

# 도파관 내의 음파산란 해석에 있어서 Helmholtz 방정식의 정적 한계에 관한 연구

정 현 교\* · 최 경\*\*

**On the static limit of Helmholtz equation  
for the acoustic wave scattering in a waveguide**

**Hyun - Kyo Jung , Kyoung Choi**

---

## ABSTRACT

In this paper, the static limit of Helmholtz equation is discussed in the analysis of acoustic wave scattering in a waveguide. Boundary integral equation method is used to formulate the scattering process in the exterior of the scatterer and finite element method in the interior of the scatterer. And hybrid Ray-Mode Method is used to provide the Green's function of the waveguide.

The proposed algorithm is applied to a sample problem with arbitrary scatterer in a waveguide. The results are compared with those of Laplace's equation which is the governing equation in the static problems.

---

## 1. 서 론

도파관 내의 임의의 산란자에 의한 음파산란 문제는 매우 중요한 연구 분야이다. 일반적으로 이 문제는 매우 복잡하므로 넓은 범위의 파라메타에 대해 만족할만한 해를 얻을 수

있는 어떤 단일 해법은 없다. 따라서 여러 해법의 장점을 결합시키는 혼합법을 찾는 것이 바람직하다. <sup>1) - 7)</sup> 그 하나의 방법으로서 문제를 적분방정식으로써 공식화하는 것이다. <sup>8)</sup> 이때 전체 시스템을 양분시키는 공유면을 산란자 표면으로 취한다. 각 영역의 그린함수는

---

\* 강원대학교 전기공학과 부교수

\*\* 강원대학교 전자공학과 전임강사

그 영역의 파동특성을 지배한다. 그린정리를 이용하면 산란자 표면의 파동변수를 미지 함수로 하는 적분방정식을 얻을 수 있다. 이 미지 함수를 적당한 근사함수로써 표현하면 적분방정식을 이산화시킬 수 있고 그 해를 수치적으로 구할 수 있다.

문제를 적분방정식에 의해 공식화 하려면 먼저 그린함수를 알아야 한다. 그린함수를 얻기 위하여 지금까지 동적문제 (dynamic problem)에 대해서는 스펙트럴 적분법, Ray 및 모드법 등이 이용되었고 정적문제 (Static Problem)에 대해서는 영상 또는 모드법이 이용되었다. 그러나 이들 방법들은 각각 어떤 특정 파라메타에 대해서만 잘 적용될 수 있다. 이 방법들은 서로의 단점을 보완하는 특성들을 갖고 있다.

본 논문에서는 동적문제에 대해서는 Ray 및 모드법을, 그리고 정적문제에서는 영상 및 모드법을 혼합시키는 알고리즘을 각각 도입하여 그린함수를 구하였다.<sup>8)</sup> 산란자 표면의 파동변수를 이산화시켜 경계적분법을 사용하여 산란자 외부의 산란과정을, 그리고 유산요소법을 이용하여 산란자 내부의 산란과정을 공식화 하였다. 동적문제를 정적문제로서 모델링할 수 있는 파라메타의 범위를 조사하기 위하여, 정적문제의 결과와 파라메타의 변화에 따른 Helmholtz 방정식의 결과를 비교하였다.

## 2. 경계적분법 적용

그림 1. 에서와 같이 산란자를 포함하고 있는 동적 도파관 문제 해석은 다음의 2 차원 Helmholtz 방정식의 해를 적당한 경계조건에 대해 찾는 것이다.

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2\right) \phi(\underline{r}) = -s(\underline{r}') \quad (1)$$

