

# 마이크로폴라 탄성이론

한 석 영  
산업과학기술연구소 압연연구부



● 1959년생  
● 연속체 역학 및 구조역학을 전공하였으며, 복합적응구조물의 파괴역학, 좌굴해석, 최적설계 등에 관심을 가지고 있다.

## 1. 머리말

고전 연속체 이론(classical continuum theory)은 모든 물체는 연속적인 질량 밀도를 가지며, 모든 기초 방정식(balance laws)들은 물체 크기에 상관없이 성립되고, 어떤 물체내에서의 한 점의 상태는 그 점 주위의 미소한 영역(infinitesimal neighborhood)만의 영향을 받는다는 가정을 토대로 하여 유도되었다. 이러한 고전 연속체 이론에 바탕을 둔 고전 탄성이론은 실제 이용되고 있는 많은 구조물의 응력(stress)과 변형률(strain)을 구하는데 성공적으로 적용되고 있으나, 고응력 구배(high stress gradient)를 받는 기계 요소의 피로 해석과 구멍(hole), 노치(notch) 또는 균열(crack) 주위의 응력 분포를 계산하는데는 이론과 실험사이에 큰 차이를 보이고 있다. 특히 동력학 문제에 있어 주파수(frequency)가 큰 경우 즉 파장이 짧은 ultrasonic wave와 같은 특성을 갖는 탄성진동 문제에 있어서 이론과 실험 사이에는 매우 큰 차이를 보인다. 그 원인은 물체의 미소구조(microstructure)의 영향이 중대해지기 때문으로 보인다. 이러한 경우들을 통하여 고전 탄성이론의 구성 방정식(constitutive equations)은 미소구조가 중요한 영향을 미치는 문제에 대해서는 일반적으로 성

립될 수 없다는 것을 알 수 있으며, 이러한 고전 탄성이론의 구성방정식을 개선하기 위하여 새로운 연속체 이론이 필요하게 되었다. 따라서 자유도를 증가시킴으로써 고전 탄성이론의 구성 방정식을 개선시킨 많은 연속체 이론들이 소개 되었는데 그 중 가장 널리 인정되고 있는 이론들이 Mindlin과 Tiersten이 소개한 회전응력 이론(couple stress theory), 일명 부정적 회전응력 이론(indeterminate couple stress theory)과 Eringen과 Suhubi가 소개하고 발전시킨 마이크로폴라 연속체 이론(micropolar continuum theory)이다.

## 2. 마이크로폴라 탄성이론의 발전

마이크로연속체(microcontinuum) 이론의 중심은 회전 응력의 개념으로, 탄성이론에 있어 회전응력의 존재는 1887년 Voigt에 의해 그의 Crystallography에 관한 연구 중 폴라분자(polar molecules)와 관련하여 발상된 이후, 1893년 Duhem에 의해 물체는 각 점(particle)만의 결합체가 아니라, 각 점에서의 방향과 더불어 생각되어야만 한다는 가설을 발표하였다. 1909년에는 Cosserat형제에 의해 변형되는 물체에 대한 단일화 된 이론이 확립되었다. 그러나, 이 놀라운 이론은 반세기 가 넘도록 빛을 보지 못하다가 1950년대 후반에 왔어야 다시

거론되기 시작하여 Cünther(1958), Grioli(1960), Truesdell과 Toupin(1960), Aero와 Kuvshinskii(1960), Schaefer(1962), Mindlin과 Tiersten(1962), Toupin(1962), Eringen(1962) 등에 의해 발전하기 시작하였다. 그러나 이들의 이론들은 미소회전(microrotation) 백터를 독립백터로 정의하지 않음으로써, 응력의 비대칭 성분과 회전응력의 대칭성분이 결정되지 못하므로 부정적 회전응력 이론으로 알려져 있으며, 1964년에 Eringen과 Suhubi에 의해 비선형 마이크로탄성(microelastic) 연속체의 일반적인 이론이 소개되었다. 마이크로탄성 연속체는 고전 연속체의 기본 법칙에 미소회전이라는 자유도를 증가시키고, 매크로볼륨(macrovolume) 요소(element)에 포함되어 있는 마이크로볼륨(microvolume) 요소의 내부운동을 고려한 연속체이다. 여기에 기초를 둔 탄성이론이 바로 마이크로폴라 탄성이론이며, 어떠한 구속조건하에서는 부정적 회전 응력이론을 포함한다.

