*Journal of the Korean Institute
of Industrial Engineers
Vol. 15, No. 2, Dec., 1989*

생산능력 제약하에 확률적 수요를 갖는 로트 크기 결정기법에 관한 연구

金滿植* · 李浩一**

A Study on the Capaciated Production Lot Sizing Problem with Probabilistic Demand

Man-Sik Kim* and Ho-Il Lee**

Abstract

In many cases, productin-inventory systems involves significant demand variations. Actual demand is probabilistic and the production capacity is also limited. Finding the proper production lot sizes to this problem usually requires heavy computational procedures. Therefore a heuristic approach were under various assumptions is highly recommended. In this paper, an approach with consideration of probabilistic demand and limited production capacity is proposed.

1. 서 론

1-1. 연구목적

생산-재고 시스템에 관한 생산계획 모형은 최소의 비용으로 수요의 충족을 위해 생산 시기와 생산량을 결정하는 문제로 나타난다. 수요의 발생형태는 크게 나누어 확정적 수요(deterministic demand)와 확률적 수요(Stochastic demand)로 나뉘어진다.

확정적 수요를 가지는 생산계획 모형에 있어서는 Wagner 와 Whitin[11]의 연구로부터 시작하여 많은 연구가 진행되었으나 확률적 수요를 가지는 생산계획 모형은 아직까지 깊이 연구되지 못하고 있다. 그 이유는 기간마다 다른 비용요소(준비비용이나 단위당 생산 품절 재고보관비용)를 갖는 경우에 기대 비용함수가 볼록함수와 오목함수의 혼합형태가 되어 다루기가 어렵다. 또한 계산의 복잡성 때문에 생산설비의 용량을 고려하지 않은 모형이 대부분이다. 그러나

* 漢陽大學校 産業工學科 敎授
** 漢陽大學校 産業工學科 博士過程

많은 경우에 있어서 실제의 수요는 확정적이기 보다는 확률적으로 발생한다고 보는 것이 합리적이며, 생산능력에도 제한이 있는 것으로 보는 것이 타당할 것이다.

본 연구에서는 위의 두가지 요소를 포함하는 생산-재고 모형을 다루고자 한다.

1-2. 기존 연구

Wagner 와 Whitin[11]은 동적 계획법을 통해 확정적 수요를 가지는 문제를 풀었다. Zangwill[13]은 Wagner 와 Whitin[11] 모형에서 재주문을 허용하는 모형으로 연구를 발전시켰으나 생산용량 제약을 고려하진 못했다. 또한, Zangwill[14]은 다품목과 다설비의 생산재고 문제를 연구했다. Sung 과 Chang[8]은 다품목을 생산하는 단일설비의 생산능력을 고려한 모형을 전개했고, Florian 과 Klein[2]은 Zangwill[13]의 연구를 생산설비의 용량제약을 가지는 모형에 적용했다. 다른 많은 연구[3,4,5,8,9,10]에 의해 Florian 과 Klein[2]의 모형은 다품목, 그리고 비용구조와 용량제약 형태에 대해 서로 다른 요소를 고려한 모형으로 확장되었다.

확률적 수요를 가지는 생산계획 모형 연구에 있어서 Askin[1]은 생산능력 제약을 고려하지 않고, 최소기간 비용법에 의한 로트 크기 선택방법에 관한 모형을 연구하였다. Whybark 과 Williams[12]는 수요와 공급에 있어 발생하는 시기와 양의 불확실성을 고려하였으며, Silver [7]는 확률적이고 시간에 따라 변하는 수요형태를 갖는 모형의 로트 크기 문제를 다루었으며, 기간당 최소기간 비용을 갖는 주기 T 와 그 주기 동안의 수요를 바람직한 서비스 수준을 만족하도록 로트 크기를 선택하는 세단계의 절차를 제시하였다. Nevison 과 Burstein[6]은 수요가 확률적 조달기간을 가지는 모형을 연구하였으며, 최적 생산계획을 찾기 위한 동적계획 해법을 개발하였다.

본 연구에서는 Askin[1]이 제시한 모형에 부가하여 생산능력의 제한이 있는 경우에서의 최소의 비용으로 1회의 발주에 의하여 충족시킬 수 있는 주기수와 생산 로트 크기를 결정하는 생산-재고모형을 제시하고자 한다.

