

〈論 文〉

경계요소법에 의한 등분포인장과 굽힘을 받는 유한폭 판재의 혼합 모드 표면균열에 대한 해석

박 성 완* · 홍 재 학**

(1990년 7월 24일 접수)

Analysis of Mixed Mode Surface Crack in Finite-Width Plate Subjected to Uniform Tension and Bending by Boundary Element Method

S. O. Park and J. H. Hong

Key Words : Surface Crack(표면 균열), Boundary Element Method(경계요소법), Fundamental Solutions(기본 解), Kelvin's Solution(켈빈 解), Stress Intensity Factors(응력확대 계수)

Abstract

Mixed mode surface crack in finite-width plate subjected to uniform tension and bending has been analyzed in 3-D problem by using boundary element method. The calculations were carried out for the surface crack angles (α) of 0°, 15°, 30°, 45°, 60°, and 75°, and for the aspect ratio (a/c) of 0.2, 0.4, 0.6 and 1.0 to get stress intensity factors at the boundary points of the surface crack. For the aspect ratio of 1.0 and the surface crack angles, finite element method was used to check the results in this study. Comparison of the results from both methods showed good agreement.

기 호 설 명

- a : 표면균열의 깊이
- $2c$: 표면균열의 길이
- F_I, F_{II} : 무차원 계수
- K_I, K_{II} : 모드 I, 모드 II 응력확대 계수
- Q : 반타원균열에 대한 형상계수
- H : 판재의 높이
- W : 판재의 폭
- t : 판재의 두께
- α : 표면균열의 각도

1. 서 론

표면균열문제의 해석은 그 중요성 때문에 1960년

대 초기에 Irwin⁽¹⁾에 의해서 연구가 시작된 이래 현재까지 여러가지 방법에 의해 많은 연구가 수행되었다. Shah⁽²⁾, Smith⁽³⁾은 순차근사법(alternating method)을 사용해서 반원, 반타원형 표면 균열을 해석하였고 Kathiresan⁽⁴⁾, Raju⁽⁵⁾은 유한 요소법(FEM), 結城⁽⁶⁾, Luo⁽⁷⁾, Wei⁽⁸⁾은 경계 요소법(BEM), Nisitani⁽⁹⁾, 石田^(10,11)은 체적력 법(body force method), 渡邊⁽¹²⁾은 광탄성 실험에 의해 Chen⁽¹³⁾은 파괴기준에 대해 표면균열을 해석하였다. 그러나 표면균열은 3차원 문제이기 때문에 해석은 용이하지 않고 그들의 해석방법도 계산정도, 범용성, 경계성등의 면에서 일장일단이 있다. 여기서 본 연구는 최근에 주목되고 급속한 발전을 이루고 있으며 요소분할이 표면만으로 가능하고 3차원해석에서도 데이터의 준비가 용이할 뿐 아니라 탄성문제 특히 균열문제의 해석에서 우수

* 정희원, 단국대학교 대학원

** 정희원, 단국대학교 공과대학 기계공학과

과를 나타내는 경계요소법(boundary element method)을 도입하여 무한영역에 대한 해석解인 elvin解를 기본解(fundamental solution)로 하고, 본解에 대한 성질을 파악하여 3차원 경계요소법의 선형과외역학의 수치해석용 프로그램을 개해서 유한판재에 존재하는 표면균열의 응력확대수(Stress Intensity Factor : SIF) 값을 계산 및 교검토하고, 나아가서 혼합 모드(mode I·mode II)표면균열로 확장시켜 문제가 되고 있는 판재내의 표면균열 결함평가의 해석에 유용한 -력확대 계수의 解를 얻는 것을 목적으로 한다.

2. 경계적분방정식 및 기본해의 성질

탄성 문제의 기초 경계적분방정식은 물체력을 고려하지 않을 때 다음과 같이 된다.

$$C_{ij} u_j(P) + \int_{\Gamma} T_{ij}^*(P, Q) u_j(Q) d\Gamma(Q) = \int_{\Gamma} U_{ij}^*(P, Q) t_j(Q) d\Gamma(Q) \quad (1)$$

여기서 $U_{ij}^*(P, Q)$, $T_{ij}^*(P, Q)$ 는 점 P 에 i 방향으로 단위집중력이 작용한 경우의 점 Q 에서의 j 방향의 기본 解이고 다음 식으로 표시된다.

$$U_{ij}^*(P, Q) = \frac{1}{16\pi(1-\nu)\mu r} [(3-4\nu)\delta_{ij} + r_{,i} r_{,j}] \quad (2)$$

$$T_{,j}^*(P, Q) = -\frac{1}{8\pi(1-\nu)r^2} \{ (1-2\nu)\delta_{ij} + 3r_{,i} r_{,j} \} \frac{\partial n}{\partial r} - (1-2\nu)(r_{,i} n_{,j} - r_{,j} n_{,i}) \quad (3)$$

여기서 $r, r_{,i}, n_{,j}, \delta_{ij}$ 는 다음을 의미한다.

- r : 점 P 와 점 Q 의 거리
- $r_{,j}$: $(Q_j - P_j)/r$ 인 방향여현
- $n_{,j}$: 경계의 외향단위법선의 j 방향 성분

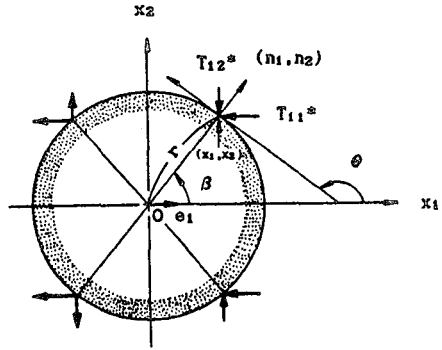


Fig. 1 Fundamental solutions on a virtual boundary of radius r due to a unit load e_1 at action in the x_1 direction

δ_{ij} : Kronecker Delta

따라서 內點(inner point) 계산에 필요한 3차원의 Kelvin解⁽¹⁴⁾는

$$U_{ij,k}^*(P, Q) = \frac{1}{16\mu(1-\nu)r^2} [-r_{,i} \delta_{jk} - r_{,j} \delta_{ki} + (3-4\nu)r_{,k} \delta_{ij} + 3r_{,i} r_{,j} r_{,k}] \quad (4)$$

$$T_{ij,k}^*(P, Q) = \frac{1}{8\pi(1-\nu)r^3} [3(r_{,i} \delta_{jk} + r_{,j} \delta_{ki} - 5r_{,i} r_{,j} r_{,k}) \frac{\partial r}{\partial n} + 3r_{,i} r_{,j} r_{,k} + (1-2\nu)\{\delta_{ij}n_k + \delta_{jk}n_i - \delta_{ki}n_j + 3(-n_i r_{,j} r_{,k} + n_j r_{,i} r_{,k} - r_{,i} r_{,k} \delta_{ij} \frac{\partial r}{\partial n})\}] \quad (5)$$

이다.