이러한 두 이론을 이용하여 많은 논문이 발표되었으며 그중 몇 가지 중요한 문제들을 예로 들면, Mindlin은 원형 구멍이 있는 판에 있어서의 응력집중 문제에 있어 회전응력(couple stress)의 영향을 조사하여 응력집중계수(stress concentration factor)가 고전 탄성이론으로 계산한 값보다 작다는 것을 발견하였다. 응력집중계수는 구멍의 반지름이 특성길이(characteristic length)에 접근함에 따라 고전 탄성이론의 그것과는 아주 큰 차이를 보인다. 같은 문제를 Kalori와 Ariman이 마이크로폴라 탄성이론을 이용하여 마이크로폴라 영향을 연구하였으며, 특별한 경우 이 해는 Mindlin의 해를 포함하고 있다. 또한 많은 연구자들이 파괴역학 문제에 대해서도 이러한 이론들을 이용하여 연구하였는데, Muki와 Sternberg가 최초로 균열의 끝에 나타나는 응력집중에 있어 회전응력의 영향을 연구한 데 이어 Sladek과 Sladek이 penny-shaped 균열에 대해, 그리고 Paul과 Sridharan이 Griffith's 균열에 대하여

회전응력의 영향을 연구하였다.

회전응력을 측정하는 실험 논문은 별로 많이 발표되지는 않았으나 발표된 몇 가지를 소개하면, 알루미늄과 강, 그리고 복합 재료에 대한 회전응력의 영향을 측정하는 실험이 행하여졌으며, crystalline  $KNO_3$ 에 대한 연구를 통해서는 거시적인 역학 상황에서 관측하기에는 너무 작은 격자 파라미터 정도의 특성길이를 갖는 것을 발표하였다. 또한 Gauthier와 Jahsmann에 의하여 마이크로폴라 탄성계수를 결정하는 실험이 행하여졌으며 많은 연구자들이 회전응력을 측정하여 마이크로폴라 탄성계수를 구하려는 시도를 하고 있다. 여기서는 마이크로폴라 탄성이론의 기본 방정식들을 기술하고, 구멍이 있는 판에 있어서의 응력 집중 계수를 고전 탄성이론, 마이크로폴라 탄성이론 그리고 부정적 회전응력 이론을 이용하여 구함으로써 각각의 결과들을 서로 비교하기로 한다.

### 3. 마이크로폴라 탄성이론의 기본 방정식

마이크로탄성 연속체는 각각의 입자가 이동(translation), 회전(rotation)과 변형(deformation)이 가능한 또 하나의 연속체(sub-continuum)에 설정(assign)되는 연속체로 정의되며, 마이크로폴라 연속체는 sub-continuum에서 변형은 되지 않고 이동과 회전만이 가능한 특별한 경우의 마이크로탄성 연속체에 해당된다. 따라서 마이크로폴라 물체에 있어 변형률은 변위백터와 미소회전 백터로 나타내어지며, 이들 백터는 응력텐서와 회전응력 텐서로 연결된다. 여기서는 마이크로폴라 탄성이론의 기본 방정식들을 일반적인 curvilinear 좌표계를 사용하여 나타내었으며 사용된 기호들(notations)은 Eringen이 사용한 것과 동일하다. 또한 기본 방정식들은 등온 조건하에서 등방성(isotropic)이고 균일(homogeneous)하며 선형 탄성 마이크로폴라 고체에 대하여 기술하였다. 기본 방정식들의 자세한 유도과정에 대해서는 참고문헌을 참고하기 바란다.

### 3.1 운동장 방정식(Field Equations)

마이크로폴라 운동장 방정식은 3차원 Geometry에 있어 6개의 미지량 즉, 3개의 변위량과 3개의 미소회전량(microrotation)에 대한 6개의 편미분 방정식으로 구성되어 있다.

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + (\mu + k) \nabla^2 \mathbf{u} + k \nabla \phi + \rho f &= \rho \ddot{\mathbf{u}} \\ (\alpha + \beta) \nabla(\nabla \cdot \phi) + \gamma \nabla^2 \phi + k \nabla \times \phi - 2k\phi + \rho l &= \rho j \dot{\phi} \end{aligned}$$

여기서,

$\mathbf{u}$  : 변위벡터

$\phi$  : 미소회전벡터

$\lambda, \mu, k, \alpha, \beta, \gamma$  : 마이크로폴라 탄성계수

$\rho$  : 질량밀도

$j$  : 미소관성(microinertia) 밀도

$f$  : 체력(body force)

$l$  : 체회전(body couple)

### 3.2 평형방정식(Equilibrium Equations)

마이크로폴라 평형방정식은 고전 탄성이론과 같은 운동량방정식(equation of momentum)과, 전혀 다른 모양의 각 운동량방정식(equation of moment of momentum)으로 구성되어 있다.