$$\underline{r} = (x, z), \quad \underline{r}' = (x', z')$$

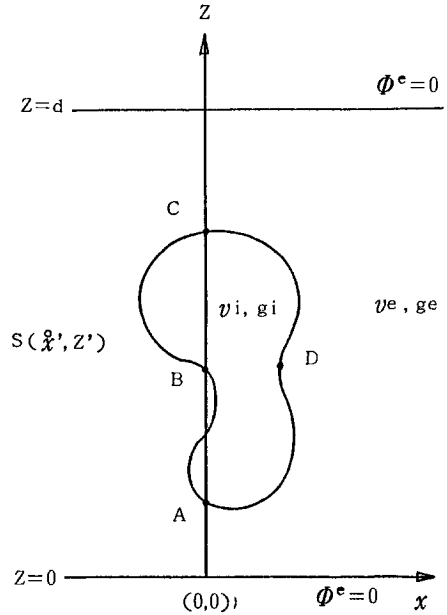


Fig. 1 A waveguide with scatterer

여기서,  $k$ 는 파동수,  $s(\underline{r}')$ 은 파동원,  $\phi$ 는 음압을 나타낸다. 시간항으로  $e^{j\omega t}$ 를 가정한다. 식(1)은 정적문제인 경우는 파동수( $k$ )가 있는 항이 없어진다.

그린정리를 이용하면 산란자 외부에 대해서

$$\sum_{l=1}^L \int_{B_l} \frac{\partial}{\partial n} \phi_l^e(\underline{r}) g^e(\underline{r}, \underline{r}_B) d\underline{r}_B - \int_{B_1} \phi_l^e(\underline{r}) \frac{\partial}{\partial n} g^e(\underline{r}, \underline{r}_B) d\underline{r}_B + \int_{V^e} s^e(\underline{r}') g^e(\underline{r}, \underline{r}') dV(\underline{r}') = \begin{cases} \phi^e(\underline{r}) & \underline{r} \in V^e \\ \frac{1}{2} \phi_j^e(\underline{r}) & \underline{r} \in B_j, \quad j = 1, 2, \dots, L \\ 0 & \underline{r} \in V_j^i \end{cases} \quad (2)$$

을 얻을 수 있다. 여기서,  $B_l$ ,  $V_l^i$  및  $V_l^e$ 는 각각  $l$ 번째 산란자의 경계, 내부 및 외부를 나타낸다. 그리고  $L$ 은 산란자의 갯수이다.

$\underline{n}$ 는 경계에서의 단위 수직벡터이고  $g^e$ 는 산란자가 없는 경우의 도파관의 그린함수이다.

산란자의 표면을 이산화하면 식(2)는 다음과 같은 매트릭스 대수방정식으로 된다.

$$\sum_{l=1}^L \left\{ \begin{matrix} [G_{jl}^e]_{M_l \times M_l} [\Psi_l^e]_{M_l \times 1} \\ [H_{jl}^e]_{M_l \times M_l} [\Phi_l^e]_{M_l \times 1} \end{matrix} \right\} = [S^e]_{M_l \times 1} \quad (3)$$

여기서,  $\Psi_{ml}^e = \frac{\partial}{\partial n} \phi_l^e(\underline{r}_{ml})$ ,

$$\Phi_{ml}^e = \phi_l^e(\underline{r}_{ml}),$$

$$S_{ml}^e = \int_{V_e} S^e(\underline{r}') g^e(\underline{r}_{ml}, \underline{r}') dv(\underline{r}')$$

$$G_{im, jl}^e = \int_{\Delta B_{ml}} g^e(\underline{r}_{ij}, \underline{r}') dB(\underline{r}')$$

$$H_{im, jl}^e = \int_{\Delta B_{ml}} \frac{\partial}{\partial n} g^e(\underline{r}_{ij}, \underline{r}') dB(\underline{r}'),$$

$im \neq jl,$

$$f_{\Delta B_{ml}} \frac{\partial}{\partial n} g^e(\underline{r}_{ij}, \underline{r}') dB(\underline{r}') + \frac{1}{2},$$

$im \neq jl$

$$m = 1, 2, \dots, M_l,$$

$$l = 1, 2, \dots, L,$$

$$i = 1, 2, \dots, M_j,$$

$$j = 1, 2, \dots, L,$$

그리고  $\underline{r}_{jm}$ 은  $m$ 번째 산란자의 경계에서  $j$ 번째 경계요소  $\Delta B_{jm}$ 의 중점이고,  $M_l$ 은  $l$ 번째 산란자의 경계요소수이다.