경계요소법에서는 Navier미분방정식을 만족하는 기본解를 사용하므로 기본解에 대한 성질을 파악할 필요가 있다. 따라서 본 연구에서는 기본解[式(3)]의 성질을 고찰한다.

Fig. 1과 같이 무한판의 중심에 반경 r 의 원형가상 경계를 고려하면 단위집중력 e_1 에 의한 가상경계상의 반력이 기본解 T_{11}^* , T_{12}^* 이며 $(\theta - \beta) = \pi/2$ 이

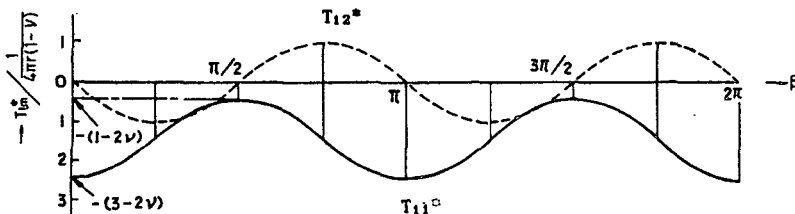


Fig. 2 Distribution of fundamental solutions on a virtual boundary of radius r due to a unit load e_1 at action in the x_1 direction

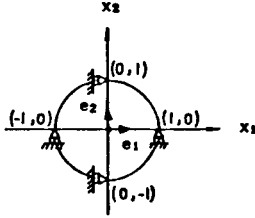


Fig. 3 Fundamental point for boundary displacement

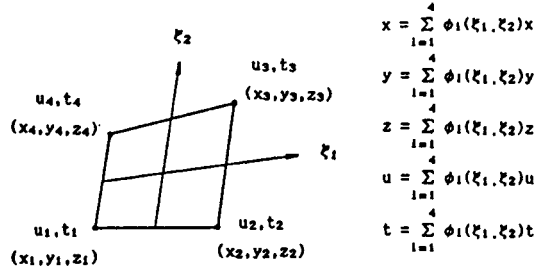


Fig. 4 Rectangular linear element (quadrilateral cells)

다.

$$\begin{aligned}
 T_{11}^* &= -\frac{1}{4\pi r(1-\nu)} [2\cos^2\beta + (1-2\nu)] \\
 &= -\frac{1}{4\pi r(1-\nu)} [\cos 2\beta + 2(1-\nu)] \\
 T_{12}^* &= -\frac{1}{4\pi r(1-\nu)} 2\cos\beta\sin\beta \\
 &= -\frac{1}{4\pi r(1-\nu)} \sin 2\beta \quad (6)
 \end{aligned}$$

Fig. 2는 원주상의 T_{11}^* 와 T_{12}^* 의 분포도이다. 원주전체에 대해서 $\beta_1=0$, $\beta_2=2\pi$ 로 하면 원주전체에 대한 T_{11}^* , T_{12}^* 의 합력은

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} T_{11}^* r d\beta &= -1 \quad x_1\text{방향의 합력} = -1 \\
 \int_0^{2\pi} T_{12}^* r d\beta &= 0 \quad x_2\text{방향의 합력} = 0
 \end{aligned}$$

으로 된다.

즉 T_{11}^* 의 합력은 -1 이므로 e_1 과 평형을 이루고 있고 또한 T_{12}^* 의 합력이 0이어서 이것도 평형으로 존재한다. 다음으로 단위집중력 e_1 , e_2 에 의한 기본해의 변위 u_{11}^* , u_{12}^* , u_{21}^* , u_{22}^* 의 기준점에 대해서 조사해 보면 Fig. 3의 위치에서 지지되고 있다고 생각된다.

3. 경계적분방정식의 이산화

4각형선형요소를 체적력을 무시하여 N 개의 요소로 분할한 이산화 식⁽¹⁵⁾으로 표현하면 다음 식으로 된다.

Fig. 4에서 표시하는 바와 같이 함수값 u , t 는 -1 에서 $+1$ 로 변화하는 무차원좌표 ξ_1 , ξ_2 와 형상 함수 $\phi_i(\xi_1, \xi_2)$ 를 사용하여 요소분할수를 N 으로 하면 각항은 다음과 같이 표시 되어진다.

$$\begin{aligned}
 \iint_{\Gamma_i} T_{ij} u_j d\Gamma &= \iint_{\Gamma_i} [\phi_1(\xi_1, \xi_2) u_{j1} \\
 &\quad + \phi_2(\xi_1, \xi_2) u_{j2} \phi_3(\xi_1, \xi_2) u_{j3} \\
 &\quad + \phi_4(\xi_1, \xi_2) u_{j4}] T_{ij} d\Gamma
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x &= \sum_{i=1}^4 \phi_i(\xi_1, \xi_2) x_i \\
 y &= \sum_{i=1}^4 \phi_i(\xi_1, \xi_2) y_i \\
 z &= \sum_{i=1}^4 \phi_i(\xi_1, \xi_2) z_i \\
 u &= \sum_{i=1}^4 \phi_i(\xi_1, \xi_2) u_i \\
 t &= \sum_{i=1}^4 \phi_i(\xi_1, \xi_2) t_i
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \textcircled{1} u_{j1} \cdot h_{ij} + u_{j2} \cdot h_{ij} + u_{j3} \cdot h_{ij} \\
 &\quad + \textcircled{4} u_{j4} \cdot h_{ij} \quad (8)
 \end{aligned}$$

여기서

$$\begin{aligned}
 \textcircled{1} h_{ij} &= \iint_{\Gamma_i} \phi_1(\xi_1, \xi_2) T_{ij} d\Gamma \\
 &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (1/4) (1-\xi_1) (1-\xi_2) T_{ij} |J| d\xi_1 d\xi_2 \\
 \textcircled{2} h_{ij} &= \iint_{\Gamma_i} \phi_2(\xi_1, \xi_2) T_{ij} d\Gamma \\
 &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (1/4) (1+\xi_1) (1-\xi_2) T_{ij} |J| d\xi_1 d\xi_2 \\
 \textcircled{3} h_{ij} &= \iint_{\Gamma_i} \phi_3(\xi_1, \xi_2) T_{ij} d\Gamma \\
 &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (1/4) (1+\xi_1) (1+\xi_2) T_{ij} |J| d\xi_1 d\xi_2 \\
 \textcircled{4} h_{ij} &= \iint_{\Gamma_i} \phi_4(\xi_1, \xi_2) T_{ij} d\Gamma \\
 &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (1/4) (1-\xi_1) (1+\xi_2) T_{ij} |J| d\xi_1 d\xi_2
 \end{aligned}$$

