본 논문에서 사용한 radiating frequency는 1MHz이며, 전파속도는 1500m/sec로 가정하였으며, 이때의 파장은 $\lambda=c/\text{freq}=0.15\text{cm}$ 이고, 공간 Nyquist 구간은 0.075cm이다. 컴퓨터 시뮬레이션을 위하여 field $p(x, y, z)$ 는 $\text{Exp}(jkR)/R^2$ 를 이용하였다.

그림 2에서 보는 바와 같이 중심축에서 멀어질수록 공간 주파수가 증가한다. 그림 2의 경우에는 undersampling 때문에 그림 3(c)에서처럼 aliasing이 일어난다. 샘플링 속도를 그림3(d)처럼 $SPX, SPY=0.07\text{cm}$, 데이터점 $N=129 \times 129$ 로 2배로 하면, 이

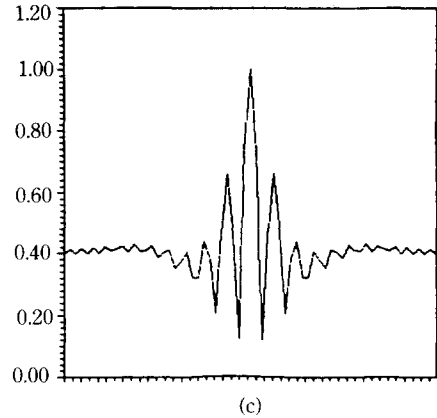
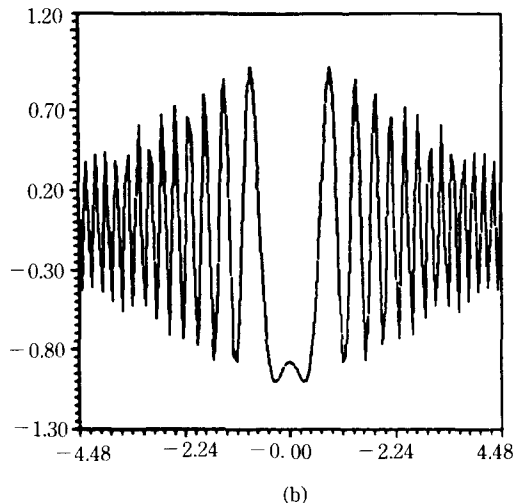
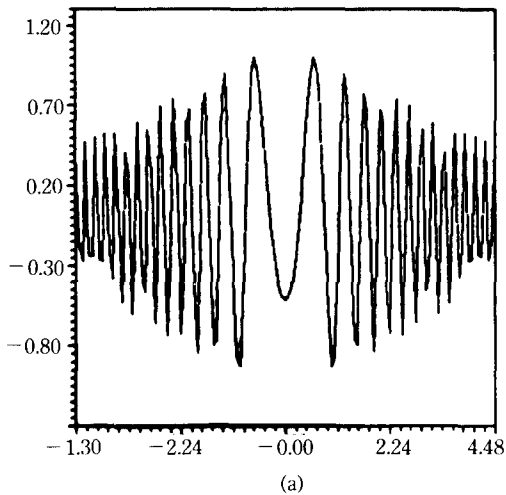
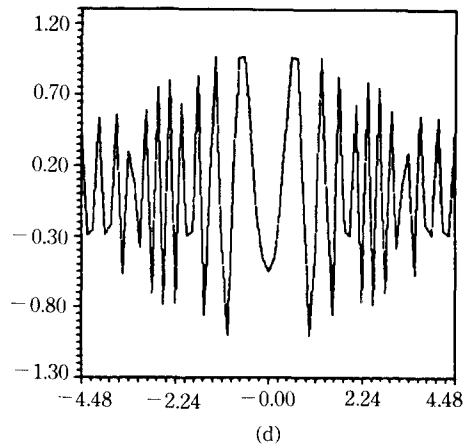


그림 3 (a) 단면 field분포의 실수부 (b) 단면 field분포의 허수부 (c) (a) 및 (b)에 대한 DFT의 단면 크기

Fig. 3 (a) Real part of crosssectional field distribution (b) Imaginary part of crosssectional field distribution (c) Crosssectional magnitude of DFT of (a) and (b) ($DT=4\text{cm}$, $X_0, Y_0=0.14\text{cm}$, $AP=8.96\text{cm} \times 8.96\text{cm}$, $N=65 \times 65$)



샘플링 속도를 증가시킨다.

