

소량의 기포를 함유한 이상유체 내에서의 압력파의 전파현상

Pressure Wave Propagation Phenomena in Water Containing Uniformly Distributed Gas Bubbles

김 동 혁*

(D. H. Kim)

요 약

기포 혼합 유체 내에서의 압력파의 전파 현상을 수치해석으로 연구한다. 혼합 유체 영역을 지배하는 지배 방정식을 heuristic 한 방법으로 유도하고 기포 내부 영역에는 연전달 효과를 고려할 수 있도록 에너지 방정식을 도입한다. 기포 내부의 이동은 조짐은 특히 기포가 고진폭을 가지고 진동할 때 매우 중요하니, 기포 역학 방정식으로서 Keller 방정식이 채택, 변형되어 기포 외부와 내부의 coupling을 맺어준다.

실제 문제로서 충격관내 충격파의 전파 현상을 수치해석 방법으로 해석한 결과가 Noordzij 및 van Wijngaarden의 실험 결과와 거의 일치한다. 그러나 그들에 의해 설명된 충격파 구조의 변화 원인은 가스와 액체 간의 상대 운동인데 이는 본 모델에서 고려되지 않았기 때문에 가스와 액체 간의 열전달에 의해 충격파의 구조가 변화된다고 보는 것이 타당하다.

ABSTRACT

Propagation phenomena of nonlinear pressure waves in a bubbly mixture are studied. The governing equations for a bubbly mixture are derived heuristically and energy equation is incorporated with other governing equations to take thermal effects into consideration inside the bubble. This non-isothermal condition of the bubble inside is especially important when high amplitude pressure waves are treated. Keller's equation is adapted for the bubble dynamics as practical problem. Some numerical simulations are carried out for the shock tube problem using a computer program based on the above model.

A comparison with experimental results of Noordzij and van Wijngaarden shows that the structure of the wave in the shock tube experiment seems to be much more significantly affected by the complex heat transfer phenomena inside the bubbles than by the relative translational motion between bubbles and surrounding liquid.

I. 서 론

기포 함유 유체(bubbly mixture)는 그 물리적 양상이 매우 복잡하여 최근에 와서야 비로소 그에 대한 평균화 지배 방정식(averaged equation)이 수학적 방법으로 유도 되었는데 이것도 오직 수량의 기포 함유 유체에서만 유효하다. 여기서 평균화라 함

* 한국표준연구소 음향연구실

이 경우 유체의 연속방정식에 기포에 의한 source term을 추가하여 지배방정식의 외부적 구조함으로써 기포의 팽창유체와 액체 연속체와 같은 장점을 갖도록 하는 데 지배적 source term 유체 전체에 균일하게 적용된을 타명한다. 이 평균화 지배방정식은 소량의 기포 함유 유체 및 작은 size의 기포를 함유한 유체에서 유효하지만 비선형도가 큰 기포의 운동에 적합하지 않게 널리 쓰이고 있다. 이 문제를 다루기 위해서는 먼저 혼합 유체, 기포 내부, 기포의 dynamic behaviour를 각각 분리하여 분석하는 것이 편리하다. 먼저 혼합 유체를 지배하는 방정식에는 연속방정식과 운동방정식이 있는데 운동 방정식은 기존의 Euler 방정식을 채택하는 반면 연속방정식은 기포에 의한 void의 존재로 말미암아 source term이 부가되게 된다. 이 때 연속방정식에 기포의 반경 $R(x, t)$ 가 나타나게 되는데 이는 기포의 dynamics를 지배하는 기포역학 방정식(bubble dynamic equation)에 의해 구할 수가 있다. 현존하는 여러가지의 기포역학방정식 중 Keller에 의한 식이 액체의 압축성을 고려하고 있어 이를 채택하였다. 기포의 반경 $R(x, t)$ 는 개개의 기포 내부의 압력에 크게 의존하고 있기 때문에 먼저 기포의 내부압력을 정확하게 계산하는 것이 필요하다. 기포의 내부압력 p 는 기포가 미소진동할 때는 기포 내부 및 외부의 보존방정식을 선형화 시켜 구할 수 있으나 진동 폭이 커지면 analytic하게 구하는 것이 불가능하다. 따라서 이 때의 내부 압력 p 는 polytropic 관계식 $p = p_0 (R_0/R)^{2k}$ 를 이용하여 구하는 것이 관례였다. 여기서 k 는 polytropic index이다. 이 관계식은 비록 간단하기는 하나 많은 문제점을 내포하고 있다. 첫째로 polytropic index k 는 1부터(등온) 비열비까지(단열) 넓은 범위에 걸쳐 있기 때문에 일반적으로 적절한 값을 취하기가 곤란하다. 또한 이 관계식에 의하면 pdv 는 perfect differential이 되어 한 사이클을 적분하면 0이 된다. 따라서 이 관계식을 쓰면 개스의 가열 및 냉각에 이르는 에너지의 감쇠를 고려할 수 없게 된다. 실제로 thermal damping이 에너지 흡수 mechanism 중 가장 현저하다는 것을 선형이론으로부터 알 수 있기 때문에 전술한 사실은 이 관계식의 가장 큰 취약점이다. Flynn은 이 문제점을 해결하기 위해 에너지를