2. 모형의 전개

2-1. 확률적 수요 모형

(1) Calender time 은 동일한 단위 주기로 나눈다.

제품은 조달기간 경과후 기초에 입고된다.

(2) 조달기간(Lead time) L 은 알려져 있고 일정하다.

(3) 각 기의 수요는 동적이고 정규분포에 따른다. 각 기간의 수요의 분포는 독립적이며, 각 기간의 수요의 기대치, 분산 등은 알려져 있다.

(4) 각 기에 생산할 수 있는 생산용량 C 는 한정적이고 일정하다.

(5) 수요에 미치지 못하는 양은 재주문(Backlogging)되지 않고, 판매기회 손실(Lost sales)로 취급한다.

2-2. 기호의 정의

A : 고정된 생산준비 비용

C : 주기당 생산용량

$f(D: r, t_1, t_2)$: 고찰점(review point) r 에서 발주되어 t_2기 초에 입고될때 주기 t_1부터 t_2까지의 평균 $\mu(t_1, t_2)$, 표준편차 $J(t_1, t_2)$를 갖는 수요의 확률밀도 함수, $t_1 = t_2$이면 (t_1, t_2)는 t_1으로 정의한다.

$F_t(X) = \int_0^X f(D: 1-L, t_1, t_2)dD$: 수요의 누적분포 함수

$K(R,\ T)$: 재고 수준을 R로 했을때 T기까지 발생한 총비용

L : 기지의 조달기간

W : 초기 재고

$Q=R-W$: 발주량

R : 재고수준("order-up-to" level)

T : 한번의 발주에 의해 수요를 충족시킬 수 있는 주기 수

h : 단위당 주기당 재고 보관비용

π : 단위당 주기 재고부족 비용

$\phi(x)$: 표준 정규분포 함수

2-3. 모형의 전개

현재의 시간은 -L이며, 고찰점(review point)이다. 문제의 시간 순서는 Fig. 1과 같다. 기간동안의 수요를 충족시키기 위하여 R-W만큼 발주한다면 기대비용은

$$E[K(R,T)]=A+h\cdot\Sigma_{t=1}^{T}\int_{0}^{R}(R-D)\cdot f(D:1\text{-}L,1,t)\,dD+\pi\cdot\Sigma_{t=1}^{T}\int_{R}^{\infty}(D-R)\cdot f(D:1\text{-}L,1,t)\,dD \quad\cdots\cdots(1)$$

이 최소기간 비용법(least period cost procedure)는 $E[K(R^*,\ T)]/T$가 감소하지 않을 때까지 T를 증가시킨다. R^*는 주어진 T에서 식(1)을 최소화 하는 R의 값이다. 식(1)은 볼록함수(convex function)이므로 미분하여 0로 두면

$$\frac{E[K(R,T)]/T}{\delta R}=T^{-1}\Big[-T\pi+(h+\pi)\ \Sigma_{t=1}^{T}\int_{0}^{R}f(D;1\text{-}L,1,t)\Big]dD \quad\cdots\cdots(2)$$