### 3. 유한요소법 적용

산란자의 내부를 소영역으로 세분하면  $l$ 번째 산란자의  $E$ 번째 요소내에서 파동변수의 근사

해  $\tilde{\Phi}_{E_l}$ 를 가정하면 오차  $R_{E_l}$ 가 생긴다. 즉,

$$R_{E_l} = \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right] \tilde{\Phi}_{E_l} + S_{E_l},$$

$$E = 1, 2, \dots, M_l,$$

$$l = 1, 2, \dots, L. \quad (4)$$

여기서  $M_l$ 은  $l$ 번째 산란자 내의 요소수이다. 그리고  $\tilde{\Phi}_{E_l}$ 은 다음과 같이 정의될 수 있다.

$$\tilde{\Phi}_{E_l}(\underline{r}) = \sum_j N_{jl}(\underline{r}) \phi_{jl} \quad (5)$$

여기서  $N_{jl}$  및  $\phi_{jl}$ 은 각각  $j$ 번째 정점에서 보간함수 및 파동변수 값이다.

$\tilde{\Phi}_{E_l}$ 을 구하기 위해 가중잔차법을 적용하면,

$$0 = \sum_{l=1}^L \sum_{E=1}^{M_l} \int_{V_{E_l}} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \tilde{\Phi}_{E_l}}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial \tilde{\Phi}_{E_l}}{\partial z} - k^2 w \tilde{\Phi}_{E_l} - w S_{E_l} \right) dv + \sum_{l=1}^L \oint_{B_l} W \frac{\partial \tilde{\Phi}_{E_l}}{\partial n} dB \quad (6)$$

을 얻는다. 식(6)에서 오른쪽 두번째항은 경계요소에 대해서만 존재한다. 즉,

$$\sum_{l=1}^L \sum_{i=1}^{J_l} \left( \int_{\Delta B_{il}} W \frac{\partial \tilde{\Phi}_{E_l}(\underline{r}_i)}{\partial n} d\mathbf{r}_B \right) \quad (7)$$

여기서  $J_l$ 은  $l$ 번째 산란자의 경계요소수이다. 본 논문에서는 Galerkin 법을 사용하였으므로

$$W = N_{jl}, \quad j = 1, 2, \dots, J_l$$

이다. 여기서  $J_l$ 은  $l$ 번째 산란자의 정점수이다. 식(6)을 매트릭스 방정식으로 표현하면 다음과 같다.

$$E_l \Phi_l + F_l \tilde{\Psi}_l = S_l, \quad l = 1, 2, \dots, L \quad (8)$$

여기서,  $\Phi_l = [\phi_{jl}]_{J_l \times 1}$ ,  $j=1, 2, \dots, J_l$ ,

$$\tilde{\Psi}_l = \left[ \frac{\partial}{\partial n} \tilde{\phi}(\underline{r}_{jl}) \right]_{J_l \times 1}, \quad i=1, 2, \dots, I_l,$$

$$S_l = [S_{jl}]_{J_l \times 1},$$

$$S_{jl} = \sum_E \int_{V_{E_l}} N_j S_{E_l} dv, \quad j=1, 2, \dots, J_l,$$

$$E_l = [E_{ij, l}]_{J_l \times J_l}$$

$$E_{ij, l} = \sum_E \int_{V_{E_l}} \left[ \frac{\partial N_{il}}{\partial x} \frac{\partial N_{jl}}{\partial x} + \frac{\partial N_{il}}{\partial z} \frac{\partial N_{jl}}{\partial z} - k^2 N_{il} N_{jl} \right] dv,$$

$$F_l = [F_{ij, l}]_{J_l \times J_l},$$

$$F_{ij, l} = \int_{\Delta B_{jl}} N_i dr_B$$

#### 4. 혼합적용 알고리즘

식 (9), (10)의 산란자 표면에서의 경계조건을 이용하면 식 (3)과 (8)을 결합시킬 수 있다.

$$\phi_i^e(\underline{r}) = \tilde{\phi}_i(\underline{r}), \quad (9)$$

$$\frac{1}{\rho^e} \frac{\partial}{\partial n} \phi_i^e(\underline{r}) = \frac{1}{\rho_i} \frac{\partial}{\partial n} \tilde{\phi}_i(\underline{r}), \quad \underline{r} \in B_i, \quad (10)$$