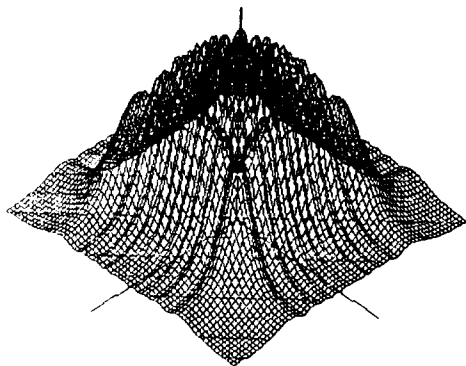
거리가 증가함에 따라 전달함수는 더 높은 주파수 성분을 포함하여서 그림 4에 보여진대로 wrap-around error가 나타나기 시작한다. 샘플링속도를 증가시킬 때, 공간에서 데이터 윈도우폭은 무한대가 아닌 한, 증가시키는 것에 상관없이 undersampling은 불가피하다.

(3) Circular convolution

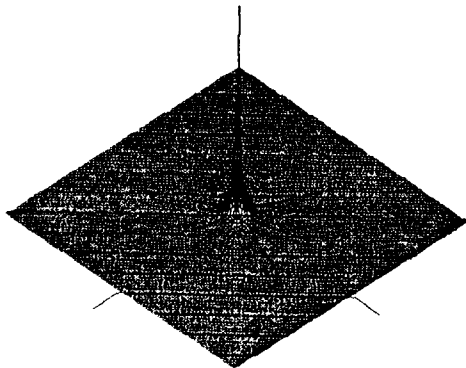
2개의 DFT를 한 시그스를 곱하는 것은 2개의 주기함수의 주기성 convolution에 해당된다. 문제는,

이 때도 circular convolution 효과를 피하기 위하여 kernel 함수를 zero padding을 하여, $2N \times 2N$ 개의 데이터 점을 얻어야 하는가 하는 것인데, 물론 Nyquist 속도보다 더 빨리 원래의 공간 데이터 시그스를 샘플링하지 않는 한 zero padding을 하여야 한다.

선형 convolution을 얻기 위하여 $2N$ 개의 점을 기준으로 $p(mx_0, ny_0, d)$ 를 변환하여야 한다. 이것과 $2N \times 2N$ 개의 점의 kernel 함수 $G^*(pf_{x_0}, qf_{y_0}, d)$ 를 곱한 후에 $2N$ 개의 점을 기준으로 역 DFT한다. 공간영역에서의 샘플링구간은 같기 때문에, 주파수 영



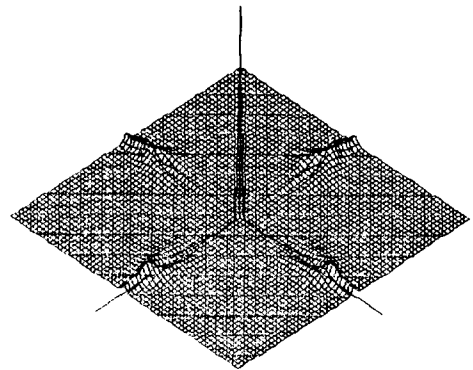
(a)



