韓國數學敎育學會誌 (數學敎育)
1989. 6, Vol. XXVIII, No. 1.

Journal of the Korea Society of Mathematical Education
Jun. 1989. Vol. XXVIII, No. 1.

폴리아의 생애와 그의 수학교육 이론

박 교 식
한국교육개발원

1. 서 론

우리 시대의 위대한 수학교육자였던 폴리아(George Polya, 1887-1985)는 문제 해결을 수학교육의 논의 대상으로 부각시킨 최초의 학자라고 볼 수 있다. 거의 1세기를 살다 간 이 대가는 수학교육뿐아니라 순수 수학에서도 굉장한 업적을 이루어놓고 있는데 그의 이름이 붙어 있는 정리만도 꽤 된다. 위대한 수학자라고 해도 자신의 이름이 붙여진 정리가 고작 1-2개에 불과하다는 것을 생각해보면 순수 수학자로서의 그의 위대성은 필설로는 다 표현할 수가 없다.

4개 언어(헝가리어, 불어, 독일어, 영어)를 구사했던 외에도 몇개 언어를 더 이해할 수 있었던 그는 생전에 여러 나라 언어로 약 250여편의 논문을 발표하였으며 저술한 책만도 십수권에 이르고 있다. 그의 사후 MIT출판부에서 정리 편집한 그의 논문집은 두툼한 책 4권으로 구성되어 있다.

수학자로는 비교적 고전주의자였으나 수학교육자로는 선각자라고 할 수 있었던 그는 자신이 어떤 결과를 찾아내었던 그 과정에 늘 관심을 갖고 그 방면을 체계적으로 정리하여 오늘날 문제해결이라고하는 수학 교육상의 한 주류를 형성해 놓고 있다.

문제해결의 과정을 규명해 보고 그것을 지도하는 것에 대해 오랫동안 연구와 강의를 계속해 왔던 그는 이 방면의 저서로 '어떻게 문제를 풀것인가(How to solve it, 1945)', '수학과 개연적 추론(Mathematics and Plausible Reasoning, 1954)', '수학적 발견(Mathematical Discovery)'을 남겨 놓고 있다.

폴리아는 이 책들 중에서 특히 '어떻게 문제를 풀 것인가'를 가장 자랑스럽게 생각했었다. 이를 뒷받침하듯이 1945년에 저술된 그 책은 현재까지 약 18개 언어로 번역 출간되어 100만 부 이상 팔린 것으로 어림 짐작되고 있다. 이 책은 문제해결이 수학교육의 한 주류로 남아 있는 한 영원한 고전으로 남을 것으로 생각된다. (주 1)

수학교육에 관한 그의 또 다른 저서인 '수학과 개연적 추론'은 6개 언어로, '수학적 발견'은 8개 언어로 번역 출간되었다. 그리고 킬패트릭(J. Kilpatrick)과의 공저인 '스탠포드 수학 문제집(Stanford Mathematics Problem Book, 1974)'도 많은 수학교육자들의 관심을 불러 일으킨 저서였다.

폴리아는 문제해결 이론에 관해 많은 것들을 제기해 놓고 갔다. 그가 제기했던 문제해결은 1945년 이래 거의 반세기동안 연구되어 오고 있다. 그러나 폴리아와 그의 문제해결 이론에 대한 종합적인 평가는 아직 체계적으로 이루어 지고 있지 않다.

여기서는 폴리아와 그의 수학교육 이론에 대한 정확한 평가가 이루어 지기를 기대하며 그의

생애와 그의 수학교육 이론을 다시 한번 음미해 보고자 한다.

2. 폴리아의 생애

폴리아는 1887 년 12 월 13 일 헝가리의 부다페스트에서 태어났다. 문학에도 심취했었던 그는 자신의 생일이 시인 하이네의 생일과 같다는 것을 늘 자랑스럽게 생각했었다.

폴리아는 부다페스트에서 대학 예비학교인 마르코 스트리트 김나지움(Marko Street Gymnasium)을 다녔다. 그 당시 폴리아는, 그 자신의 회고에 따르면, 상당히 문제를 잘 푸는 학생이었다.

그는 성적이 우수해 1905 년 장학생으로 부다페스트 대학에 입학했다. 처음에는 어머니의 희망대로 법대를 지원해 한학기를 마치긴 했으나 별반 흥미를 느끼지 못했다. 이 무렵 다아윈의 저서를 읽고 생물학에 심취해 생물학을 전공해 보려고도 했었지만 이번에는 형의 반대로 뜻을 이루지 못했다.