여기서  $\rho^e$ 와  $\rho_i$ 은 각각 산란자 내부 및 외부 매질의 밀도를 나타낸다. 먼저 식(8)을 산란자 경계 위의 정점과 내부점에 대한 것으로 분리시키면

$$\begin{bmatrix} E_l^{bb} & E_l^{bi} \\ \hline E_l^{ib} & E_l^{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_l^b \\ \Phi_l^i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_l^b \\ F_l^i \end{bmatrix} \tilde{\Psi}_l = \begin{bmatrix} S_l^b \\ \dots \\ S_l^i \end{bmatrix} \quad (11)$$

로 된다. 따라서 경계 위의 정점에 대한 것으로 정리하면 다음과 같이 된다.

$$Y_l \Phi_l^b + Z_l \tilde{\Psi}_l = \tilde{S}_l,$$

여기서,  $Y_l = E_l^{bb} - C_l^{bi} E_l^{ib}$ ,  
 $Z_l = F_l^b - C_l^{bi} F_l^i$ ,  
 $C_l^{bi} = E_l^{bi} (E_l^{ii})^{-1}$ ,  
 $\tilde{S}_l = S_l^b - C_l^{bi} S_l^i$ ,  
 $F_l^i = [0]$ .

(12)

경계적분법에서 유도된 식 (3)은 경계요소변의 중점에 대해 얻은 것이므로 식(12)와 변수를 일치시키기 위해서는 식 (3)의 변수 역시 경계 위의 정점에 대한 것으로 변경시켜야 한다. 즉

$$\tilde{H}_{m_l} \Phi_l^b + \tilde{G}_{m_l} \tilde{\Psi}_l = S_{m_l}^e$$

여기서,  $\tilde{H}_{m_l} = \frac{1}{2} H_{m_l}^e + H_{m_l}'$

$$H_{m_l}^e = [H_{l1}, H_{l2}, \dots, H_{lI_l}]$$

$$H_{m_l}' = [H_{lI_l}, H_{l1}, H_{l2}, \dots, H_{lI_l}]$$

$$\tilde{G}_{m_l} = G_{m_l}^e T_l,$$

$$T_l = [t_{ii, l}], \quad t_{ii} = \frac{\rho^e}{\rho_i}(\underline{r}_{il})$$

$$\tilde{\Psi}_l = (T_l)^{-1} \Psi_l^e$$

결과적으로, 식(12)와 (13)으로 부터 다음과 같은 시스템 방정식을 얻는다.

$$\begin{bmatrix} G_{11} & H_{11} & \tilde{G}_{12} & \tilde{H}_{12} & \dots & G_{1L} & H_{1L} \\ Z_1 & Y_1 & & & & & \\ & & \tilde{G}_{22} & \tilde{H}_{22} & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & G_{LL} & H_{LL} \\ & & & & & Z_L & Y_L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\Psi}_1 \\ \Phi_1^b \\ \tilde{\Psi}_2 \\ \Phi_2^b \\ \dots \\ \tilde{\Psi}_l \\ \Phi_l^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1^e \\ \tilde{S}_1 \\ S_2 \\ \tilde{S}_2 \\ \dots \\ S_l \\ \tilde{S}_l \end{bmatrix}$$

#### 5. 도파관의 그린함수

그린함수는 그림 1.에서의 경계조건  $g^e = 0$  ( $z=0, d$ 에서)를 만족하는 것으로서 다음 식 (15)의 해이다.

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) g^e(\underline{r}, \underline{r}') = -\delta(\underline{r} - \underline{r}')$$

$$\underline{r} = (x, z), \quad \underline{r}' = (x', z') \quad (15)$$

식(15)의 해는 스펙트럼 적분을 이용하면

$$g^e(\underline{r}, \underline{r}') = \frac{-1}{4\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{k} \frac{e^{iS(x-x')}}{1 + \exp(2ikd)}$$

$$[e^{ik(z-z')/2} - e^{ik(z+z')/2} + e^{ik(2d-(z+z')/2)} - e^{ik(2d-(z-z')/2)}] dS$$

이다. 여기서  $0.K = (k^2 - S^2)^{1/2}$  이다.