(1) 운동량방정식

$$\nabla \cdot \mathbf{t} + \rho(f - \dot{\mathbf{v}}) = 0$$

여기서,

$\mathbf{v}$  : 속도벡터

$\mathbf{t}$  : 응력벡터

(2) 각 운동량방정식

$$\nabla \cdot \mathbf{m} + (\mathbf{t} + \mathbf{t}^T) + \rho(\mathbf{l} - \dot{\boldsymbol{\sigma}}) = 0$$

여기서,

$\mathbf{m}$  : 회전응력텐서(couple stress tensor)

$\boldsymbol{\sigma}$  : 스핀텐서(spin tensor)

두 번째 각 운동량방정식으로부터 응력 텐서는 고전 탄성이론과 달리 대칭 텐서(symmet-

ric tensor)가 아닌 것을 알 수 있다.

### 3.3 구성방정식(Constitutive Equations)

마이크로폴라 구성방정식은 미소회전(microrotation)을 포함하는 응력 구성방정식과, 미소회전구배(gradient of microrotation)를 포함하는 회전응력 구성방정식으로 이루어져 있다.

(1) 응력 구성방정식

$$t_{kl} = \lambda \epsilon_{kl}^n g_{kl} + (\mu + k) \epsilon_{kl} + \mu \epsilon_{lk}$$

여기서,

$g_{kl}$  : Fundamental 매트릭스의 계수

$\epsilon_{kl}$  : Cosserat 변형률 텐서이다.

(2) 회전 응력 구성 방정식

$$m_{kl} = \alpha \phi^T ; r g_{kl} g_{kl} + \beta \phi_{k;l} + \gamma \phi_{l;k}$$

여기서, “;”은 covariant 편미분을 나타낸다.

### 3.4 변형적합 방정식(Compatibility Equations)

변형적합 방정식은 변위와 미소회전의 연속성(continuity)과 single-valuedness를 만족시키는 필요·충분조건이 된다.

$$e_{ik;j} - e_{jk;i} + \gamma_{ikj} - \gamma_{jki} = 0$$

여기서,

$$\gamma_{klm} = e_{kln} \phi^m ; m$$

$e_{klm}$  : 순환텐서(alternating tensor)

## 4. 원형구멍 주위의 응력집중

원형 구멍을 가진 판에 있어서의 응력 결정을 위해서는 먼저 운동량방정식을 극좌표계를 사용하여 표시하는 것이 필요하다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial t_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial t_{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{t_{rr} - t_{\theta\theta}}{r} + \rho f_r &= \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} \\ \frac{\partial t_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial t_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{t_{r\theta} + t_{\theta r}}{r} + \rho f_\theta &= \rho \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (1)$$

$$\frac{\partial m_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial m_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{m_{rz}}{r} + t_{r\theta} - t_{\theta r} + \rho l_z$$

$$= \rho j \frac{\partial^2 \phi_z}{\partial t^2}$$

변형률 텐서  $\epsilon_{kl}$ 의 0(영)이 아닌 성분들만 기술하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \epsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \epsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right) \\ \epsilon_{r\theta} &= \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \phi_z, \quad \epsilon_{\theta r} = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta \right) + \phi_z \end{aligned} \quad (2)$$

응력 구성방정식을 이용하여 다음과 같은 식들을 얻는다.

$$\begin{aligned} t_{rr} &= (\lambda + 2\mu + k)\epsilon_{rr} + \lambda\epsilon_{\theta\theta}, \\ t_{\theta\theta} &= \lambda\epsilon_{rr} + (\lambda + 2\mu + k)\epsilon_{\theta\theta}, \\ t_{r\theta} &= (\mu + k)\epsilon_{r\theta} + \mu\epsilon_{\theta r}, \\ t_{\theta r} &= \mu\epsilon_{r\theta} + (\mu + k)\epsilon_{\theta r} \end{aligned} \quad (3)$$