포함한 지배방정식들을 상이분방정식으로 변환하여 보았으나 결과는 아주 복잡한 식이었던 터이다. 그는 여기에 많은 기포와 분자처럼 사용하였다. 이를 해결하기 위해 Prosperetti는 기포 내의 압력파 위치에 관계없이 균일하다는 가정하에 정확한 모델을 이끌어 냈다. 이 가정은 기포 벽의 Mach number가 아주 작다는 사실에 기초한 것이다.

본 연구에서는 이러한 model을 사용하여 기포인 유체 유체 내에서의 비선형 압력파의 전파 현상을 탐구해 보고자 한다. 이를 위해서는 수치 해석이 필수적이고 따라서 지배방정식의 numerical model로의 변환 및 프로그래밍이 필요하다. 비선형의 경우의 해를 정확히 구하기 위해 second-order accuracy를 가진 numerical algorithm을 개발하여 이를 shock-tube 내의 압력파 전파현상 해석에 이용한다. 수치해석의 결과 비선형 효과, 충격파의 변천등을 비롯한 여러가지 흥미있는 양상을 볼 수 있었다. 특히 충격파의 변천에 대해서는 Noordij와 van Wijngaarden이 실험적으로 구한 것과 거의 동일한 결과를 얻었는데 그들이 파형변화의 원인이라고 주장하는 velocity relaxation은 본 연구의 경우 고려되지 않았으므로 다른 원인 즉 thermal relaxation이 파형변화에 더 중요한 역할을 담당하고 있다고 보아야 할 것이다.

II. 이론적 배경

먼저 본 연구에 사용된 model equation을 유체를 지배하는 기본 지배방정식으로부터 heuristic하게 유도해 보기로 한다. 이 모델에서 기포혼합유체(bubbly mixture)는 평균적인 관점에서 어떤 특정한 property를 가진 균질의 유체로 간주된다.

연속 방정식으로부터

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_m u) = 0 \quad (1)$$

여기서 ρ_m, u 는 혼합유체의 평균밀도 및 local velocity를 나타낸다. 개스의 volume fraction을 β 로 표시하면

$$\rho_m = (1 - \beta) \rho + \beta \rho_c \quad (2)$$

가 되고 $\rho_a \ll \rho$ 이므로

$$\rho_m = 1 - \beta \rho \quad (3)$$

가 된다. 여기서 subscript G는 개소를 나타낸다.

(3)을 (1)에 대입하면

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \nabla \cdot u = \frac{1}{1-\beta} \frac{d\beta}{dt} \quad (4)$$

여기서 $\beta \ll 1$ 로 가정하면(즉 small gas volume fraction) (4)식의 우항은 $d\beta/dt$ 가 된다. ω 와 λ 를 각각 (typical frequency 및 wavelength)라 하면

$$\frac{\partial \beta}{\partial t} \sim \omega \Delta \beta, \quad |\nabla \beta| \sim \Delta \beta / \lambda,$$

이고, 따라서

$$\frac{|u \cdot \nabla \beta|}{|\partial \beta / \partial t|} \sim \frac{|u|}{\omega \lambda} \sim \frac{|u|}{c_m} \quad (5)$$

이 된다. 여기서 C_m 은 mixture 내에서의 압력파의 전파속도이다. 여기서는 오직 small volume fraction만을 가정하고 있으므로 유체의 평균 속도 $|u|$ 는 압력파의 전파속도 C_m 과 비교해볼 때 무시할만하다. 따라서 d/dt 의 spatial part는 무시될 수 있어 $d\beta/dt \approx \partial \beta / \partial t$, 그리고 $d\rho/dt \approx \partial \rho / \partial t$ 가 된다.