같은 방법으로

$$\begin{aligned}
 \iint_{\Gamma_i} U_{ij} t_j d\Gamma &= \iint_{\Gamma_i} [\phi_1(\xi_1, \xi_2) t_{j1} + \phi_2(\xi_1, \xi_2) t_{j2} \\
 &\quad + \phi_3(\xi_1, \xi_2) t_{j3} + \phi_4(\xi_1, \xi_2) t_{j4}] U_{ij} d\Gamma \\
 &= \textcircled{1} t_{j1} \cdot g_{ij} + t_{j2} \cdot g_{ij} + t_{j3} \cdot g_{ij} + t_{j4} \cdot g_{ij} \quad (9)
 \end{aligned}$$

여기서

$$\begin{aligned}
 \textcircled{1} g_{ij} &= \iint_{\Gamma_i} \phi_1(\xi_1, \xi_2) U_{ij} d\Gamma \\
 &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (1/4) (1-\xi_1) (1-\xi_2) U_{ij} |J| d\xi_1 d\xi_2 \\
 \textcircled{2} g_{ij} &= \iint_{\Gamma_i} \phi_2(\xi_1, \xi_2) U_{ij} d\Gamma \\
 &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (1/4) (1+\xi_1) (1-\xi_2) U_{ij} |J| d\xi_1 d\xi_2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \quad g_{ij} &= \iint_{\Gamma_j} \phi_3(\xi_1, \xi_2) U_{ij} d\Gamma \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (1/4) (1+\xi_1) (1+\xi_2) U_{ij} |J| d\xi_1 d\xi_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{4} \quad g_{ij} &= \iint_{\Gamma_j} \phi_4(\xi_1, \xi_2) U_{ij} d\Gamma \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (1/4) (1-\xi_1) (1+\xi_2) U_{ij} |J| d\xi_1 d\xi_2 \end{aligned}$$

$|J|$: 전체좌표계에서 정규좌표계로의 좌표변환 Jacobian

$$\begin{aligned} |J| &= \sqrt{\left[\frac{\partial y \partial z}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} - \frac{\partial y \partial z}{\partial \xi_2 \partial \xi_1} \right]^2} \\ &\quad + \left[\frac{\partial z \partial x}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} - \frac{\partial z \partial x}{\partial \xi_2 \partial \xi_1} \right]^2 + \left[\frac{\partial x \partial y}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} - \frac{\partial x \partial y}{\partial \xi_2 \partial \xi_1} \right]^2 \end{aligned}$$

이것에 의해 식 (8), (9)을 경계상의 적분방정식 식 (7)에 대입하면 다음과 같은 절점 i 에 관한 방정식을 얻는다.

$$\begin{aligned} C_{ij} u_j + \sum_{j=1}^N (\textcircled{1} h_{ij} \cdot u_{j1} + \textcircled{2} h_{ij} \cdot u_{j2} + \textcircled{3} h_{ij} \cdot u_{j3} + \textcircled{4} h_{ij} \cdot u_{j4}) \\ = \sum_{j=1}^N (\textcircled{1} g_{ij} \cdot t_{j1} + \textcircled{2} g_{ij} \cdot t_{j2} + \textcircled{3} g_{ij} \cdot t_{j3} + \textcircled{4} g_{ij} \cdot t_{j4}) \end{aligned} \quad (10)$$

여기서 강제변위조건⁽¹⁶⁾ $\textcircled{4} h_{ij} = -\sum_{j=1}^N \textcircled{4} h_{ij}$ 으로 하여 절점에 관하여 정리하면 $(j \neq i)$

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N H_{ij} u_j = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N G_{ij} t_j \quad (11)$$

이것을 간단히 표현하면

$$[H]\{u\} = [G]\{t\} \quad (12)$$

이다.

여기서 $\{u\}$ 는 전절점변위 벡터, $\{t\}$ 는 전절점표면력 벡터이다. 실제로 이산화한 적분방정식에 있어서는 특이적분은 식 (12)의 매트릭스의 대각성분으로 된다. $[H]$ 에 관해서는 강제변위조건을 사용하는 것에 의해 특이적분을 피해서 간접적으로 평가 가능하고 C_{ij} 는 자동적으로 결정된다.

4. 수치해석

3차원 경계요소법에 의한 수치해석용 프로그램의 알고리즘을 Fig. 5에 나타내며 그 효율성을 검증하기 위해 굽힘 응력장에서의 내점의 응력계산으로 Fig. 6은 한변의 길이가 120의 정입방체를 면 ABFE에서 고정하고 면 CDHG에 굽힘을 발생하는 표면력이 주어진 문제로 정입방체의 대칭성을 이용하여 입방체의 중앙($X=Y=60$)인 직선 $I-I'$ 응력

분포를 구하였다.

Fig. 7은 각 모델에 대한 요소분할을 나타낸 것으로 요소수 96, 절점수 98인 모델 1, 직선 $I-I'$ 의 표면부분만을 한 변의 길이 15인 정방형 요소로 한 요소수 120, 절점수 130의 모델 2, 직선 $I-I'$ 의 표면부분만을 한 변의 길이 7.5인 정방형 요소로 한 요소수 144, 절점수 162인 모델 3으로 하여 계산한다. 경계조건으로는 면 $ABFE$ 의 요소는 XYZ 방향의 모든 변위를 0으로 하고 면 $CDHG$ 의 요소는 Y 방향에 평행한 표면력을 작용시킨다. Fig. 8은 각 모델의 내점의 계산 결과를 나타낸 것이다.

직선 $I-I'$ 의 내점 계산결과 Y 방향의 응력은 표면에서 떨어져 있는 내점의 오차는 작고 경계근방 즉 직선 $I-I'$ 의 표면에 가까운 내점에 있어서는 큰 오차를 나타내고 있으며 이것은 기본解의 $1/r$ 의 특이성으로도 알 수 있다. 이들의 표면에 가까운 내점에서는 직선 $I-I'$ 의 표면치수를 작게 설정한 모델만큼 계산결과에 포함된 오차는 작게 된다.