극좌표계에서의 변형적합 방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \epsilon_{\theta r}}{\partial r} + \frac{\epsilon_{\theta r} + \epsilon_{r\theta}}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \epsilon_{rr}}{\partial \theta} - \frac{\partial \phi_z}{\partial r} &= 0 \\ \frac{\partial \epsilon_{\theta\theta}}{\partial r} + \frac{\epsilon_{\theta\theta} - \epsilon_{rr}}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \epsilon_{r\theta}}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial \phi_z}{\partial \theta} &= 0 \\ \frac{\partial m_{\theta z}}{\partial r} + \frac{m_{\theta z}}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial m_{rz}}{\partial \theta} &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

여기서, 응력함수  $F(r, \theta)$ 와  $G(r, \theta)$ 를 운동량 방정식을 만족시키는 다음과 같은 식으로 가정한다.

$$\begin{aligned} t_{rr} &= \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 G}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial G}{\partial \theta} \\ t_{\theta\theta} &= \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 G}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial G}{\partial \theta} \\ t_{r\theta} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial F}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial G}{\partial r} \\ &\quad - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 G}{\partial \theta^2} \\ t_{\theta r} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial F}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 G}{\partial r^2} \\ m_{rz} &= \frac{\partial G}{\partial r}, \quad m_{\theta z} = \frac{1}{r} \frac{\partial G}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (5)$$

식 (3)으로부터 변형률을 응력의 항으로 구하

고 응력함수를 그 응력 성분에 대입한다. 다음에 식 (4)를 이용하여 다음 식을 얻는다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} (G - c^2 \nabla^2 G) &= -2(1-\nu)b^2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\nabla^2 F) \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (G - c^2 \nabla^2 G) &= 2(1-\nu)b^2 \frac{\partial}{\partial r} (\nabla^2 F) \end{aligned} \quad (6)$$

여기서,

$$\begin{aligned} c^2 &\equiv \frac{\gamma(\mu+k)}{k(2\mu+k)}, \quad b^2 \equiv \frac{\gamma}{2(2\mu+k)} \\ \nu &\equiv \frac{\lambda}{2\lambda+2\mu+k}, \\ \nabla^2 &\equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \end{aligned} \quad (7)$$

따라서, 식(6)의 해는 다음의 식으로부터 구해진다.

$$\nabla^2 F = 0, \quad \nabla^2 (G - c^2 \nabla^2 G) = 0 \quad (8)$$

무한대에서 단순 장력을 받고 있는 원형 구멍을 가진 판에 있어서의 식(7)의 해는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} F &= (T/4)r^2(1-\cos 2\theta) + A_1 \log r \\ &\quad + [(A_2/r^2) + A_3] \cos 2\theta \\ G &= [(A_4/r^2) + A_5 K_2(r/c)] \sin 2\theta \end{aligned} \quad (9)$$

여기서,  $K_2$ 는 second kind, second order modified Bessel function이다.  $A_4 = 8(1-\nu)c^2 A_3$ 이면 식(6)은 만족되고, 나머지 미지계수  $A_1, A_2, A_3$ 와  $A_5$ 는 다음의 경계조건으로부터 구한다.

$$\begin{aligned} t_{rr} = t_{r\theta} = m_{rz} &= 0 \quad \text{for } r = a \\ t_{rr} &= (T/2)(1 + \cos 2\theta) \\ t_{r\theta} &= -(T/2)\sin 2\theta \\ m_{rz} &= 0 \quad \text{for } r = \infty \end{aligned} \quad (10)$$

여기서  $T$ 는 무한대에서 가해지는 일정한 장력이며, 식(5)와 식(9)를 이용하여 응력과 회전 응력 텐서의 성분들을 계산한다.

$$t_{rr} = \frac{T}{2}(1 + \cos 2\theta) + \frac{A_1}{r^2} - \left( \frac{6A_2}{r^4} + \frac{4A_3}{r^2} - \frac{6A_4}{r^4} \right) \cos 2\theta + \frac{2A_5}{cr} \left[ \frac{3c}{r} K_0(r/c) + \left( 1 + \frac{6c^2}{r^2} \right) K_1(r/c) \right] \cos 2\theta$$

$$t_{\theta\theta} = \frac{T}{2}(1 - \cos 2\theta) - \frac{A_1}{r^2} + \left( \frac{6A_2}{r^4} - \frac{6A_4}{r^4} \right) \cos 2\theta$$