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot u = \frac{\partial \beta}{\partial t} \quad (6)$$

관계식 $d\rho = c^2 dP$, 및 $\beta = \frac{4}{3} \pi R^3 (x, t) n$, (R : 기포 반경, n : 단위체적당 기포의 수)를 이용하면 (6)식은 다음과 같은 model equation이 된다.

$$\frac{1}{\rho c^2} \frac{\partial P}{\partial t} + \nabla \cdot u = 4 \pi n R^2 U \quad (7)$$

여기서 U 는 기포 벽의 속도를 나타내며 $U = \frac{\partial R}{\partial t}$,

이다. 운동방정식도 같은 방법으로 정리할 수 있다. 운동방정식

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_m u) + \nabla \cdot (\rho_m u u) = -\nabla P, \quad (8)$$

을 전개하여

$$c_m \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial P}{\partial t} \frac{1}{\rho_m} + \nabla \cdot (u u) - \nabla P, \quad (9)$$

식(1)을 이용하면

$$\rho_m \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_m u u) - u \nabla \cdot (\rho_m u) + \nabla P = 0, \quad (10)$$

u 가 아주 작기 때문에 u 의 제곱항은 무시하고 small gas volume fraction을 고려한다면 운동방정식은

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla P = 0, \quad (11)$$

위의 연립 편미분 방정식을 풀기 위해서는 기포 반경 R 에 관한 식이 필요하다. 근래 개발된 여러 가지의 기포역학 방정식 중 Keller의 방정식이 이 목적에 가장 적합하여 여기에서 사용기로 한다. 비록 이 방정식이 single bubble의 dynamics를 묘사하는 것이지만 평균 유체의 압력이 주어진 상태에서는 기포-혼합유체에 적용함에 있어서 무리가 없다. 이는 기포의 역학이 혼합유체의 평균 local pressure를 통해 기포외부의 액체와 coupling되기 때문이다. 이에 따라 변형된 Keller 방정식은

$$\left(1 - \frac{R_t}{c}\right) R R_{tt} + \frac{3}{2} \left(1 - \frac{R_t}{3c}\right) R \dot{R}^2 = \frac{1}{\rho} \left(1 + \frac{R_t}{c} + \frac{R}{c} \frac{d}{dt}\right) (p_B - P), \quad (12)$$

인데 c, p 는 각각 순수 액체에서의 음파의 속도, 유체내의 평균 local pressure를 나타낸다. 이때 기포 표면의 액체 압력 p_B 는 내부압력 p 와 다음과 같은 관계를 가진다.

$$p_B - p = \frac{2\sigma}{R} + 4\mu \frac{R_t}{R}, \quad (13)$$

여기서 σ 는 표면장력, μ 는 액체의 점도를 표시한다.

위에 설명한 기포역학은 기포의 내부압력 p 와 밀접한 관계가 있다. 내부압력 p 를 구하기 위한 지

배방장식을 다음과 같다.

$$\frac{d\rho_c}{dt} + \rho_c \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (14)$$

$$\rho_c \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{\partial p}{\partial \mathbf{r}} = 0, \quad (15)$$

$$\rho_c C_p \frac{dT}{dt} + \frac{T}{\rho_c} \left(\frac{\partial \rho_c}{\partial T} \right)_p \frac{dp}{dt} + \nabla \cdot (K \nabla T), \quad (16)$$

운동방정식 (15)의 각 항을 order of magnitude 방법을 이용하여 비교, 정리하면 간단히 $p = p(t)$ 로 대체된다. 이는 어느 한 기포의 내부압력이 기포내 어느곳에서나 동일하며 오직 시간 t 만의 함수라는 것을 의미한다. 식(14)와 (16)을 합하면 energy 방정식은 다음과 같이 된다.