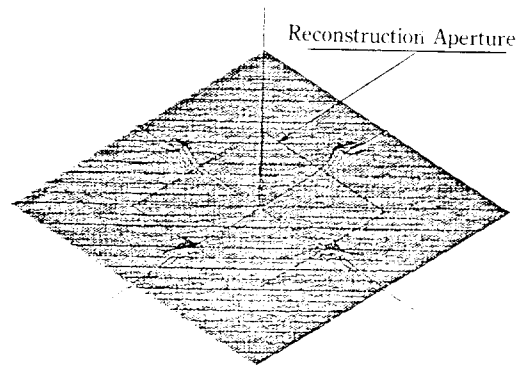
(b)

그림 4 Kernel 함수 (AP=8.96cm×8.96cm) (a) DT=4.0cm, N=64×64, $X_0, Y_0=0.14$ cm (b) DT=0.1cm, $X_0, Y_0=0.07$ cm, N=129×129

Fig. 4 Kernel function (AP=8.96cm×8.96cm) (a) DT=4.0cm, N=64×64, $X_0, Y_0=0.14$ (b) DT=0.1cm, $X_0, Y_0=0.07$ cm, N=129×129



(a)



(b)

그림 5 점원 재구성. (a) $X_0, Y_0=0.14$ cm, N=65×65, AP=8.96cm×8.96cm (b) (a)에 double zero padding한 결과

Fig. 5 Point source reconstruction. (a) $X_0, Y_0=0.14$ cm, N=65×65, AP=8.96cm×8.96cm, (b) double zero padded results of (a)

역에서의 윈도우폭은 같게 되고 다만, 주파수 영역에서의 샘플링 구간은 2배가 된다. 공간영역에서 undersampling 때문에 일어나는 효과는 원래의 공간 sequence를 zero padding하지 않는다면, 재구성 면(reconstructing aperture)의 내부로 접혀서 들어온다. 따라서 Nyquist속도 이하로 샘플링 되더라도 그림 5에 보여진 것처럼 zero padding하여 환상(circular) convolution에 따른 folding효과를 줄일 수 있다. 그림 5는 정규화한 결과이다.

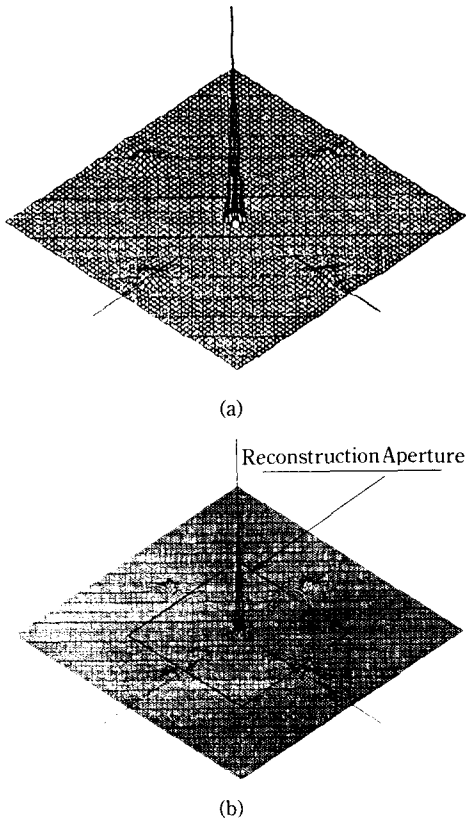


그림 6 Hamming window를 적용한 공간data를 이용한 점원 재구성 (a) $DT=4\text{cm}$, $X_0, Y_0=0.28\text{cm}$, $N=33 \times 33$, $AP=8.96\text{cm} \times 8.96\text{cm}$ (b) (a)에 double zero padding한 결과

Fig. 6 Point source reconstruction with Hamming windowed spatial data (a) $DT=4\text{cm}$, $X_0, Y_0=0.28\text{cm}$, $N=33 \times 33$, $AP=8.96\text{cm} \times 8.96\text{cm}$ (b) double zero padded results of (a)

(4) 윈도우 효과

실제로 공간데이터를 윈도우함수로 곱한것의 변환은 윈도우함수의 변환과 공간데이터의 변환과의 convolution과 같다. 원래의 공간 시퀀스는 undersampling 여부에 관계없이 전진전파한 후 역 Fourier 변환되었을 때에만 복원된다. 공간 windowing에 따른 wrap-around error는 없다. 재구성의 smearing을 일으키는 것은 kernel함수에 가해지는 윈도우함수 때문이다.