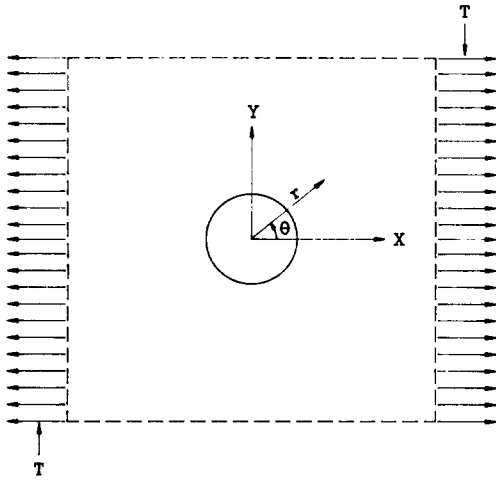


그림 1 일정 장력을 받고 있는 원형 구멍

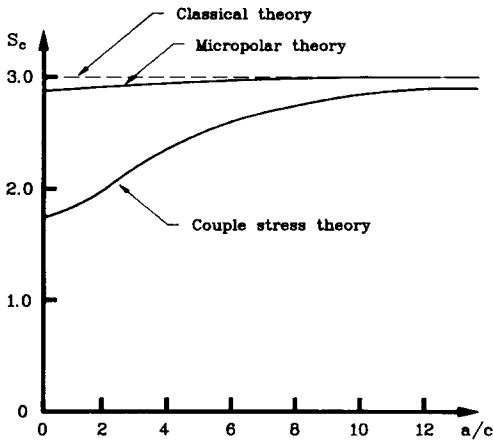


그림 2  $N=0.2, \nu=0$ 인 경우의 응력집중계수

$$t_{r\theta} = - \left( \frac{T}{2} + \frac{6A_2}{r^4} + \frac{2A_3}{r^2} - \frac{6A_4}{r^4} \right) \sin 2\theta + \frac{A_5}{cr} \left[ \frac{6c}{r} K_0(r/c) + \left( 1 + \frac{12c^2}{r^2} \right) K_1(r/c) \right] \times \sin 2\theta$$

$$t_{\theta r} = - \left( \frac{T}{2} + \frac{6A_2}{r^4} + \frac{2A_3}{r^2} - \frac{6A_4}{r^4} \right) \sin 2\theta$$

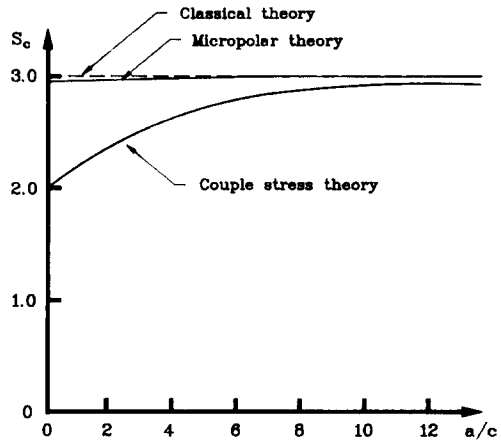


그림 3  $N=0.2, \nu=0.5$ 인 경우의 응력집중계수

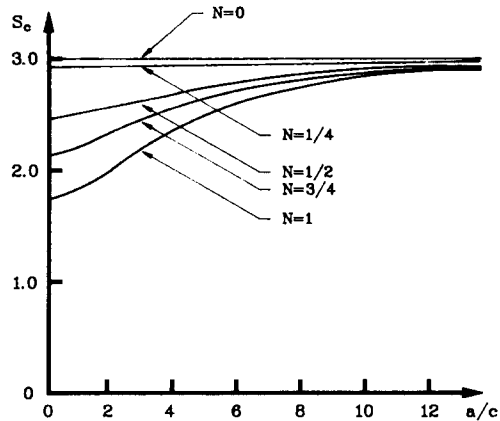


그림 4  $\nu=0.3$ 인 경우 여러가지  $N$  값에 대한 응력집중계수

$$+ \frac{A_5}{c^2} \left[ \left( 1 + \frac{6c^2}{r^2} \right) K_0(r/c) + \left( \frac{3c}{r} + \frac{12c^3}{r^3} \right) \times K_1(r/c) \right] \sin 2\theta$$

$$m_{rz} = -\frac{2A_4}{r^3} \sin 2\theta - \frac{A_5}{c} \left[ \frac{2c}{r} K_0(r/c) + \left( 1 + \frac{4c^2}{r^2} \right) K_1(r/c) \right] \sin 2\theta$$

$$m_{\theta z} = \left\{ \frac{2A_4}{r^3} + \frac{2A_5}{r} \left[ K_0(r/c) + \frac{2c}{r} K_1(r/c) \right] \right\} \times \cos 2\theta$$