$$C_p \frac{d}{dt} (\rho_c T) + \frac{T}{\rho_c} \left(\frac{\partial \rho_c}{\partial T} \right)_p \frac{dp}{dt} + \rho_c C_p T \nabla \cdot \mathbf{v} + \nabla \cdot (K \nabla T) \quad (17)$$

여기서 \mathbf{v} 는 기포내부의 속도장, K 는 기포내부기체의 열전도율을 나타낸다. 이상기체 관계식을 이용하면 식(17)은 다음과 같이 된다.

$$\frac{dp}{dt} + \nabla \cdot (\gamma p \mathbf{v} - (\gamma - 1) K \nabla T) = 0 \quad (18)$$

p 는 오직 시간만의 함수이므로 (18)식을 적분하고 기포표면에서의 경계조건 $\mathbf{v} = R_t$ 를 사용하면

$$p_t = \frac{3}{R} \left[(\gamma - 1) K \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_R - \gamma p R_t \right] \quad (19)$$

따라서 복잡한 편미분 방정식이 상미분 방정식으로 간단히 바뀌어졌다. 또한 식(17)의 에너지 방정식은 이상기체식을 도입하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\rho_c C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial T}{\partial \mathbf{r}} \right) - p_t = \nabla \cdot (K \nabla T), \quad (20)$$

여기서 Subscript t 는 시간에 대한 미분을 나타낸다.

III. 해석 방법

III-1. 지배 방정식의 무차원화

전장에서 유도한 비선형 연립 방정식들은 미소진

폭의 경우 즉 선형화가 가능한 경우를 제외하고는 analytic하게 풀기가 일반적으로 불가능하다. 따라서 이의 해를 구하려면 수치해석에 의존하지 않을 수 없다. 수치해석을 위해서는 혼합유체와 기포를 나누어서 생각할 필요가 있다. 혼합유체 장을 macroscopic field 그리고 기포내부의 장을 microscopic field라 칭하고 각각의 지배 방정식을 무차원화 한다. macroscopic field에서 특성 길이(characteristic length), 각진동수, 유체속도 등을 각각 L_c , ω_c 및 $\beta_0 \omega_c L_c$ 로 취하고 far field의 압력 P_0 를 기준압력으로 한다. 또한 기준 반경으로서는 기포의 equilibrium radius R 을 취하여 기포벽의 속도가 $\omega_c R_0$ 에 대해 무차원화 되도록 한다. 무차원화 된 변수들에 *를 첨가하여 연속 방정식과 운동방정식을 표시하면

$$\frac{\partial P_*}{\partial t_*} + \theta \frac{\partial u_*}{\partial x_*} = 3 \theta R_*^2 U_*, \quad (21)$$

$$\theta \frac{\partial u_*}{\partial t_*} + V^2 \frac{\partial P_*}{\partial x_*} = 0, \quad (22)$$

여기서

$$\theta = \frac{\rho c^2 \beta_0}{p_\infty}, \quad V = \frac{c}{\omega_c L_c}$$

Microscopic field에 대해서는 내부압력이 기포 내의 equilibrium pressure p_0 에 의해 무차원화 된다. 이에 덧붙여 τ 와 D 는 다음과 같이 무차원화 된다.

$$\tau = D_0 p_0 \tau_*, \quad D = D_0 D_*$$

여기서

$$D_0 = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{K(T_\infty) T_\infty}{p_0},$$

는 undisturbed thermal diffusivity를 나타낸다. 이 변수들을 사용하여 에너지 방정식은

$$\frac{\partial \tau_*}{\partial t_*} + \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{\chi}{p_* R_*^2} \left(\frac{\partial \tau_*}{\partial y} - \frac{\partial \tau_*}{\partial y} \Big|_{y=1} \right) \frac{\partial \tau_*}{\partial y} - D_* p_* \tau_* = \frac{\chi D_*}{R_*^2} \nabla^2 \tau_*, \quad (23)$$

이 되고 압력 방정식은 다음의 형태를 취한다.

$$p_{*t} = \frac{3}{R_*} \left[\gamma - 1 - \frac{\chi}{R_*} \frac{\partial x_{*t}}{\partial y} \right] \gamma p_{*t}^{*} \quad (22)$$