Fig. 9와 같일 3차원 균열에 있어서 균열에 수직인 균열의 법선방향의 면 즉 $X-Y$ 평면내에서 균열에 지극히 가까운 부분에서는 3차원 균열에서도 그 응력, 변위등의 역학적 상태는 Z 에 독립적으로 있으므로 2차원문제로 취급한다⁽¹⁷⁾. 다만 본 연구에서는 혼합 모드에 대한 해석이므로 다음 식은 모드 I, 모드 II에 대하여 표시한다. 균열선단 근처의 $\theta = 0$ 에서 응력성분 σ_y , τ_{xy} 및 $\theta = \pi$ 에서 변위 성분 v , u 는 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} r^{(1/2)} \sigma_y|_{\theta=0} &\equiv r^{(1/2)} \sigma_y^* = A_{11} + 3A_{13}r + 5A_{15}r^2 \dots \\ &= g(r) \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} 2r^{(1/2)} \tau_{xy}|_{\theta=0} &\equiv 2r^{(1/2)} \tau_{xy}^* \\ &= -A_{11} - 3A_{13}r + 12A_{14}r^{(3/2)} \dots \\ &= i(r) \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \frac{2G}{k+1} \cdot \frac{1}{r^{(1/2)}} \cdot v \Big|_{\theta=\pi} &\equiv \frac{2G}{k+1} \cdot \frac{v^*}{r^{(1/2)}} \\ &= A_{11} - A_{13}r + A_{15}r^2 \dots = f(r) \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \frac{2G}{k+1} \cdot \frac{1}{r^{(1/2)}} \cdot u \Big|_{\theta=\pi} &\equiv \frac{2G}{k+1} \cdot \frac{u^*}{r^{(1/2)}} \\ &= -A_{11} + A_{13}r - A_{15}r^2 \dots = h(r) \end{aligned} \quad (16)$$

여기서 A_I , A_{II} 는 K_I , K_{II} 와 같이 균열길이나 경계조건에 의해 정해지는 계수이다.

G : 횡탄성계수, $k = \begin{cases} (3-4\nu) & (\text{평면변형률}) \\ (3-\nu)/(1+\nu) & (\text{평면응력}) \end{cases}$

이다.