식(16)의 분모를 급수전개한 것으로 부터 Ray- 모드 항들을 구하면,

$$g^e(\underline{r}, \underline{r}') = \sum_{l=1}^4 \left( \sum_{n=0}^{N-1} g_{nl}^e(\underline{r}, \underline{r}') + R_{Nl}^e \right) + \sum_m g_m^e$$

로 된다. 여기서  $R_{Nl}^e$ 는 다음과 같다.

$$R_{Nl}^e = -\frac{1}{4\pi i s d p} \int \frac{A_{Nl}}{(\text{Hexp}(2ikd))} \exp(i((x-x') + kz_{Nl})) ds$$

여기서 SDP는 Steepest descent 경로를 의미한다.

## 6. 사례연구

그림 1. 과 같이  $Z=0$ 와  $Z=d$ 에서 무한평면으로 이루어진 도파관 내의 임의의 모양을 갖는 산란자가 존재하는 경우에 대해 제시된 알고리즘을 적용시켰다. 여기서 도파관의 크기는  $d = 40 [m]$ 이다. 매질밀도는 산란자 내부 및 외부에서 모두  $1 [kg/m^3]$ 로 가정하며 도파관 내의 음파속도는  $1,500 [m/sec]$ 로 한다. 그리고 산란자 내부에서의 음파속도는  $v_i = 1,500(x + 24) / 18 [m/sec]$ 인 함수로 준다. 그리고 주파수는  $f = 0, 9, 18 [Hz]$ 인 세가지 경우에 대하여 결과를 얻었다.

제시된 알고리즘이 정확한지 확인하기 위하여, 산란자 내부의 속도도  $1,500 [m/sec]$ 로 외부와 똑같이 주고  $f = 0$ 에 대해 얻은

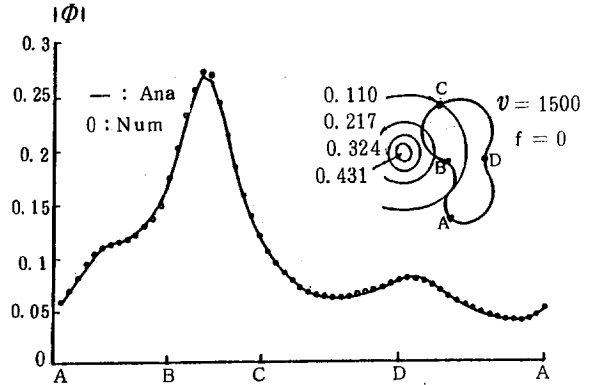


Fig.2  $\Phi$  on the surface of scatterer versus boundary nodes

결과와 도파관 그린함수의 값을 그림 2.와 같이 산란자 표면에서 비교하였다. 그림 2.에서 알 수 있듯이 두 결과는 잘 일치하고 있다. 그림 3.은 산란자 표면에서 세가지 주파수의 경우에 대한 음압의 크기를 비교한 것이다.  $f=0$ 에 대한 결과는 정적문제의 결과이다.

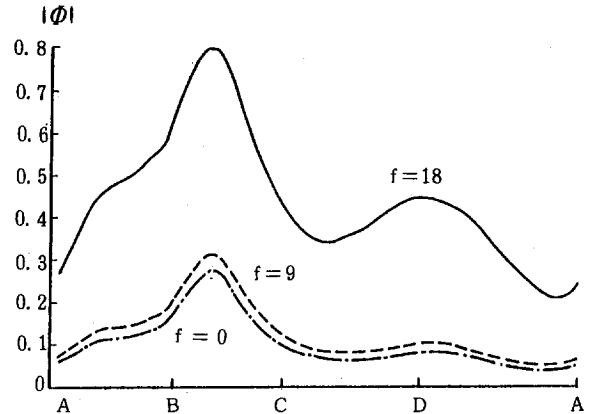


Fig.3  $\Phi$  on the surface of scatterer versus boundary nodes

그림 4.는 산란자 근처에서의 등음압선을 나타낸다. 그림 3, 4에서 알 수 있듯이  $f=0 [Hz]$  즉 파장이 약  $15 [m]$ 인 파동에 대해서는 정적문제의 결과와 거의 비슷한 결과를 보이고 있다. 이것은 음파의 파장이 도파관 크기의 약 절반 이상이면 동적문제를 정적문제로 모델링할 수 있다는 것을 제시해 준다.