여기서

$$\chi = \frac{D_0}{\omega_c R_0^2}$$

Keller의 기포역학 방정식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} (1 - \Lambda U_*) R_* U_{*t} &= \frac{3}{2} \left(1 - \frac{\Lambda}{3} U_* \right) U_*^3 \\ &= Z \left(1 + \Lambda U_* + \Lambda R_* \frac{\partial}{\partial t_*} \right) (p_{B*} - \eta P_*) \end{aligned} \quad (23)$$

여기서

$$\Lambda = \frac{\omega_c R_0}{c}, \quad Z = \frac{p_0}{\rho \omega_c^2 R_0^2}, \quad \eta = \frac{p_\infty}{p_0}$$

또한 기포 내부압과 혼합유체의 local pressure 의 관계식은

$$p_* = p_{B*} + \frac{W}{R_*} + M \frac{U_*}{R_*} \quad (26)$$

이고 여기서

$$W = \frac{2\sigma}{\rho_0 R_0}, \quad M = \frac{4\mu}{\rho_0 \omega_c}$$

앞으로는 편의상 무차원화한 변수로 부터 *를 생략하기로 한다.

圖 - 2. Discretization

시간에 대한 적분을 하기 위해서는 먼저 trapezoidal rule을 사용하여 무차원화된 지배방정식을 discretize 해야 한다. Macroscopic field의 평균화 지배 방정식은 staggered-grid 방법을 이용하여 second-order accurate 하며 implicit한 discretized equation으로 바꿀 수 있다. 이 방법에서 혼합유체의 압력, 기포벽의 속도 및 기포 반경 등은 각각의 정규 node에서 값이 정해지는 반면 혼합유체의 속도는 각 node 들 간의 중간점에서 값이 정해진다.

Staggered-grid에 기초하여 trapezoidal rule을 운동 방정식에 적용하면

$$u_{i+1/2}^{n+1} = u_{i+1/2}^n - \frac{V^2 \Delta t}{2 \theta \Delta x} (P_i^{n+1} - P_{i+1}^n), \quad (27)$$

$$u_{i+1/2}^{n+1} - u_{i+1/2}^n = \frac{V^2 \Delta t}{2 \theta \Delta x} (P_{i+1}^n - P_i^n) \quad (28)$$

이 때 연속 방정식은

$$\begin{aligned} P_i^{n+1} = P_{i+1/2}^n + \frac{\Delta t}{2} \theta \left[3 (R^2 U)_i^{n+1} - \frac{u_{i+1/2}^{n+1} - u_{i+1/2}^n}{\Delta x} \right], \end{aligned} \quad (29)$$

여기서

$$P_i^{n+1} = P_i^n + \frac{\Delta t}{2} \theta \left[3 (R^2 U)_i^n - \frac{u_{i+1/2}^n - u_{i-1/2}^n}{\Delta x} \right] \quad (30)$$

$u_{i+1/2}^n$ 을 대입하면 다음과 같은 implicit tri-diagonal system을 구성할 수 있다.

$$\begin{aligned} -\lambda^2 P_{i-1}^{n+1} + (1 + 2\lambda^2) P_i^{n+1} - \lambda^2 P_{i+1}^{n+1} \\ = \frac{3}{2} \theta \Delta t (R^2 U)_i^{n+1} + f_i^n, \end{aligned} \quad (31)$$

여기서 $\lambda = \frac{V \Delta t}{2 \Delta x}$,

$$f_i^n = P_i^{n+1/2} - \frac{\theta \Delta t}{2 \Delta x} (u_{i+1/2}^{n+1/2} - u_{i-1/2}^{n+1/2})$$

영역 경계면에서 second-order의 정확도를 기하기 위해서는 특별한 주의가 필요하다. 본 연구에서는 양쪽 경계면을 강체라 가정하므로 이 곳에서 유체의 속도는 0이 된다. 기포 내부의 온도 방정식을 discretize하기 위해서 다음과 같은 second-order accurate 관계식을 사용한다.