식 (13) ~ (16)에 의하여

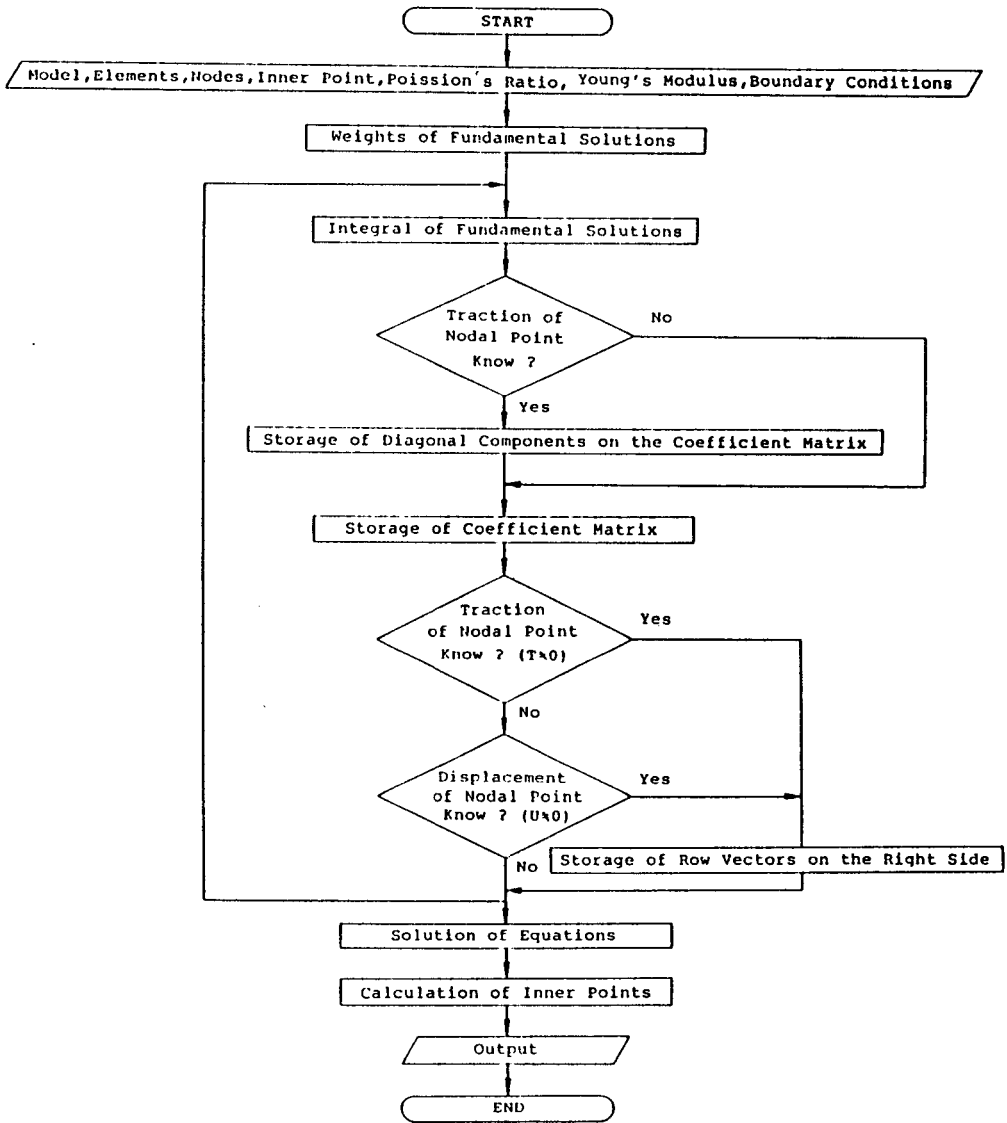


Fig. 5 Algorithm

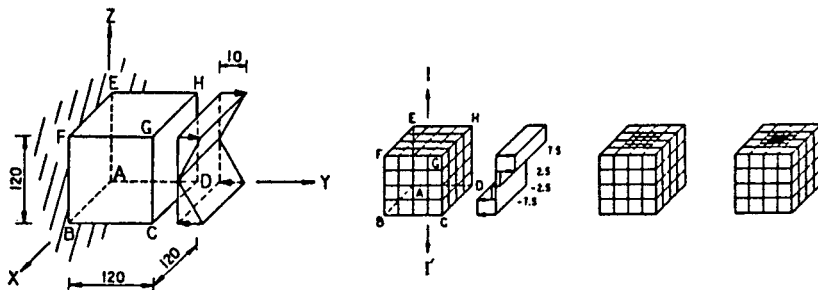


Fig. 6 Test problem geometry

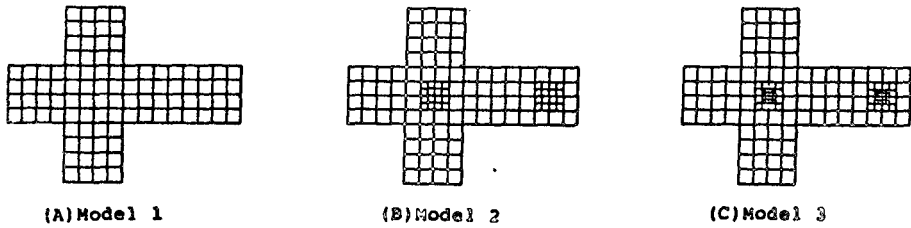


Fig. 7 Test problem boundary segments

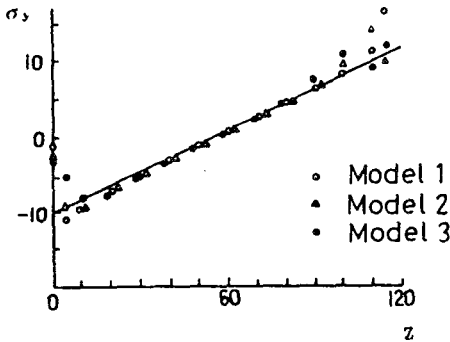


Fig. 8 Stress values of inner point

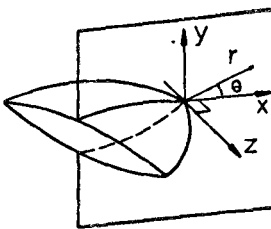


Fig. 9 Coordinate system

$$A_{II} = \lim_{r \rightarrow 0} g(r) = \lim_{r \rightarrow 0} r^{(1/2)} \sigma_y^* \quad (17)$$

$$= \lim_{r \rightarrow 0} f(r) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{2G}{k+1} \cdot \frac{v^*}{r^{(1/2)}} \quad (18)$$

$$A_{III} = \lim_{r \rightarrow 0} i(r) = \lim_{r \rightarrow 0} 2r^{(1/2)} \tau_{xy}^* \quad (19)$$

$$= \lim_{r \rightarrow 0} h(r) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{2G}{k+1} \cdot \frac{u^*}{r^{(1/2)}} \quad (20)$$

식 (17), (18)에서 절점값 σ_y^* 또는 v^* 를 사용하여 $r \rightarrow 0$ 으로 외삽하여 각각 단독으로 K 를 구하는 것이 응력법, 변위법이다. 응력법과 변위법을 접속시키기 위하여 Fig. 10과 같이 $r=0$ 에서 $f(r)$ 과 $g(r)$ 을 또한 $h(r)$ 과 $i(r)$ 을 다음의 접속조건에 의해 순조롭게 접속시킨다. 이때의 필요충분조건은

$$\begin{cases} f(0) = g(0) \\ h(0) = i(0) \end{cases} \quad (21)$$

$$\begin{cases} f'(0) = -g'(0) \\ h'(0) = -i'(0) \end{cases} \quad (21)'$$

그러나 f 와 g 및 h 와 i 에 관해서는 식 (21)은 만족되지만 식 (21)'는 성립되지 않는다. 그래서 $\hat{r} = 3r$ 로 놓으면 $f(\hat{r})$ 과 $g(r)$ 및 $h(\hat{r})$ 과 $i(r)$ 에 대하여 식 (21), (21)'는 $r=0$ 에서 자연스럽게 접속된다. 따라서 Fig. 10과 같이 $r-g(r)$ 평면과 $\hat{r}-f(\hat{r})$ 평면 및 $r-i(r)$ 평면과 $\hat{r}-h(\hat{r})$ 평면 상에서 응력법과 변위법을 동시에 사용하여 K 를 외삽하는 것이 가능하다. 이것을 접속외삽법⁽⁶⁾ (hybrid extrapolation method)이라 한다. 그런데 K_I 과 A_{II} , K_{II} 와 A_{III} 과의 관계는

$$K_I = \sqrt{2\pi} \cdot A_{II}, \quad K_{II} = -\sqrt{2\pi} \cdot A_{III}$$

A_{II} 과 A_{III} 이 구해지면 K_I , K_{II} 가 정해진다. Fig. 11은 반타원 표면균열의 K 해석을 접속외삽법을 사용하여 계산한 것을 나타낸 것이다. 균열선단에 인접한 부분에서 응력, 변위의 절점값이 특이성으로 인하여 흐트러져 있기 때문에 외삽에 있어서는 이들의 값을 제외할 필요가 있다. 따라서 균열선단의 요소의 폭은 어느 정도 작게 하는 것이 좋다.

대부분 표면균열의 연구는 표면균열의 각도 $\alpha =$

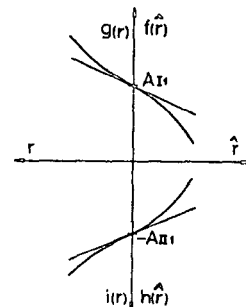


Fig. 10 Hybrid extrapolation method

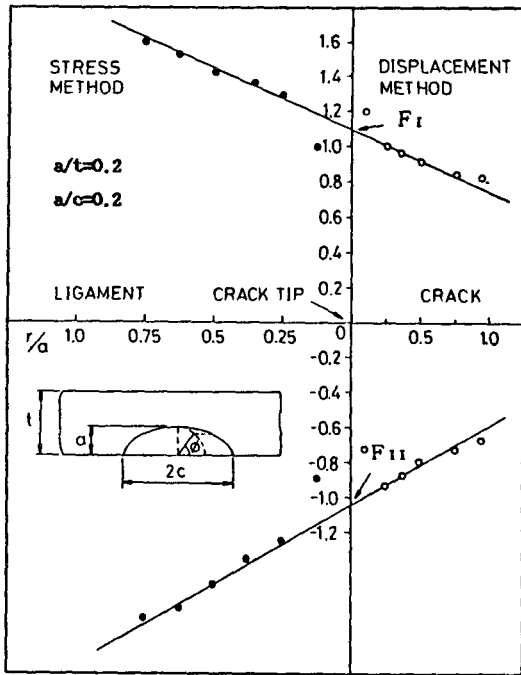
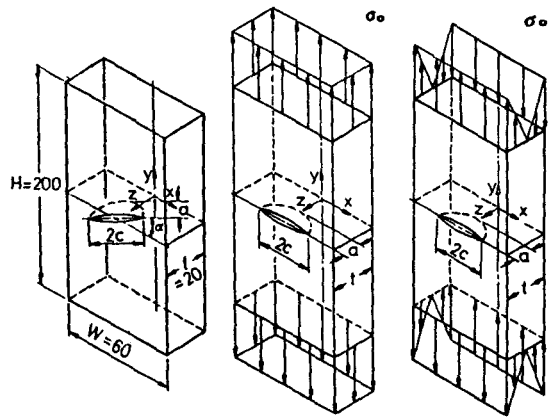


Fig. 11 Determination of K by hybrid extrapolation method

0°인 모드 I에 대한 해석이었으며 $\alpha=15^\circ\sim 75^\circ$ 인 혼합 모드에 대한 연구는 별로 찾아볼 수 없었다. 따라서 본 해석에서는 표면균열에 대한 것으로 Fig. 12와 같이 표면균열에 각도 $\alpha=0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ$ 로 변화시킨 폭=60, 높이=200, 두께=20인 평판에 반타원 표면균열을 요소수 185, 절점수 196, 내점(inner point)수 199로 요소분할하여 등분포인장과 굽힘의 하중조건으로 수치해석하였다.

