

三邊測量에 의한 3次元 位置決定에 관한 研究

A Study on the Determination of 3-Dimensional Position by Trilateration

朴 雲 龍* 李 鍾 出**
Park Woon-Yong Lee Jong-Chool
金 熙 圭***
Kim Hee-Gyoo

要 旨

現在까지의 3次元 位置決定은 水平垂直 調整에 의해서 分離 施行되어 오고 있는 실정이다. 本研究에서는 단지 한 未知點에서 세 既知點에 대한 세 傾斜距離만을 測定하여 未知點의 3次元 座標를 同時에 決定코자 함에 그 目的이 있다. 또한 본 연구에서는 剩餘觀測에 대한 調整問題를 觀測方程式과 條件方程式에 의해 해결하였고, 아울러 이 두 해석기법의 特徵을 考察하였다.

ABSTRACT

Up to date, the ditermination of three dimentional position is performed sperately by horizontal and vertical adjustment. The purpose of this study is to determine simultaneously three dimentional coordinates of one unknown point by measuring only three slope distances from one unknown point to three fixed points. In this study, the adjustment problem for measurement values inclading redundancy is solved by observation equation and condition equation, and also the characteristic of these two analysis methods is studied and investigated.

1. 序 論

從來의 3次元 位置決定 方法은 먼저 角과 距離를 測定하여 水平位置를 決定하고 三角水準 測量에 의하여 垂直位置를 決定해 왔다.

本 研究는 이러한 從來의 方法에서 벗어나 電磁波測距離(EDM)를 이용하여 한 未知點에서 最小한 세 既知點에 대한 傾斜距離만을 測定하여 後方交會法의 技法으로 立體形態의 3次元 三邊網을 構成하고 測定된 傾斜距離를 이용한 양단 두점의 座標로부터 세 개의 距離方程式을 代개변수로 하여 未知點에 대한 水平·垂直의 位置 X, Y, Z를 同時에 決定하는 方法을 찾고자 하였다.

水平, 垂直의 位置를 同時에 決定하는 三次

* 東亞大學校工科大学 教授
** 釜山工業大學 土木科 助教授
*** 慶南專門大學土木科 副教授

元 三邊測量은 外業의 量을 줄일 수 있으나 立體三邊점을 構成하기 위해서는 한 點當 未知數가 세개이고 最小한 세 邊이 만나야 하는 條件이 필요하며, 剩餘測定時 剩餘點數가 많으면 精度는 向上되나 調整計算 할 양이 많아진다. 하지만 이러한 調整計算은 전자계산기에 의해 쉽게 해결할 수 있다.

調整은 觀測方程式의 方法이나 條件方程式의 方法에 따라 調整計算 될 수 있으며 本 研究는 이 두가지 調整方法을 이용하여 한 未知點에서 的 3次元 位置(X, Y, Z)를 同時에 決定하여 未知點의 正確도와 信速度를 높이고 아울러 標高差가 심한 地域에서의 測定効率을 도모코자 하였다.

이에 대한 最近의 研究는 1978年 澤由良修⁹⁾가 既知點이 一點 이상인 三邊有心網에 대하여 角條件式과 面積條件式을 誘導한 후 實例를 計算하였다. 그리고 N.F. Danial⁹⁾은 1979年 구조 계산에 쓰이는 最小일의 原理를 三邊網에

적용하였으며 1980년에는 有限要素法(Finite Element Method)을 이용하여 三邊網을 해석하였다.

1980年 P.R. Wolf¹⁰⁾은 最小自乘法을 이용하여 3개의 既知點에서 하나의 未知點과 여러개의 未知點을 구하는 技法開發을 시도하였다.

1983年 N.F. Damial¹¹⁾은 空間 後方交會法の原理를 이용하여 3개 이상의 既知點에 이르는 傾斜距離단을 測定하면 未知點의 三次元 座標를 同時에 구할 수 있는 方法을 紹介하였으며, 또한 1985年 이러한 原理를 소규모 三次元 三邊網에 확장 이용하였다.¹²⁾

1985年 미국 지진연구소에서 三邊網을 이용하여 地각변동으로 인한 遺蹟의 變위를 測定하였다.¹³⁾

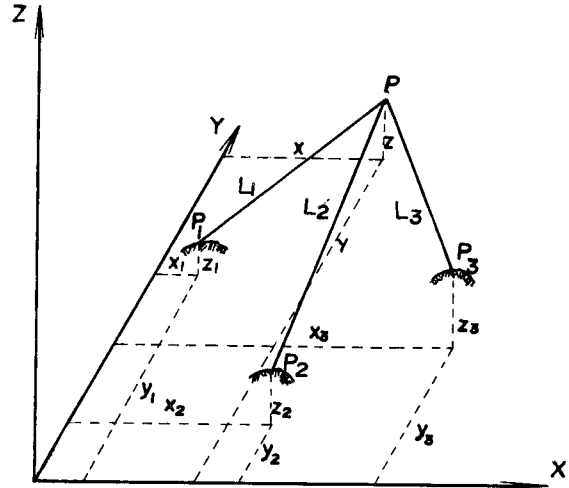


Fig. 1 Simple space resection

2. 基本理論

(1) 三次元 三邊測量

세 既知點에 대하여 測定한 空間 距離로부터 三次元 座標를 결정하는 간단한 空間 後방交會法の 原理로부터 座標에 의한 距離方程式을 考慮할 수 있다.