그 후 어문학을 택해 라틴어와 헝가리어 교사 자격증까지 취득했지만 그것들을 써 먹을 기회도 평생 오지 않았다.

이후 그는 다시 알렉산더(Alexander) 교수 밑에서 철학을 공부하기 시작했는데 이 때 그 교수가 철학 공부의 일환으로 물리학과 수학을 수강할것을 권유한 것이 그의 일생을 바꾸는 전기가 되었다. 폴리아가 철학과 물리학을 공부했던 전력은 그후 그의 학문세계 곳곳에 나타나게 된다.

폴리아는 비록 물리학을 좋아하긴했지만 수학을 전공하게 된 것에 대해 자기 자신이 물리학을 하기에는 그다지 우수하지 않았고, 철학을 하기에는 너무 우수하다고 생각했기 때문에 결국 그 중간인 수학을 택하게 되었다고 회고하고있다.

폴리아는 비엔나 대학에서 1 년을 보낸 후 1912 년 부다페스트 대학에서 박사 학위를 취득하게 되는데 이 때의 논문 주제는 확률 계산 및 그와 관련된 정적분 문제에 관한 것이었다. 박사 학위 취득후 폴리아는 다시 괴팅겐 대학(1912 - 1913)과 파리 대학(1914)에서 박사후 과정을 이수하게 된다. 박사후 과정을 마친 1914 년 폴리아는 취리히에 있는 스위스 연방 공과대학에 부임하게 된다.

제1차 세계대전이 발발하자 폴리아는 조국 헝가리의 군대에 자진 입대하려 했으나 어릴 때 다친 상처로 지원이 받아들여 지지 않았다. 그러다가 전황이 불리해 지자 헝가리 군대는 폴리아에게 입대할 것을 명령했다. 그러나 폴리아는 이미 전쟁의 참혹한 실상을 보고 있었기 때문에 입대 명령에 따르지 않게 된다. 그 결과 폴리아는 징병 기피자가 되어 30 년 동안 조국 헝가리에 가지 못하는 신세가 된다.

폴리아는 1918 년 스위스 여성인 스텔라(Stella V. Weber)와 결혼, 자신이 사망할 때까지 67 년간을 해로하며 살았으나 슬하에 자식은 없었다. 폴리아는 매우 창조적이고 행복한 인생을 영위했었는데, 그가 이러한 인생을 향유할 수 있었던 가장 중요한 요인은 바로 스텔라와의 행복한 결혼 생활으로 보는 사람들이 많다.

많은 유럽 사람들이 그랬듯이 폴리아도 히틀러의 압제를 피해 1940 년 미국으로 이주하게 된다. 이주 후 처음 2 년간은 브라운 대학의 방문교수로 있다가 그 뒤 팔로알토의 스탠포드 대학에 자리잡게 된다.

폴리아는 스탠포드 대학에서 정년 이후에도 명예 교수로 활발한 연구 활동을 하며 지냈다. 특히 자신이 맛보았던 발견의 기쁨을 다른 사람들도 경험할 수 있도록 가르치고 싶어 했는데, 그것이 결국 그를 뛰어난 강연가, 저술가로 만들었다.

그는 90 세가 될 때까지 강의를 할 정도로 건강했으나 말년에는 시력이 극도로 나빠져 특수확대기를 이용하지 않고서는 책을 볼 수 없었다.

폴리아는 오랜 세월 수학자로서 그리고 수학교육자로서 많은 영예를 누리다가 팔로알토에서 1985 년 9 월 7 일 97 세를 일기로 운명했다.

3. 폴리아의 수학교육 이론

(1) 문제해결과 발견술

오늘날 폴리아라는 이름은 문제해결을 대표하고 있다. 그러나 문제해결에 관심을 가졌던 사람은 폴리아가 처음은 아니다. 폴리아는 자신이 문제해결에 보다 진지한 관심을 갖게된 것은 바로 오일러 때문이었다고 회고하고 있다. 오일러는 다른 수학자와는 달라 그 자신이 결과를 어떻게 구했는지 설명하고 있었고, 그러한 설명은 폴리아 자신의 경험과 매우 흡사했다는 것이다.