$$\begin{aligned} (T^2)_{i,j} = \frac{1}{\Delta y^2} \left[\left(1 + \frac{\Delta y}{y_j} \right) T_{i,j+1} - 2 T_{i,j} + \left(1 - \frac{\Delta y}{y_j} \right) T_{i,j-1} \right] \end{aligned} \quad (32)$$

$$\left(\frac{\partial \tau}{\partial y}\right)_j = \frac{\tau_{j+1} - \tau_{j-1}}{2 \Delta y} \quad (33)$$

여기서 Δy 는 기포내부의 mesh 간격이고 j 는 microscopic field 내의 node를 나타낸다. 이를 사용하면 macroscopic field에서와 마찬가지로 다음과 같은 tridiagonal system을 구성할 수 있다.

$$\begin{aligned} (A_{-})_j^{n+1} \tau_j^{n+1} + (A_0)_j^{n+1} \tau_j^{n+1} + (A_{+})_j^{n+1} \tau_j^{n+1} \\ = \tau_j^{n+1/2} + g_j^{n+1} \end{aligned} \quad (34)$$

여기서 $j \geq 2$ 일 때

$$\begin{aligned} (A_{-})_j &= \frac{\Delta t \chi}{2 R^2 \Delta y^2} \left\{ -D_1 \left(1 - \frac{\Delta y}{y_j} \right) \right. \\ &\quad \left. \pm \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{\Delta y}{p} \left[\left(\frac{\partial \tau}{\partial y} \right)_{n+1, y_j} - \left(\frac{\partial \tau}{\partial y} \right)_j \right] \right\} \\ (A_0)_j &= 1 + \frac{\Delta t \chi D_1}{R^2 \Delta y^2}, \quad g_j = \frac{1}{2} \Delta t D_1 p_1 \end{aligned}$$

$j = 1$ 일 때에는

$$\begin{aligned} (A_{-})_1 &= 0, \quad (A_0)_1 = 1 + \frac{3 \Delta t \chi D_1}{\Delta y^2 R^2}, \\ (A_{+})_1 &= -\frac{3 \Delta t \chi D_1}{\Delta y^2 R^2}, \quad g_1 = \frac{\Delta t}{2} D_1 p_1 \end{aligned}$$

기포 내부압력 방정식은 다음과 같이 discretize 된다.

$$p^{n+1} = \frac{p^{n+1/2} + \frac{3 \Delta t}{2 R \tau} (\gamma - 1) \chi \left. \frac{\partial \tau}{\partial y} \right|_{y=1}}{1 + \frac{3 \Delta t \gamma U}{2 R}} \quad (35)$$

IV. 충격파 내의 충격파 전달현상 해석

앞서 유도한 이론 및 수치해석 방법을 이용하여 기포혼합 유체를 전파해가는 충격파의 구조에 대한 연구를 시행하였다. 먼저 충격파의 초기조건을 다음과 같이 설정하였다.

$$P^*(x^*, 0) = 1 + \frac{1}{2} \Delta P^* \{ 1 - \tanh[A^*(x^* - x_{**})] \} \quad (36)$$