Fig. 13(a)는 $\alpha=0^\circ$ 에 대한 요소분할이며 (b)는 $\alpha=15^\circ\sim 75^\circ$ 에 대한 요소분할을 나타낸 것이다. 또한 해석결과를 비교하기 위해 FEM패키지 (ALGOR SUPERSAP 386 Version)를 동일한 모델로 하여 해석하였으며 Fig. 14은 요소수 876, 절점수 1264로 분할한 FEM의 요소분할을 나타낸 것으로 크랙의 비대칭성으로 인하여 평판전체를 요소분할했다. 해석 파라미터는 Aspect Ratio (a/c) = 0.2, 0.4, 0.6, 1.0의 4종류로서 $a/t=0.2$ 이며 표면균열의 각도 $\alpha=0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ$ 로 변화시켜 적용하여 표면균열 전체에서 각 ϕ 에 따라 해석하였다.



(A) Uniform Tension (B) Bending

Fig. 12 Coordinate system and surface crack modeling

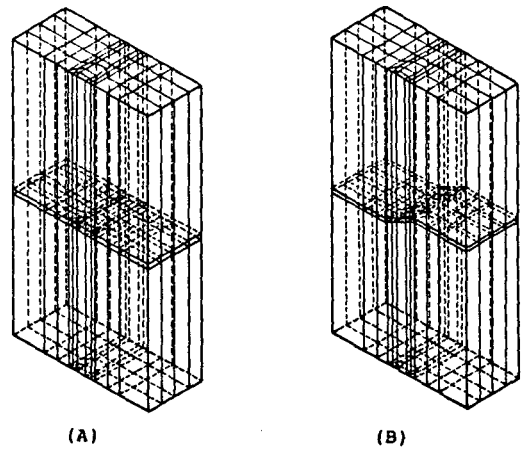


Fig. 13 Surface crack modeling segments

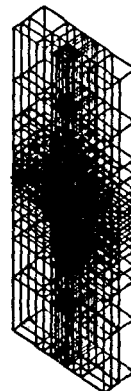


Fig. 14 Finite element model for a semi-elliptical surface crack

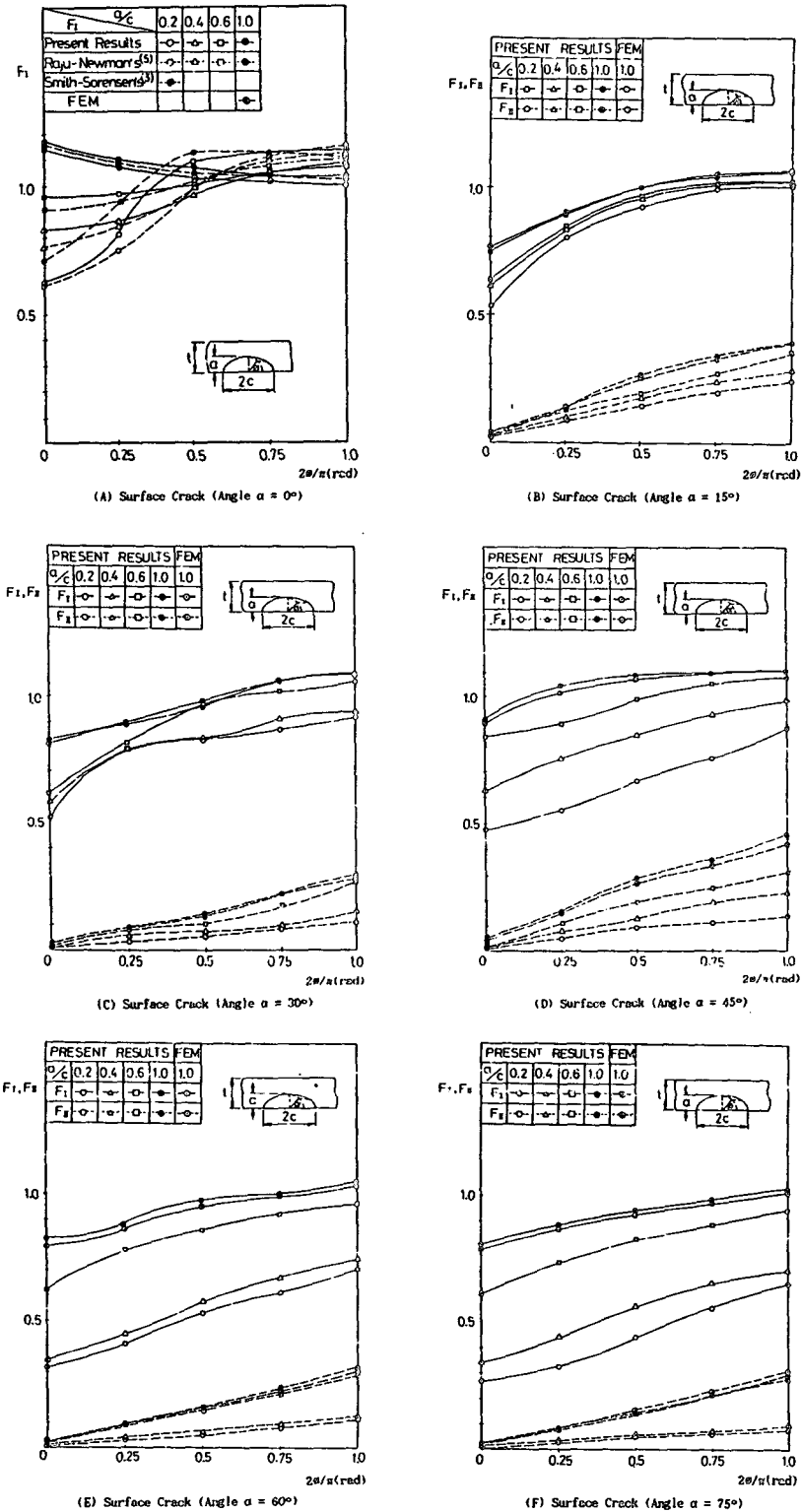


Fig. 15 F_I Versus $2\phi/\pi$ for various a/c (uniform tension)

지금 K_I , K_{II} 는 모두 $F_I = K_I / [\sigma_0 \sqrt{(\pi a/Q)}]$, $F_{II} = K_{II} / [\sigma_0 \sqrt{(\pi a/Q)}]$ 로서 무차원화 했다. 여기서 $Q = [E(k)]^2$ 으로 $E(k)$ 는 제 2종완전타원적분식⁽¹⁸⁾ 즉 $k^2 = 1 - (a/c)^2$,

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi} d\phi \text{이며,}$$

$$E(0) = \pi/2, E(1) = 1 \text{이다.}$$

경계요소법은 영역의 문제를 경계상의 방정식으로 변환해서 풀기 때문에 차원이 일차원 낮아지게 되고 문제를 풀기 위하여 필요한 입력 데이터는 유한요소법보다 적게되므로 데이터의 준비와 체크에 시간과 노력이 크게 절약된다. 그러나 계산시간은 유한요소법의 매트릭스가 띠(band)형으로 되는 것에 대해서 경계요소법은 Full-Populated로 되기 때문에 큰 차이는 없었다. 사용된 컴퓨터는 IBM PC-386(25 MHz, OS: DOS 4.01/UNIX V 3.2)이다.