폴리아가 '어떻게 문제를 풀 것인가' 를 집필하게 된 의도는 자신이 학생 시절에 어떤 제시된 풀이 또는 정리를 받아들일 때 그것들이 다 옳음을 인정하면서도 늘 가슴속에 품었던 의문 즉, '어떻게 해서 그러한 풀이를 사람들이 고안해 낼 수 있었을까', '어떻게 해서 그러한 정리를 발견해 낼 수 있었을까', '나라면 어떻게 해야 그러한 풀이 또는 정리를 발견해 낼 수 있을까' 하는 것에 답하기 위해서 였다.

폴리아는 자신이 문제를 해결해 왔던 경험을 주의깊게 분석해 본 뒤 모든 문제의 해결은 문제 이해 (Understanding the problem), 계획 수립 (Devising a plan), 계획 실행 (Carrying out the plan), 반성 (Looking back) 의 4 단계를 거쳐야 한다고 결론지었다. 그는 이러한 문제해결의 4 단계는 또 학생들의 문제해결 능력을 신장시킬 수 있는 좋은 방법이 될수 있다고 보고 있다.

문제 이해란 문제가 요구하고 있는 것이 무엇인지 파악하는 단계이다. 여기에는 문제의 언어적 표현에 대한 이해는 물론, 문제의 주요 부분 즉, 미지인 것, 자료, 조건등에 대한 명확한 지적을 할 수 있어야 하는 것도 포함된다. 문제를 이해하기 위해서는 문제를 주의깊게 반복해서, 그리고 여러 측면에서 살펴보아야 하고 필요하면 '그림을 그린다' 거나 '적절한 기호를 붙여야 한다.'

계획 수립이란 미지인 것을 구하기 위해 어떤 계산이나 작도를 해야 할 것인가를 알게 되는 단계이다. 계획에 대한 생각은 점진적으로 떠오를 수도 있고 또 오랜 망설임 끝에 섬광과도 같이 떠오를 수도 있다. 폴리아에 의하면 이러한 생각들은 대개 과거의 경험과 이전에 얻은 지식을 바탕으로 적절한 사실 즉 '관련된 문제, 내용, 정리' 등을 회상함으로써 가능하다. 그러나 그외에도 계획 수립에는 훌륭한 사고 습관, 목적을 향한 집중력 그리고 행운까지도 따라야 한다.

계획 수립이 일종의 윤곽을 제시하는 단계인 반면, 계획 실행이란 세부적인 것이 그 윤곽에 들어 맞는다는 것을 확인하는 단계이다. 즉, 모든것이 아주 명확해 지도록 차례 차례 점검하는 단계이다. 이러한 점검은 지리하고 반복적인 계산을 필요로 하기 때문에 학생은 인내심을 가져야 할 필요가 있다.

반성이란 완성된 풀이를 검토하고, 그 결과와 그 결과에 이르게 된 과정을 재고하고 재검사하는 단계이다. 반성이란 매우 중요하고 교훈적인 단계로, 획득한 지식을 견고하게 하고 문제를 해결하는 능력을 발달시킬수 있는 단계이다. 이러한 반성의 단계를 통해 오류를 찾아 고칠 수 있고, 풀이를 개선할 수 있으며, 또 자신의 이해를 보다 깊게할 수있다.

폴리아에 의하면 문제의 해결에는 항상 발견이 개재된다. 중대한 문제일수록 위대한 발견에 의해 해결되며, 아무리 하찮은 문제라고 하더라도 그 해결에는 작은 발견이 있게 마련이다. 즉, 문제해결의 전 과정은 이러한 발견의 연속이라고 할 수 있다. 따라서 일반적으로 이러한 발견의 방법 또는 규칙을 알 수 있다면, 문제해결은 보다 수월하게 이루어진 것이다.

발견의 방법 또는 규칙을 발견술이라고 하는데, 발견술에 대한 연구는 오랜 역사를 가지고 있다. 즉, 파푸스, 데카르트, 라이프니쯔, 볼짜노 같은 학자들이 이미 발견술의 체계를 세우려 시도한적이 있었다. 폴리아는 이들의 경험과 자신의 경험을 토대로 수학 문제해결에 요구되는 발견술을 정리해 놓고 있다. 폴리아가 새로이 '현대적 발견술 (modern heuristic)' 이라 이름붙인 이러한 발견술은 물론 수학에서 뿐만이 아닌 모든 종류의 문제에 적용되는 일반 법칙으로 '미지인 것을 살펴보는것', '그림을 그려보는 것', '관련된 문제를 회상하는것' 따위가 모두 여기에 속한다.