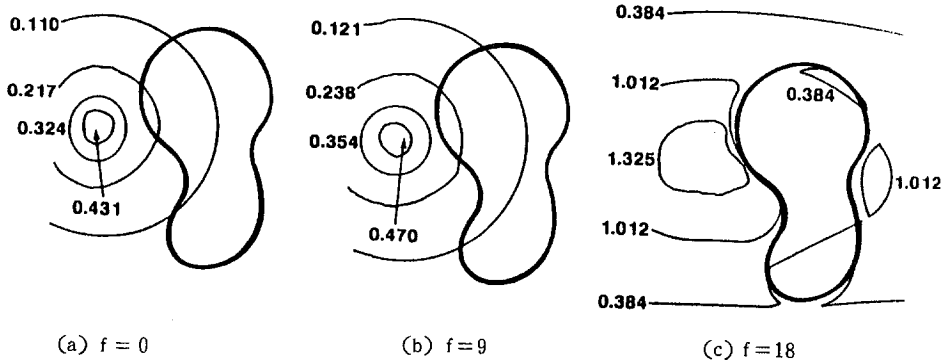


Fig.4 Amplitude contour of acoustic pressure

## 7. 결 론

본 논문에서는 도파관 내에서의 음파산란 문제의 지배방정식인 Helmholtz 방정식의 정적한계에 대해 검토하였다. 도파관의 그린함수는 Ray-모드 혼합법으로 구하였고, 산란자 표면의 산란과정을 경계적분법으로 공식화하고, 산란자의 내부 반응은 유한요소법을 사용하여 공식화 하였다.

도파관 내에 임의의 모양을 갖는 산란자가 존재하는 모델에 제시된 알고리즘을 적용 하였다. 본 알고리즘의 결과는 해석적인 해를 알 수 있는 파라메타를 사용하였을 경우 해석적인 해와 잘 일치하였다. 그리고 Helmholtz 방정식의 정적한계에 대해 검토한 결과, 도파관 크기의 약 절반 이상인 파장의 파동문제에 대해서는 정적 모델링이 가능함을 알 수 있었다.

## 참고문헌

1. L. B. Felsen and A. H. Kamel. "Hybrid ray-mode formulation of parallel

planewaveguide Green's functions," IEE E Trans. Antennas Propagat., Vol-29, No. 4, 637-649, 1981.

2. I. T. Lu, L. B. Felsen and A. H. Kamel, "Eigenreverberations, eigenmodes and hybrid combinations: a new approach to propagation in layered multiwavemedia," Wave Motion 6, 135-167 1984.
3. I. T. Lu and L. B. Felsen, "Ray mode and hybrid options for sources-excited propagation in an elastic plate," J. Acoust. Soc. Am., 78, 701-704 1985.
4. I. T. Lu and L. B. Felsen, "Matrix Green's function for array-type sources and receivers in multiwave layered media," Geophys. J. R. Astron. Soc., 84, 31-12, 1986.
5. I. T. Lu and L. B. Felsen, "Ray mode and hybrid Options for time-dependent source-excited propagation in an elastic layer." Geophys. J. R. astr. Soc., 80,

177-201 1986.

6. I. T. Lu, "Collective ray (beam) and hybrid ray-mode (beam-mode) method for source excited propagation in a multi-layered media." Progress in Electromagnetic Research Symposium, July 25-26, 1980, MIT, Cambridge, Massachusetts.
7. G. T. Schuster and L. Smith, "Modeling scatterers embedded media by a hybrid Haskell-Thompson and boundary integral equation," J. Acoust. Soc. Am., 78(4), 1387-1394 1985.
8. I. T. Lu, "Analysis of acoustic wave scattering by scatterers in layered media using the hybrid ray-mode-(boundary integral equation) method." submitted to J. Acoust. Soc. Am.