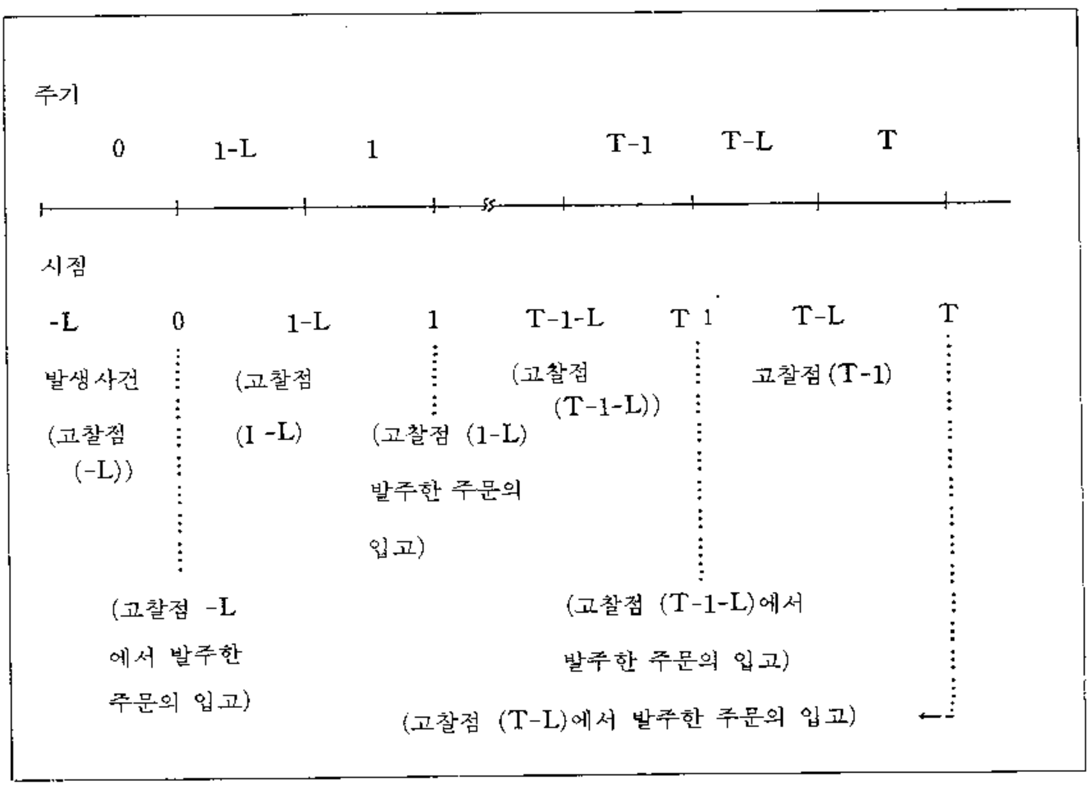

Fig. 1. 사건의 시간순서

$$F(R^*)=\Sigma_{t=1}^{T} F_t(R^*)=\frac{T\cdot\pi}{h+\pi} \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

식(3)을 풀어쓰면

$$F(R^*)=\Sigma_{t=1}^{T} F_t(R^*)=\Sigma_{t=1}^{T} \int_{0}^{R^*} f(D\,;\,1\text{-}L, 1, t)\,dD \quad \Sigma_{t=1}^{T} Pr(D\le R^*)$$

$$=\Sigma_{t=1}^{T} \; Pr \; \left(\frac{D-\mu_{(1,t)}}{\sigma_{(1,t)}} \le \frac{R^*-\mu_{(1,t)}}{\sigma_{(1,t)}}\right)$$

$$=\Sigma_{t=1}^{T} \; Pr\left(\frac{D-\mu_{(1,t)}}{\sigma_{(1,t)}} \le k_t\right)$$

$$(\text{단},\; k_t=\frac{R^*-\mu_{(1,t)}}{\sigma_{(1,t)}})$$

즉, $F_t(R^*)$는 재고수준을 R^*로 하였을 때, t 기까지의 누적수요를 만족하는 충족율을 의미한다.

많은 경우에 수요는 정규분포로 근사화 될수 있다. 수요를 정규분포에 근사시키면 다음과 같다.

$$\int_{R}^{\infty} (D-R)*f(D\,;\,1-L, 1, t)\,dD$$
$$=\sigma_{(1,t)} * G(k)$$

여기서 G(k)는

$$G(k)=\int_{k}^{\infty} (Z-k)\cdot\phi(z)\,dZ \; \int_{k}^{\infty} (Z-k) \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-Z^2-/2)\,dZ$$

이다.

그러므로, 식(1)은 식(4)와 같이 변형된다.

$$E[K(R,T)]/T = T-1[A+h(RT-\Sigma_{t=1}^{T}\mu_{(1,t)})$$
$$+(h+\pi)\cdot\Sigma_{t=1}^{T}(h+\pi)\;\Sigma_{t=1}^{T} G\,(K_t)\cdot\sigma_{(1,t)}]$$

여기서

$$\mu_{(1,t)}=\Sigma_{i=1}^{T}\mu_i$$

$$\sigma_{(1,t)}=\sqrt{\Sigma_{i=1}^{T}\sigma_i^2}$$

$$K_t=\frac{R^*-\mu_{(1,t)}}{\sigma_{(1,t)}}$$

이다.