이 윈도우함수는 각주파수 영역에서만 이용하는 데, 윈도우를 적절히 선택하면, 재구성의 질을 높일 수 있다. 그러나 윈도우함수는 각주파수 영역에만 적용되어야만 한다. 공간영역에서 windowing하면 원래의 공간데이터의 가장자리(edge)에 있는 정보를 잃을 수도 있다. 그림 6은 그림 5에 Hamming window를 가한 후 정규화 한 결과이다. 예측한대로 일반적으로 Hamming window는 주엽(main lobe)를 넓히는 대신에 부엽(side lobe)효과를 줄이는 것을 볼 수 있다.

4. 결 론

각주파수 전파법에서의 재구성 오차는 다음과 같이 요약된다.

1. 공간영역에서의 undersampling은 재구성시에 aliasing효과를 일으키고, 샘플링 속도는 주파수 영역에서의 kernel함수의 통과 대역폭을 결정한다.

2. wrap-around error는 각각의 source의 overlap때문이 아니라, 주파수 영역에서 kernel함수의 undersampling때문에 일어난다. 주파수 영역에서 샘플링 속도는 공간영역에서의 윈도우폭에 비례하고, 따라서 주파수 영역에서의 샘플링 속도를 증가하는 것은 공간영역에서 zero padding한 것으로 해석할 수 있다.

3. DFT주기성 가정 때문에 replicated source 문제는 없다.

4. 식(11)은 다음과 같이 쓸 수도 있다.

$$p(mx_0, ny_0, 0) = p(mx_0, ny_0, d) ** \text{DFT}^{-1}[G' * (pf_{x0}, qf_{y0}, d)W(pf_{x0}, qf_{y0})] \quad (16)$$

5. 공간영역에서 windowing을 하는 것은 재구성의 질을 높일 수는 없으나, 각주파수 영역에서 적절한 윈도우의 선택은 재구성의 질을 높일 수 있다.

6. zero padding은 공간영역에서 데이터가 undersampling되었을 때에 환상 (circular) convolution 효과를 줄이기 위해서만 필요한 것이 아니라 wrap around error를 줄이는 데도 필요하다.

7. 공간영역에서 높은 샘플링속도는 aliasing효과를 줄이는데 필요하고, 넓은 수집면 (collecting aperture)은 wrap-around error를 줄이고 해상도를 증가시킨다.

참 고 문 헌

1) R. Bracewall, The Fourier Transform and Its Application, 2nd ed., Revised. New York : McGraw-Hill Book Co., Inc., 1986.

2) J. W. Goodman, Introduction to Fourier Optics, McGraw-Hill, Inc., 1968.

3) P. R. Stepanishen and K. C. Benjamin, "Forward and Backward Projection of Acoustic Fields Using FFT Methods", J. Acoust. Soc. Am., Vol. 71(4), pp. 803-812, Apr. 1982.

4) E. G. Williams and J. D. Maynard, "Numerical Evaluation of the Rayleigh Integral for Planar Radiators Using the FFT", J. Acoust. Soc. Am., Vol. 72(6), pp. 2020-2030. Dec. 1982.

5) E. O. Brigham, The Fast Fourier Transform and its Applications, Prentice-hall International, Inc., 1988.

6) L. Hua, "Resolution Enhancement by Wavefield Extrapolation", IEEE Trans. Sonics and Ultrason., Vol. SU-31(6), pp 642-645, Nov., 1984.