4.1 등분포 인장

해석 모델 및 경계조건은 Fig. 12(a)와 같다. Fig. 15(a)는 비교 검토를 위해서 반타원 표면균열의 각도 $\alpha=0^\circ$ 에 대해 현재 표면균열의 해석에서 비교적 신뢰성이 높게 평가받고 있는 Raju등⁽⁵⁾의 유한요소법에 의한 解, Smith등⁽³⁾의 순차근사법에 의한 解와 FEM패키지에 의한 해석결과를 도시한 것이다.

Fig. 15(a)로 부터 전체적인 경향은 비교적 잘 일치하고 있지만 $a/c=0.2$ 에서 본 해석의 결과가 Raju 등⁽⁵⁾과 Smith등⁽³⁾의 解 중간에 존재하는 것을 알 수 있다. $a/c=0.4 \sim 1.0$ 에서 표면점($2\phi/\pi=0.0$)에서는 본 해석의 결과가 Raju등⁽⁵⁾의 결과보다 높은 값을 나타내고 가장 깊은 점($2\phi/\pi=1.0$)에서는 반대로 낮은 값을 나타내고 있으며 그 차이가 5%이내이다. 균열길이가 길어질수록 가장 깊은 점에서의 F_I 값은 증가하고 있으나 표면점에서는 오히려 감소하는 경향을 보여주고 있다. 이것은 가장 깊은 점의 영향으로부터 멀어지기 때문으로 생각된다.

Fig. 15(b)~(f)는 표면균열의 각도 $\alpha=15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ$ 인 혼합 모드(mode I+mode II)에 대한 해석결과를 도시한 것으로 $\alpha=45^\circ$ 일 때 F_I, F_{II} 값이 일반적으로 가장 큰 값을 나타내고 있으며 전체적으로는 α 에 대해 $2\phi/\pi=1.0$ 과 $a/c=1.0$ 일 때 F_I, F_{II} 값이 가장 큰 값을 나타내고 있는데 이것은 F_I, F_{II} 값이 α 에 큰 영향을 받고 있음을

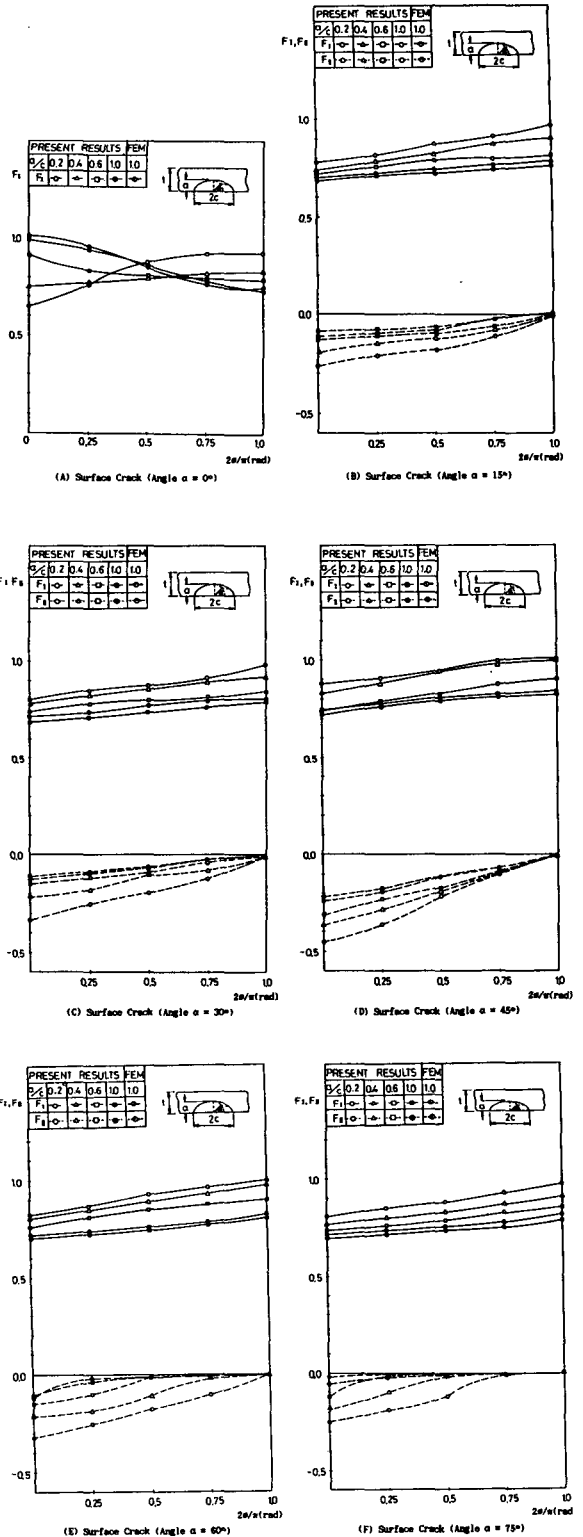


Fig. 16 F_I , versus $2\phi/\pi$ for various a/c (bending)

나타낸다. 또한 $\alpha > 30^\circ$ 일 때에 Aspect Ratio에 따라 F_I , F_{II} 값이 큰 차이를 나타낸다. $a/c=1.0$ 에서 FEM 패키지 결과와 2%이내의 차이를 나타내고 있다.