T=1일때 식(3)에 의해 R^*를 풀고, 식(4), (5)에 의해 단위 기간당 평균비용의 기대치를 구한다. T=2로 놓고 식(3), (4), (5)를 푼다. 이 절차를 E[K(R, T)]/T 가 증가할 때까지 계속한다. 이때 단위 기간당 평균비용의 기대치가 증가하기 바로 전의 T와 R^*를 선택한다.

식(3)은 t<T인 경우에 많은 항들의 합이 1에 접근하기 때문에 해를 구하기 간편하다.

주문시기에 대한 접근의 한 방법으로서는 발주하지 않을때 1기에 발생하는 비용과, 발주했을때 주기당 발생하는 평균비용을 비교하였다. 주기당 평균비용이 발주하지 않을때의 비용보다 크다면 고칠점에서 발주하지 않는다. 발주하지 않을때 1기에 발생하는 평균비용은

$$E[K(0,1)]=\pi\int_{W}^{\infty}(D-W)f(D\,;\,1-L, 1)\,dD$$
$$+h\int_{0}^{W}(W-D)f(D\,;\,1-L, 1)\,dD \quad \cdots\cdots (6)$$

이다. 수요가 정규분포를 할때 식(6)은

$$E[k(0,1)]=h(w-\mu_1)+(h+\pi)\cdot\sigma_1\cdot G(K_1) \cdots\cdots\cdots\cdots (7)$$

로 나타낼수 있다. 여기서

$$k_1=\frac{W-\mu_1}{\sigma_1} \cdots\cdots\cdots\cdots (8)$$

이다.

2-4. 생산능력 제한 모형

본 절에서는 앞서 전개된 Askin[1]의 확률적 수요 모형에 부가하여 생산능력에 제한이 있는 경우의 생산-재고 모형을 전개하고자 한다.

위에서 구한 최적의 발주량 Q^* $(=R^*\text{-}W)$가 생산용량 보다 적을 경우에는 Q^*를 발주할

수 있지만, Q^*가 생산용량 보다 클 경우($Q^* > C$)에는 부가적인 비교절차가 필요한 바 이에는 각 기간당 평균비용 기간법을 이용하여 다음과 같은 절차가 제시되어질 수 있다.

(1) R^*-W의 값을 비교한다.

(2) 생산량 Q^*가 생산능력 C보다 작은 값을 갖는 것중 가장 큰 주기 T를 T'로 한다.

(3) $E[K(R^*, T')]$와 $E[K(C+W, T')]$의 값을 계산한다.

(4) 위의 두 값을 비교한다.

여기에서

$$E[K(C+W, T'+1)] = A + h \sum_{t=1}^{T'+1} \int_0^{C+W} (C+W-D) f(D ; 1-L, 1, t) dD + \pi \sum_{t=1}^{T'} \int_{C+W}^{\infty} (D-C-W) f(D ; 1-L, 1, t) dD$$

주기당 평균비용은

$$T^{-1} E[k(C+W ; T'+1)] = T^{-1} [A + h\{(C+W) \cdot (T'+1) - \Sigma_{t=1}^{T'+1} \mu_{(1,t)}\} + (h+\pi) \Sigma_{t=1}^{T'+1} G(k_t) \cdot \sigma_{(1,t)}$$

와 같이 나타낼 수 있으며,

$$K_t = \frac{(C+W-\mu_{(1,t)})}{\sigma_{(1,t)}}$$

이다.

3. 수치 예제

최소의 기간비용법을 이용하는 절차를 보이기 위하여 Askin의 비용함수를 다룬다. 비용함수의 데이타는 Table 1과 같다.

계산의 편의를 위하여 조달기간을 0으로 하고, 각 기간의 수요는 Table 2와 같이 변경하였다. 정규분포의 특성에 의해 해당 기간까지의 누적확률 밀도함수는 Table 3과 같다.

Table 1. Askin's Data

W	=	98 units
h	=	\$ 0.5units/period
A	=	\$ 48
π	=	\$ 12/unit/period

Table 2. Probability Distribution Function of Demand

PERIOD	1	2	3
DEMAND	N(94,18.8**2)	N(46,24.9*2)	N(90,33.8**2)

Table 3. Cummulative Distribution Function of Demand

DERIOD	1	2	3
DEMAND	N(94,18.8**2)	N(140,31.2**2)	N(230,46.0**2)

최소기간 비용법을 적용하는 절차를 보이기 위하여 위의 예를 풀어보면 아래와 같다.