이 초기조건에서 수치해석 영역(computational do-

main)의 오른쪽 반은 equilibrium 값 즉 무차원 값으로 1이고 왼쪽 반은 $1 + \Delta P^*$ 가 된다. 기포반경의 초기분포 값은 등온기체법칙(isothermal gas law)을 만족시키며 domain상의 모든 속도변수 값은 0이다. 첫번째 case는 약한 충격파($p=0.2$)의 경우로서 기포의 equilibrium 반경은 1mm이고 가스의 volume fraction β 는 2.51%이다. 그림 1은 충격파 내에서의 시간에 따른 압력분포를 나타낸다. 오른쪽 방향으로 전파하는 compression 파는 처음에는 진동하는 듯한 구조(oscillatory structure)를 가지나 오른쪽으로 전파함에 따라 매끄러운 구조로 변화해 간다. 이 현상은 충격파내 여러 위치에서의 pressure history를 나타낸 그림 2에서 더욱 현저하게 나타난다. 그림 3과 4는 ΔP^* 를 0.5로 하고 $\beta=0.838\%$ 로 변화시켰을 때의 압력 분포 및 pressure history인데 전번 경우와 마찬가지로의 양상을 보여준다. 이러한 충격파의 변화특성은 Noordzij와 van Wijngaarden(1974)에 의해서 실험적으로 관찰된 바 있다. 그들은 이 현상을 이론적으로 연구하여 gas의 relaxation과 기포혼합유체의 그것을 유추해 내었다. 즉 압력파의 oscillatory structure가 매끈한 상태로 변화해 가는 것은 기포와 이를 둘러싸고 있는 액체간의 relative translational motion에 의한 relaxation현상으로 보았다. 그러나 본 연구에서 채택한 모델에서는 이러한 상대운동이 무시되었으므로 (low gas volume fraction 이며 small bubble size이기 때문) 그들이 주장한 relaxation현상은 타당하지가 않다. 본 모델에서는 기포내부 해석에 에너지 방정식을 도입하여 시간에 따른 기포내부의 온도 분포를 정확히 계산해낼 수 있었고 이에 따른 가스외부액체간의 열전달효과를 고려할 수 있었다. 이런 점을 종합해 볼 때 기포혼합유체 내를 전파하는 충격파의 파형변화 원인은 Noordzij와 van Wijngaarden이 주장하는 가스외부액체간의 상대운동에 기인한 relaxation effect 라기보다는 오히려 가스외부액체간의 열전도에 의한 thermal damping효과라고 보아야 타당할 것이다. 실제로 Nigmatulin과 Shagapov(1974)는 가스외부액체간의 열전달에 주목한 바 있다. 또 하나의 흥미있는 결론이 그림 1-4로부터 유도될 수 있는데 이는 강한 충격파의 전파에 있어서는 oscillatory structure로부터 mo-

notonic한 구조로 변화하는 시간이 약한 충격파의 경우보다 길어진다는 사실이다. 이는 Nigmatulin 과 Shagapov의 report와도 일치된다. 이들과 동일한 수학적 열전달 계수를 사용하여 가스과 액체 사이의 열전달을 해석한 반면 본 연구에서는 정확한 기포 내부의 온도분포에 의거하여 이를 해석했기 때문으로 보인다. 전술한 수치해석에서 참고길이 L은 기

포의 크기 반경으로 잡았으며 characteristic time은 $99 \mu sec$ 였다. 무차원 식의 parameter 값들은 $V=11.1, \theta=513$, 그리고 $A=0.2$ 였다. 실제 계산을 위해 $\Delta x^*=20, \Delta t^*=0.04$ 그리고 500개의 macroscopic node, 기포 한개 당 20 microscopic node 를 사용하였다. Computation time은 Micro Vax를 사용하여 약 100시간 내외가 소요되었다.

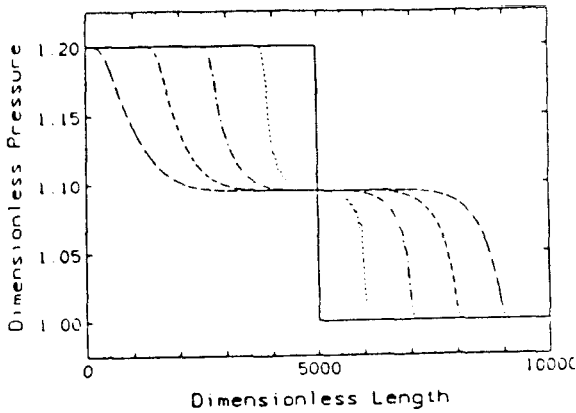


그림 1 Macroscopic pressure distributions for a shock-tube problem at dimensionless time 0, 136, 273, 409 and 545. The amplitude is 0.2, the bubble radius 1 mm, and the gas-volume 2.51%

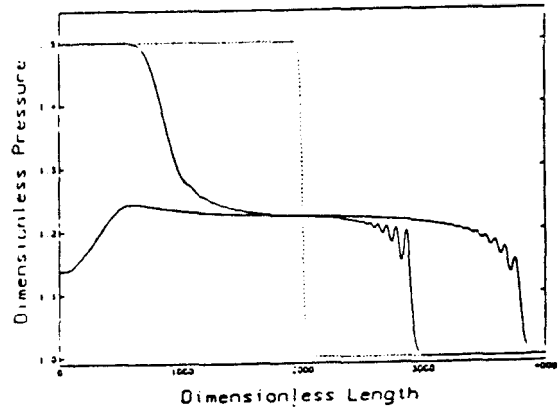


그림 3 Macroscopic pressure distributions for a shock-tube problem at dimensionless times 0, 68 and 136 and The amplitude is 0.5, the bubble radius 1mm, and the gas-volume 0.838%

