隨 想

RI取扱技術과 指數函數 e^x

서 두 환
한국에너지연구소 원자로관리실장

방사선 · RI 취급자는 싫으나 좋으나 방사능 또는 차폐문제를 풀 때, 지수함수 e^x를 대하게 된다. 즉, 방사능의 세기는 $N = N_0 e^{-\lambda t}$, 방사선의 강도는 $I = I_0 e^{-\mu x}$의 공식에 따라 지수함수적으로 감소한다. 이들 공식에서 λ는 붕괴상수, t는 시간, μ는 흡수계수, x는 물질의 두께임을 RI 취급자는 모두 알고 있을 것이다.

그런데, e에 대한 수학적인 개념과 그 뜻을 정확하게 이해하고 있는 사람은 드문것 같다. e의 개념을 알기쉽게 설명해 주면 배우는 사람에게는 수월할터인데, 대부분의 경우 가르치는 사람은 그렇게 해주지 않는다. 그 이유는 가르치는 사람이 불친절하거나 무능해서가 아니고, 무엇보다도 엄밀성이라는 것을 절대적으로 존중해야 한다는 수확적인 형틀에 그 원인이 있다고 본다. 이유야 어쨌든, 현실적으로 이것으로 인하여 제일 골탕먹고 있는 자는 순수수학을 전공하지 않은 우리들이다. 특히, RI를 취급하고 있는 우리로서는 엄밀성보다도 이미지를 잡는 쪽이 중요한 것이다.

새삼스럽게 e라는 수에 대하여 설명하면, 正數 a, b에 대하여 $b = a^n$인 관계를 만족시키는 實數 n을 a를 밑(base)으로한 b의 對數라 부르고 $n = \log_a b$로 표기하며, b를 n의 眞數라 한다. 예를 들면 $100 = 10^2$을 $\log_{10} 100 = 2$로 쓰고 100의 대수는 2이다. 일반적으로 10을 밑으로한 대수를 상용대수라 부르고, 특히, e를 밑으로한 대수를 자연대수라 한다. e는 π처럼, 하나의 超越數이며, 對數的인 방정식의 根으로 될수 없는 수이다.

그러면, e는 얼마만한 크기의 수인지를 직관적으로 잡아보자. e의 정의는 다음과 같다.

$$e = \lim_{x \to \infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = 2.7182818 \cdots\cdots\cdots ②$$

윗식 $(1+1/x)^x$의 x에 어떤 값을 대입해 보면,

$x=1$ $(1+1/1)^1=2$
$x=5$ $(1+1/5)^5=2.48832$
$x=10$ $(1+1/10)^{10}=2.593742$
$x=50$ $(1+1/50)^{50}=2.691588$
$x=100$ $(1+1/100)^{100}=2.704814$
$x=365$ $(1+1/365)^{365}=2.7145675$

가 되어, $x=100$을 넘으면 $(1+1/x)^x$는 e값에 접근함을 알 수 있다. 예를 들면, 1만원을 연리 100%로 1년간 빌리고, 매일복리로 갚기도 했다면, 1년후의 원리합계는 상식의 $x=365$일때의 값인 2만 2,145원으로 된다.

본론에 들어가서, x가 실수일 때, ①식은 有限確定이다. 그래서 e^x인 함수를 생각하여, 이것을 x의 지수함수라 한다. Taylor 정리에 의하여 모든 유한값 x에 대하여 e^x는

$$e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}\cdots\cdots\cdots\frac{x^n}{n!}+\cdots\cdots\cdots ②$$

로 주어진다. 따라서 $x=1$ 일때

$$e = 1+1\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\cdots\cdots\cdots = 2.718201828459\cdots$$

이다.

이상하고 야릇한 것은, e값이 2.71…이라는 어중간한 수치라는 것이다. 이렇게 되는 이유는 일반적으로 곱하기체계와 더하지체계는 전혀 다른 체계인데, 지수함수 자체는 곱하기체계에 속하는데도 微分이라는 演算은 빼기의 모양으로 되어 더하기체계로 들어간다. 따라서 양쪽이 혼합되어 있기 때문에, 깨끗한 수치로 나타날 것을 기대할 수 없다. 물리학상의 이론적 결함을 매꾸기 위해서는, 질량이 전자와 양자의 중간쯤인 중간자가 존재하지 않으면 안되었다. e는 수학에 있어서 중간자와 같은 것이라고나 할까.

지금까지, 지수함수 e^x의 뜻을 이해시키기 위하여 장황하게 설명하였지만, 독자들은 이해는 커녕 도리어 모르겠다고 할 것이다. 그리고, 막상 문제시되는 것은 문제를 풀 때, e^x의 값을 손쉽게 구하는 방법을 아는 것이 더 바람직 할 것이다. 그러면 한 예를 들어 지수함수 값을 쉽게 구하는 비법을 소개한다.

(문) 반감이(T)5.2년인 1 mg 의 ^{60}CO 은 1년후에는 몇 Ci 로 될 것인가?

〔해〕 ①식을 미분하면 방사능(A)은

$$A = \lambda N_0 e^{-\lambda t}$$

$$\lambda = \frac{0.693}{T} = 4.22\times10^{-9}$$

$$N_0 = \frac{N_a W}{M} = 0.1\times10^{20}$$

$$\lambda N_0 = \frac{0.422\times10^{11}}{3.7\times10^{10}} = 1.14\,(Ci)$$

$$e^{-\lambda t} = \exp\left(\frac{0.693t}{T}\right) = e^{-0.133} \fallingdotseq 0.875$$

$$\therefore A = 1.14\times0.875 = 0.997 \fallingdotseq 1(Ci)$$

즉, $e^{-0.133}$의 값을 구할 때, 전자계산기가 없으면 ②식을 이용하면 되는데, ②식의 3항 이하는 χ의 2승, 3승, ……이므로 무시하여

$$e^{\chi} \fallingdotseq 1+\chi$$

을 이용하면 된다. 문제에서 $\chi = -0.133$을 ③식에 대입하면 $e^{-0.133} = 1-0.133 = 0.867$이 되어, 실제값 0.875와 비슷하여

$$A = 1.14\times0.867 = 0.988 \fallingdotseq 1Ci$$

수험생은 만점을 얻을 것이다. 이 글이 여러분에게 도움있기 바라면서.