3-1. 생산을 하는 경우

(1) T=1일때

$F(R^*) = 12/(0.5+12) = 0.96$

$F(R^*)$는 재고수준이 R^*일 때의 수요의 충족수준을 나타내고, k는 그 충족수준을 만족시키기 위한 안전계수를 나타내므로 $F(R^*)=0.96$은 R^*로써 수요의 96%를 만족함을 의미하며, 그때의 안전계수 K_1는 정규분포표에 의하여 1.75이다.

$K_1 = 1.75$

$R^* = 94 + 1.75 * 18.8 = 127$

$Q^* = R^* - W = 127 - 98 = 29$

$G(1.75)=0.016174$

$K/T=[48+0.5(127-94)+12.5*G(1.75)*18.8]=68.3$

(2) T=2일 때

$F(R^*)=F_1(R^*)+F_2(R^*)=(T*12)/(0.5+12)=1.92$

T 보다 작은 주기 t(T>t)에서는 수요의 충족 수준이 1에 접근하므로 1기에서는 1로, 2기에서는 0.92로 근접한다.

$F(R^*)=0.92$이므로 그때의 안전계수 $K_2=1.41$이다.

$K_2=1.41$

$R^*=140+1.41*31.2=184$

$Q^*=184-98=86$

R^*를 184로 함으로써 1기의 수요 충족수준은 1에 근접하며, 그때의 안전계수는

$K_1=(184-94)/18.8=4.78$

$G(4.78)\approx 0$

$G(1.41)=0.035868$

$K/T=1/2[48+0.5(184*2-140-94)+12.5\{G(4.78)*18.8+G(1.41)*31.2\}]=64.5$

(3) T=3일 때

$F(R^*)=F_1(R^*)+F_2(R^*)+F_3(R^*)=(T*12)/(0.5+12)=2.88$

1기와 2기의 충족수준이 각각 1에 근접하므로 3기의 충족수준은 $F(R^*)$는 0.88로 접근하며, 그때의 안전계수는

$K_3=1.18$이다.

$R^*=230+1.18*46=285$

$Q^*=285-98=187$

$$K_2=\frac{R^*-\mu(1,2)}{\sigma(1,2)}=4.68$$

$$K_1=\frac{R^*-\mu_2}{\sigma_1}=10.16$$

$G(1.18)=0.058443$

$G(10.16)\approx 0$

$G(4.68)\approx 0$

$K/T=1/3[48+0.5(285*3-94-140-230)+12.5*\{G(10.16)*18.8+G(4.68)*31.2+G(1.18)*46\}]$

$=92.37$

3-2. 생산을 하지 않는 경우

$K_1=(98-94)/18.8=0.213$

$E[K(0,1)]=0.5(98-94)+12.5*18.8*G(0.213)=72.7$

기간당 평균비용으로 볼때 생산을 하는 것이 유리하고, 한번의 생산으로 T=2기까지의 수요를 충족시키는 것이 가장 유리하다.

Askin[1]이 제안한 최소기간 비용법에 의하여 한번의 생산으로 2기까지 충족될 수 있도록 $Q^*=86$ 단위를 생산하는 것이 최적이나 생산용량의 한계 때문에 최대 50단위 이상을 생산할 수 없다. 그러므로 50단위를 생산하여 2기까지를 충족할 것인질, 혹은 29단위만 생산하여 1기만을 충족할 것인지를 비교해 보아야 한다. 최대 생산능력인 50단위를 생산하여 2기까지의 수요를 충족할때의 각 기간당 평균비용은 아래와 같다.

T^{-1} $E[K(148,2)]=1/2[48+0.5\{148*2-94-140\}+12.5*\{G(2.87)*18.8+G(0.2564)*31.2\}]=94.6$

그러므로, 생산용량인 50단위를 생산하여 2기까지를 충족하는 것보다 29단위를 생산하여 1기만을 충족시키는 것이 비용이 적게 든다.