발견술이란 또 문제해결에 유용한 정신적 조

작으로 볼 수 있는데, 이러한 정신적 조작을 잘 이해하면 수학을 가르치는데 보다 효과적일 수 있다. 폴리아에 의하면 이러한 발견술은 평이한 상식으로부터 나오기 때문에 자연스럽게 일어난다. 그러나 대개는 일반적인 방향만 제시해주기 때문에 학생들이 사고할 여지는 충분히 남아있다.

문제해결이란 실제적 기능으로 모방과 연습에 의해 습득된다. 따라서 학생들은 다른 사람들이 문제를 풀 때 발견술이 어떻게 이용되는지를 관찰하고 모방해 봄으로써 그리고 실제 자신들이 발견술을 이용하여 문제해결을 연습해 봄으로써 마침내는 문제를 해결하는 방법을 배우게 된다.

교사는 학생들이 문제해결을 배우는 과정에서, 발견술을 잘 이용하도록 적절한 발문과 권고를 해야 한다. 교사의 이러한 지도에 힘입어 학생들은 발견술의 올바른 사용법을 알게 되고 또 그렇게 함으로써 단편적인 수학적 지식보다도 더 중요한 사고의 참 맛과 발견의 기쁨을 맛볼 수 있게 되는 것이다.

(2) 수학적 발견과 개연적 추론

폴리아에 의하면 문제해결이란 발견의 과정이었고 또 그러한 발견은 발견술에 의해 보다 수월하게 진행될 수 있었다. 폴리아는 이런 발견그 자체의 본성에 관해서 그의 또 다른 저서인 '수학과 개연적 추론' 에서 자세히 탐구하고 있다.

폴리아에 의하면 수학의 아이디어나 정리란 처음에는 그것을 발견하려는 사람에게서 멀리 떨어져있는 채 발견되기를 기다리고 있는 것이다. 폴리아는 그렇게 멀리 떨어져 있는 정리나 아이디어를 찾아내는 것을 수학적 발견이라고 생각하며, 또 발견에 이르기까지의 과정을 수학적 사고의 본성으로 보고 있다. 폴리아는 게스탈트 심리학자와 마찬가지로 수학적 사고의 본성이 무엇인가 하는 해답을 인간의 내성 (introspection) 에서 찾고 있다. 다만 게스탈트 심리학자들은 그 어떤 뚜렷한 모델을 제시하고 있지 못한 반면, 폴리아는 '개연적 추론' 이라는 모델을 제시하고 있다.

폴리아가 탐구하고자 했던것은 발견의 과정을 설명해 줄 수 있는 그 무엇이었다. 즉, 사람들이 당면한 문제의 해를 발견하는 방향으로 진전하게끔 뒷받침해 주는 것은 무엇인가 하는 것이었다.

꼭 수학적인 것만은 아닌 예컨대 발명가에게 자신의 생각이 좋다는 것을 확신시켜 주는 증거, 일상적인 일에서 우리를 합리적인 방향으로 인도해 주는 증거, 과학자들이 이용하는 귀납적인 증거, 많은 실험에서 얻어낸 통계적인 증거 따위에는 엄밀한 논증이 갖고 있는 확실성이 결여되어 있긴 하지만 그래도 본질적으로 새로운 지식을 획득하는데는 필수적인 것이라고 할 수 있다.

폴리아는 바로 이러한 증거들이 필수적이라고 생각하는 사고를 개연적 추론이라고 부르고 있다. 이 개연적 추론은, 어떤 최종적인 것을 얻기 전에 거쳐야하는 잠정적이며 시사적인 것으로서, 비록 논리적으로는 아무것도 증명하고 있지 못하지만, 발견의 방향을 설정하는데는 무척 중요한 역할을 하는 것이다.

다음과 같은 예를 보자.

삼단논법	발견적 삼단논법
A 이면 B 이다.	A 이면 B 이다.
B 는 거짓이다.	B 는 참이다.
A 는 거짓이다.	A 는 보다 신뢰할 만 하다.