식(11)의 경계조건들을 이용하여 다음과 같이 미지계수들이 얻어진다.

$$\begin{aligned} A_1 &= -\frac{T}{2} a^2, & A_2 &= \frac{-T a^4 (1 - F_1)}{4(1 + F_1)} \\ A_3 &= \frac{T a^2}{2(1 + F_1)}, & A_4 &= \frac{4(1 - \nu) a^2 b^2 T}{1 + F_1} \\ A_5 &= \frac{T a c F_1}{(1 + F_1) K_1(a/c)} \end{aligned} \quad (12)$$

여기서,

$$F_1 \equiv 8(1 - \nu) \frac{b^2}{c^2} \left[ 4 + \frac{a^2}{c^2} + \frac{2a}{c} \frac{K_0(a/c)}{K_1(a/c)} \right]^{-1} \quad (13)$$

식(12)를 식(11)에 대입하여 응력장과 회전응력장이 구해진다. 원형 구멍 주위의 응력집중에 있어 우리에게 관심이 되는 것은  $t_{\theta\theta}$ 이므로 그것만을 구한다.

$$t_{\theta\theta} = T \left( 1 - \frac{2\cos 2\theta}{1 + F_1} \right) \quad (14)$$

$t_{\theta\theta}$ 의 최대값은  $\theta = \pm \pi/2$ 에서 나타난다.

$$t_{\theta\theta} \max / T \equiv S_c = (3 + F_1) / (1 + F_1) \quad (15)$$

응력집중계수라고 정의되는  $S_c$ 는 식(13)으로부터  $\nu, a, b,$ 와  $c$ 에 따라 변화한다는 것을 알 수 있다. 그림 2, 3, 4에  $b/c$ 를  $N$ 으로 표시하였는데 이 값은 마이크로폴라 영향의 세기(strength)를 측정하는 계수로 마이크로폴라 커플링 계수(micropolar coupling factor)라 불리운다. 이 계수가 0이면 마이크로폴라 영향이 전혀 없는 경우로 고전 탄성이론의 해와 일

치하고, 이 계수가 1이면 마이크로폴라 영향이 최대인 경우로 부정적 회전응력 이론의 해와 일치된다.

## 5. 맺음말

윗 예제를 통하여 원형 구멍을 가진 판에 있어서의 응력집중계수는 고전 탄성이론의 결과와 마이크로폴라 탄성이론의 결과 사이에 큰 차이를 보인다. 머리말에서 기술한 바와 같이 고전 탄성이론을 적용했을 때 실험과 이론간의 차이를 보이는 문제에 대해서는 마이크로폴라 탄성이론의 적용이 불가피하다는 것을 알 수 있으며, 필요에 따라서는 더 차원높은 넌로컬 탄성이론(nonlocal elasticity theory)과 같은 이론의 적용이 필요하다. 마이크로폴라 탄성이론은 다른 마이크로연속체(microcontinuum) 이론에 비해 적용이 간단하며, 실제 많은 물리적인 현상을 규명하는 데 다양하게 이용할 수 있다. 특히 고전 탄성이론에 의해 적절하게 해결될 수 없는 덤벨(dumbell) 분자로 이루어진 물체, 액체 결정체(liquid crystals), 과립상(granular)의 분자로 구성된 물체와 복합 섬유재료(composite fibrous materials) 등은 마이크로폴라 탄성이론에 의해 잘 해결될 수 있다. 또한 마이크로폴라 탄성이론은 고체내에서의 파의 전파(propagation)와 분산(dispersion), 구멍 주위의 응력집중과 외부 하중을 받는 물체에 있어 균열끝에서의 응력 분포 등의 고체역학 문제들은 물론이고, 경계층(boundary layer), 난류(turbulence), 유체 유동의 불안정(instability)과 표면장력 현상등의 유체역학에서의 복잡한 문제들을 해결하는데에도 이용할 수 있다. 마이크로폴라 탄성이론은 고전 탄성이론에 비해 상대적으로 새롭고 미개척 분야이긴 하지만 이론의 기반이 확고하기 때문에 앞으로의 회전응력 측정장치의 개발을 통해 미소구조의 영향을 고려해야 하는 많은 문제들을 해결하는데 큰 기여를 할 것으로 전망된다.