위의 예제에서는 조달기간 L을 고려하지 않았으나 만일 이를 고려한다면 1-L 기에 29단위를 생산하여야 한다.

4. 결 론

동적 확률적 수요를 갖는 보형에서 최적인 로

트 크기를 결정하는 문제는, 확정적 수요를 갖는 경우에 동적계획법을 사용한 Wagner-Whitin 알고리즘과는 달리 안전재고를 구해야 하므로 계산시간이 많이 걸린다. 그러나, 최소기간 비용법의 적용에 있어서는 각 기간마다의 바람직한 안전재고량이 자동적으로 고려되므로, 안전재고를 고려하기 위하여 필요한 계산절차 및 노력이 감소되어진다. 많은 경우 생산능력의 제한이 있는바 이를 고려하는 것이 보다 현실적인 생산-재고 모형에 접근할 수 있을 것이다.

본 논문에서는 1회의 생산으로 충당되어지는 기간수와 로트 크기를 구하기 위하여 order-up-to 정책을 사용하여 이를 최소기간 비용법과 결합함으로서 위에서 제기된 생산능력 제한에 대한 문제를 해결코자 하였다. 따라서 최소기간 비용법만을 사용한 경우보다 생산능력을 최대한 이용할 수 있다. 예제에서 나타난 바와 같이 Askin의 모형보다 로트 크기가 감소한 이유는 생산능력의 제한을 고려한 것으로 풀이되며, 계산절차 역시 간단하므로 소형 계산기로도 문제해결이 가능하다.

참고문헌

1. Askin, R.G., "A Procedure for Production Lost Sizing with Probabilistic Dynamic Demand", *AIIE Transactions,* Vol. 13, No. 2, pp.132-137, June, 1981.
2. Florian, M. & Klein, M., "Deterministic Production Planning with Concave Costs and Capacity Constraints", *Management Science,* Vol. 18, No. 1, pp. 12-20, September, 1971.
3. Jagannathan, R. & Rao, M.R., "A Class of Deterministic Production Planning Problems", *Management Science,* Vol. 19, No. 11, pp.1295-1300, July, 1973.
4. Lambert, A.M., & Luss, M., "Production Planning with Time-Dependent Capacity Bounds", *European Journal of Operational Research,* Vol. 9, No. 3, pp. 275-280, March, 1982.
5. Love, S.F., "Bounded Production and Inventory Models with Piecewise Concave Costs", *Management Science,* Vol. 20, No. 3, pp.313-318, November 1973.
6. Nevison, C., & Burstein, M., "The Dynamic Lot-Size Model with Stochastic Lead Time", *Management Sicence,* Vol. 30, No. 1, pp.100-109, January, 1984.
7. Silver, E., "Inventory Control under Probabilistic Time-Varying, Demand Pattern", *AIIE Transactions,* Vol. 10, No. 4, pp.371-379, December, 1978.
8. Sung, C.S., & Chang, S.H., "A Capacity-Constrained Single-Facility Multi-Product Production Planning Model", *Journal of the Operations Research Society of Japan,* Vol. 29, No. 3, pp.232-245, September, 1986.
9. Sung, C.S., & Rhee, J.T., "A Dynamic Production Scheduling Model with Lost-Sales and Backlogging", *Computers and Operations Research,* Vol. 14, No. 2, pp.163-171, June, 1987.
10. Swoveland, C., "A Deterministic Multi-Period Production Planning Model with Piecewise Concave Production and Holding Backorder Cost", *Management Science,* Vol. 21, No. 9, pp.1007-1013, May, 1975.
11. Wagner, H.M., & Whitin, T.M., "Dynamic Version of The Economic Lot Size Model", *Management Science,* Vol.

5, No. 1, pp.89-96, October, 1958.

12. Whybark, D.C. & Williams, J.G., "Material Requirements Planning under Uncertainty", *Decision Science,* Vol. 7, No. 3, pp.595-606, October, 1976.
13. Zangwill, W.I., "A Deterministic Multi-Period Production Scheduling Model with Backlogging", *Management Science,* Vol. 13, No. 1, pp.105-119, September, 1966.
14. Zangwill, W.I., "A Deterministic Multi-Product, Multi-Facility Production and Inventory Model", *Operations Research,* Vol. 13, No. 3, pp.486-509, September, 1966.