4.2 굽힘

해석 모델 및 경계조건은 Fig. 12(b)와 같고 Fig. 16(a)는 표면균열의 각도 $\alpha=0^\circ$ 에 대한 해석 결과와 비교를 위해서 FEM 패키지를 사용하여 $a/c=1.0$ 일때의 해석결과를 나타내었다. 굽힘 응력장에서는 평판의 표면은 인장응력, 배면에서 압축응력이 작용하고 있다. Fig. 16(a)에서 알 수 있듯이 $\alpha=0^\circ$ 는 F_I 값이 표면 점($2\phi/\pi=0.0$)에서는 인장응력의 영향이 강하기 때문에 $a/c=0.6$ 에서부터 $2\phi/\pi$ 가 증가할수록 감소하는 경향을 나타낸다. Fig. 16(b)~(f)는 표면균열의 각도 $\alpha=15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ$ 인 혼합 모드(mode I+mode II)에 대한 해석결과를 도시한 것으로 $\alpha=45^\circ$ 일 때 전체적으로 F_I , F_{II} 값이 가장 크며 굽힘에서는 F_I 값이 $2\phi/\pi=1.0$, $a/c=0.2$ 일 때, F_{II} 는 $2\phi/\pi=0.0$, $a/c=0.2$ 일 때 가장 큰 값을 나타낸다. 등분포 인장과는 반대로 가장 깊은 점의 F_I 값이 α 의 영향을 받고 있으며 F_{II} 값은 등분포 인장과는 반대로 표면에서 인장응력의 영향으로 표면 점($2\phi/\pi=0.0$)이 가장 깊은 점($2\phi/\pi=1.0$)보다 크고 $\alpha > 30^\circ$ 일 때에 Aspect Ratio에 따라 표면점에서 큰 차이를 나타내고 가장 깊은점에서 서로 일치하고 있다. $a/c=1.0$ 에서 FEM 패키지값과 3%이내의 차이를 나타내고 있다.

5. 결 론

경계요소법을 적용하여 3차원 문제인 표면균열을 등분포인장과 굽힘에 대해서 해석하고 표면균열의 각도 $\alpha=15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ$ 로 변화시켜 혼합 모드인 표면균열로 확장하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) 혼합 모드 표면균열에서는 표면균열의 각도 $\alpha=45^\circ$ 일 때 F_I , F_{II} 가 일반적으로 가장 큰값을 나타내고 있으며 등분포인장의 경우 전체적으로 각도 α 에 대해 $2\phi/\pi=1.0$ 과 $a/c=1.0$ 일 때 F_I , F_{II} 값이 가장 큰값을 나타내고 있다. 또한 $\alpha > 30^\circ$ 일때에 Aspect Ratio에 따라 F_I , F_{II} 값이 큰 차이를 나타내고 있다.

(2) 굽힘응력장에서는 F_I 값은 $2\phi/\pi=1.0$, $a/c=0.2$ 일 때, F_{II} 값은 $2\phi/\pi=0.0$, $a/c=0.2$ 일 때 가장 큰값을 나타낸다. 등분포인장과는 반대로 F_{II} 값은 표면에서 인장응력의 영향으로 표면점($2\phi/\pi=0.0$)이 가장 깊은점($2\phi/\pi=1.0$)보다 크고 $\alpha > 30^\circ$ 일 때에 Aspect Ratio에 따라 표면점에서 큰 차이를 나타내고 가장 깊은점에서는 서로 일치하고 있다.

(3) 본 해석으로 혼합 모드 표면 균열의 F_I , F_{II} 값을 계산했으며 따라서 경계요소법은 복잡한 기하학적 형상을 가진 3차원문제에 효율적이다.

참 고 문 헌

- (1) Irwin, G. R., 1962, "Crack-extension Force for a Part-through Crack in a Plate", Trans. ASME., J. Appl. Mech., pp.651~654.
- (2) Shan, R. C. and Kobayashi, A. S., 1973, "Stress Intensity Factors for an Elliptical Crack Approaching the Surface of a Semi-infinite Solid", Int. J. Fract., Vol.9, No.2, pp.133~146.
- (3) Smith, F. W. and Sorensen, D. R., 1976, "The Semi-elliptical Surface Crack-A Solution by the Alternating Method", Int. J. Fract., Vol.12, No.1, pp.47~57.
- (4) Kathiresan, K., 1976, "Three-dimensional Linear Elastic Fracture Mechanics Analysis by a Displacement Hybrid Finite Element Model", Ph. D. Thesis, Georgia Institute of Technology.
- (5) Raju, I. S. and Newman, J. C., Jr., 1979, "Stress-intensity Factors for a Wide of Semi-elliptical Surface Cracks in Finite-thickness Plate", Eng. Fract. Mech, Vol.11, pp.817~829.
- (6) 結城良治, 木順博行, 松本敏郎, 1984, "境界要素法における 應力擴大係數の決定法", 第1回 境界要素法 シンポジウム, pp.85~90.
- (7) Luo Gangming and Zhang Yongyuan, 1988, "Application of Boundary Element Method with Singular and Isoparametric Elements in Three Dimensional Crack Problems, Eng. Fract. Mech., Vol.29, No.1, pp.97~106
- (8) Wei Feng and Yong-Yuan Zhang, 1988, "A Boundary Element Procedure for Estimating the Residual Fatigue Life of Three Dimensional Crack Problem under Cyclic Loadings with Varying Amplitudes", Eng. Fract. Mech., Vol. 29, No. 2, pp.151~157
- (9) Nisitani, H. and Murakami, Y., 1974, "Stress Inten-

- sity Factors of an Elliptical Crack or a Semi-elliptical Crack Subject to Tension", *Int. J. Fract.*, Vol. 10, No.3, pp.353~368.
- (10) 石田誠, 野口博司, 1983, "體積力法による三次元き裂問題の解析について", *日本機械學會論文集*, Vol. 49, No. 442, pp.707~716.
- (11) Isida, M., Noguchi, H., and Yoshida, T., 1984, "Tension and Bending of finite thickness plates with a Semi-elliptical Surface Crack", *Int. J. Fract.*, Vol. 26, pp.157~188.
- (12) 渡邊勝彦, 久田俊明, 平野八州男, 北川英夫, 1978, "三次元き裂問題の光弾性實驗による解析", *日本機械學會論文集*, Vol.44, No.388, pp.4040~4051.
- (13) Chen, Xiao-Ming, Jiao, Gui-Qiong, and Cui, Zhen-Yuan, 1986, "Application of Combined-Mode Fracture Criteria to Surface Crack Problems", *Eng. Fract. Mech.*, Vol.24, No.1, pp.127~144.
- (14) Brebbia, C.A., Telles, J. C. F., and Wrobel, L. C., 1984, "Boundary Element Techniques", Springer-Verlag, Berlin, pp.180~233.
- (15) Banerjee, P. K. and Butterfield, R., 1981, "Boundary Element Methods in Engineering Science", McGraw-Hill, New York, pp.138~165.
- (16) Lachat, J. C. and Waton, J. O., 1976, "Effective Numerical Treatment of Boundary Integral Equations : A Formulation for Three-dimensional Elastostatics", *Int. J. Numerical Method in Engineering*, Vol.10, pp.991~1005.
- (17) Kassir, M. K. and Sih, G. C., 1966, "Three-Dimensional Stress Distribution around an Elliptical Crack under Arbitrary Loadings", *Trans. ASME, J. Mech.*, pp.601~611.
- (18) Cruse, T. A., 1988, "Boundary Element Analysis in Computational Fracture Mechanics", Kluwer Academic, Dordrecht, pp.45~55.