엄밀히 논증의 한 예인 삼단논법과 이것과 유사한 '발견적 삼단논법' 에서 첫번째 명제는 서로 같다. 두번째 명제는 서로 정반대 이긴하지만 논리적 수준은 서로 같다. 삼단논법에서는 첫번째 명제를 받아들이는데 동의했다면 그리고 B 가 거짓임이 확인되었다면 누가 되었든 'A 는 거짓이다.' 라는 분명하고 논증적인 결론에 도달할 수 밖에 없다. 반면 발견적 삼단논법에서는 첫번째 명제를 받아들이는데 동의했고 그리고 B 가 참임이 확인되었다고해도 A 의 참, 거짓에 대한 분명하고 논증적인 결론을 도출할 수는 없다. 그러나 A 에 관해 어느 정도의 신뢰를 할 수는 있다. 이러한 사고가 개연적 추론의 기본이 된다. 물론 이때 '훨씬 더' 신뢰할 만하다던가 '약간 더' 신뢰할 만 하다던가 하는 정도의 차이는 개개인에 따라 다를 수 있다.

흔히 수학적 발견에서 중요한 역할을 하는 것은 귀납적 추론과 유추적 추론이라고 알려져 있다. 그러나 폴리아에 의하면 이들은 개연적 추론의 일종이다. 즉 개연적 추론은 이 모두를 포함하는 더 일반적인 개념이다.

폴리아에 의하면 개연적 추론의 기본 형태는 모두 12 가지로 다음과 같이 구성된다. 두개의 전제로서 이루어 지는 삼단논법의 형식을 생각해보자. 명제 A, B 가 첫번째 전제에서 결합될 수있는 A → B, A ← B, A|B (주 2) 의 세 가지 방법과 두번째 전제에서 B 가 B : 참, B : 더 신뢰할 만하다 (more credible), B ; 덜 신뢰할 만 하다 (less credible), B ; 거짓의 가능한 네가지 상태를 결합하면 다음 표와 같이 모두 12 가지가 가능하다.

개연적 추론의 기본 형태

A → B	A → B	A → B	A → B
B : F	B : l.cr.	B : m.cr.	B : T
A : F	A : l.cr.	A : s.m.cr.	A : m.cr.
A ← B	A ← B	A ← B	A ← B
B : T	B : m.cr.	B : l.cr.	B : F
A : T	A : m.cr.	A : s.l.cr.	A : l.cr.
A ∣ B	A ∣ B	A ∣ B	A ∣ B
B : T	B : m.cr.	B : l.cr.	B : F
A : F	A : l.cr.	A : s.m.cr.	A : m.cr.

* F ; false, T ; true
l. ; less, m ; more, cr. ; credible, s. ; somewhat

폴리아에 의하면 보다 복잡한 개연적 추론이라고 해도 결국 이 12 개의 기본 형태의 조합으로 설명된다는 것이다. 이 표에서 왼쪽으로 갈수록 그 사고는 논증적인 추론의 성격을 띠게 된다.

(주 1) 우리나라에서는 1986 년 초판이 발행된 지 41 년만에 서울대학교 우정호 교수에 의하여 번역 출간되었다.

(주 2) A, B 가 (1) A : 참, B : 거짓 (2) A : 거짓, B : 참 (3) A : 거짓 , B : 거짓 중의 어느 하

나를 만족하면 A와 B는 서로 양립될 수 없다. 이것을 A와 B는 incompatible라고 하며 A|B 로 나타낸다. 명백히 A|B 와 B|A는 서로 같다.

참고문헌

1. Agnes A. Wieschenberg, *A Conversation with George Polya*, Mathematics Magazine, VOl. 60, No. 5, 1987
2. Alan H. Schoengeld, *Polya, Problem Solving, and Education*,
   Mathematics Magazine, Vol. 60, NO. 5, 1987
3. ____________, *Mathematical Problem Solving*, Academic Press, 1985
4. Frank K. Lester, Joe Galofalo (ed.), *Mathematical Problem Solving* : Issues in
   Research, The Franklin Institute Press, 1982
5. George Polya, 우정호 역, 어떻게 문제를 풀 것이가, 천재교육, 1986

__________, *Mathcmatics and Plausible Reasoning*, Vol. 1, 2
Princeton University Press, 1954

__________, *Mathematical Discovery*, John Wiley and Sons Inc. 1968

8. Jeremy Kilpatrick, *George Polya's Influence on Mathcmatics Education*,
   Mathcmatics Magazine, Vol. 60, No. 5, 1987