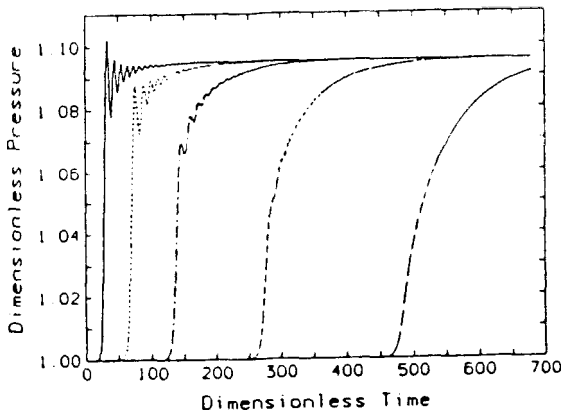


그림 2 Macroscopic pressure versus time at positions $x^*= 5200, 5500, 6000, 7000,$ and 8500 for shock-tube problem of 그림 1.

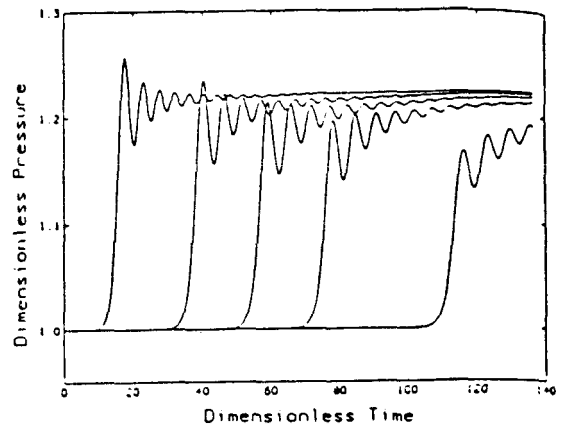


그림 4 Macroscopic pressure versus time at positions $x^*= 2200, 2500, 2750, 3000,$ and 3500 for the shock-tube problem of 그림 3.

참 고 문 헌

1. Caffisch, R.E., Miksis, M.J., Papanicolaou, G.C., & Ting, L. 1985 Effective equations for wave propagation in bubbly liquids. *J. Fluid Mech.* **153**, 259-273.
2. Foldy, L.L. 1945 The multiple scattering of waves. *Phys. Rev.* **67**, 107-119.
3. Keller, J.B. & Miksis, M. 1980 Bubble oscillations of large amplitude. *J. Acoust. Soc. Am.* **68**, 628-633.
4. Nigmatulin, R.I. & Shagapov, V. Sh. 1974 Structure of shock waves in a liquid containing gas bubbles. *Fluid Dyn.* **9**, 890-899.
5. Noordzij, L. & Wijngaarden, L. van 1974 Relaxation effects, caused by relative motion, on shock waves in gasbubble/liquid mixtures. *J. Fluid Mech.* **66**, 115-143.
6. Prosperetti, A., Crum, L., & Commander, K.W. 1988 Nonlinear bubble dynamics. *J. Acoust. Soc. Am.* **83**, 502-514.
7. Prosperetti, A. & Lezzi, A. 1986 Bubble dynamics in a compressible liquid - Part 1. First-order theory. *J. Fluid Mech.* **168**, 457-478.
8. Wijngaarden, L. van 1968 On the equations of motion for mixtures of liquid and gas bubbles. *J. Fluid Mech.* **33**, 465-474.
9. Wijngaarden, L. van 1970 On the structure of shock waves in liquid-bubble mixtures. *Appl. Sci. Res.* **22**, 366-381.

▲金東赫



1976년 2월 서울대학교 공과
대학 기계공학과 졸업
(B. S.)

1984년 5월 New Jersey
Institute of Technology
기계공학과 졸업(M. S.)

1988년 5월 The Johns Hop-
kins University 기계공
학과 졸업(Ph. D.)

1976년 3월~1982년 8월 국
방과학연구소(ADD)

1988년 9월~현재 한국표준연구소 음향연구실