Fig. 1에서 거리 PP_1, PP_2, PP_3 는 未知點 P로부터 3既知點 P_1, P_2, P_3 를 측정한 傾斜距離이다. 이 각각의 傾斜距離를 L_1, L_2, L_3 라 하고, 既知點의 座標를 $P_1(X_1, Y_1, Z_1), P_2(X_2, Y_2, Z_2), P_3(X_3, Y_3, Z_3)$ 未知點의 座標를 P (X, Y, Z) 라 하면 測定距離 L_i 와 각 點의 三次元 座標와의 관계는 다음과 같다.

$$L_i^2 = PP_i^2 = (X - X_i)^2 + (Y - Y_i)^2 + (Z - Z_i)^2 \quad (1)$$

세 距離 L_1, L_2, L_3 에 대하여 展開後 정리하면 다음 식과 같다.

$$X^2 + Y^2 + Z^2 - 2X_1X - 2Y_1Y - 2Z_1Z + 2Q_1 = 0 \quad (2)$$

$$X^2 + Y^2 + Z^2 - 2X_2X - 2Y_2Y - 2Z_2Z + 2Q_2 = 0 \quad (3)$$

$$X^2 + Y^2 + Z^2 - 2X_3X - 2Y_3Y - 2Z_3Z + 2Q_3 = 0 \quad (4)$$

여기서

$$Q_i = 1/2(X_i^2 + Y_i^2 + Z_i^2 - L_i^2) \quad (5)$$

식(2)에서 식(3)과 식(4)를 빼면 제곱의 項이 消去되고 다음과 같은 두 方程式을 얻을 수 있다.

$$(X_2 - X_1) \cdot X + (Y_2 - Y_1) \cdot Y + (Z_2 - Z_1) \cdot Z - (Q_2 - Q_1) = 0 \quad (6)$$

$$(X_3 - X_1) \cdot X + (Y_3 - Y_1) \cdot Y + (Z_3 - Z_1) \cdot Z - (Q_3 - Q_1) = 0 \quad (7)$$

식(6)(7)로부터 X를 消去하여 Y를 Z의 함수로 나타내면 다음 식과 같다.

$$Y = A \cdot Z + B \quad (8)$$

여기서

$$A = \frac{X_1(Z_3 - Z_2) + X_2(Z_1 - Z_3) + X_3(Z_2 - Z_1)}{X_1(Y_3 - Y_2) + X_2(Y_1 - Y_3) + X_3(Y_2 - Y_1)} \quad (9)$$

$$B = \frac{X_1(Q_3 - Q_2) + X_2(Q_1 - Q_3) + X_3(Q_2 - Q_1)}{X_1(Y_3 - Y_2) + X_2(Y_1 - Y_3) + X_3(Y_2 - Y_1)} \quad (10)$$

식(8)을 식(6)에 代入하여 X를 Z의 함수로 나타내면 다음 식과 같다.

$$X = C \cdot Z + D \quad (11)$$

여기서

$$C = -\frac{(Y_2 - Y_1)A + (Z_2 - Z_1)}{X^2 - X_1} \quad (12)$$

$$D = -\frac{(Y_2 - Y_1)B + (Q_2 - Q_1)}{X_2 - X_1} \quad (13)$$

식(8)과 식(11)을 식(12)에 代入하여 오직 하나의 未知數인 Z의 2次式이 된다.

$$(A^2 + C^2 + 1) \cdot Z^2 + 2\{A(B - Y_1) + C(D - X_1) - Z_1\}Z + \{B(B - 2Y_1) + D(D - 2X_1) + 2Q_1\} = 0 \quad (14)$$

만약 未知點 P가 세 既知點 P₁, P₂, P₃를 포함하는 同一平面에 있지 않다면 식(14)는 Z에 대하여 2개의 값이 얻어지고 이것은 平面 P₁, P₂, P₃를 對稱面으로한 兩空間의 한 點에서 만 날것이 예상되기 때문이다. 계산된 2개의 點중 1點은 실제측정이 될 것이며 다른 한 點은 虛像點이 될 것이다. 어느것이 실점인가를 檢定하기 위하여 未知點의 近似높이를 알 필요가 있다. 未知點의 近似높이를 알지 못할 경우 네 번째 既知點 (P₄)를 이용하여 結果를 檢定할 수 있으나 調整을 필요로 한다. 이러한 調整의 方法으로서 座標變換에 의한 方法과 條件方程式에 의한 方法이 있다.

(2) 座標變換에 의한 調整

未知點 P에서 既知點에 대한 測定傾斜距離 L_i의 觀測方程式은 식(1)로부터 다음과 같이 된다.

$$L_i + V_i = \{(X - X_i)^2 + (Y - Y_i)^2 + (Z - Z_i)^2\}^{1/2} \quad (15)$$

여기서 V_i는 測定距離 L_i의 補正量으로 식(15)에서 未知點 P에 대한 近傾座標 X₀, Y₀, Z₀를 代入하여 구할 수 있다.

이들 初期座標 X₀, Y₀, Z₀는 간단한 空間 後方交會法에 의하여 구할 수 있다. 座標 補正量을 δX, δY, δZ로 하여 각각 初期座標 X₀, Y₀, Z₀에 더하면 調整座標가 얻어지고 다시 一次 調整座標로부터 補正量을 구해 調整座標를 반복해서 구하여 最終調整座標를 얻게 된다.

$$X = X_0 + \delta X, Y = Y_0 + \delta Y, Z = Z_0 + \delta Z$$

(16)

座標 補正量을 구하기 위해 식(16)을 식(15)에 代入하면

$$L_i + V_i = \{(X_0 - X_i - \delta X)^2 + (Y_0 - Y_i + \delta Y)^2 + (Z_0 - Z_i + \delta Z)^2\}^{1/2} \quad (17)$$

식(17)을 Taylor의 級數로 展開後 1차항만을 考慮하면 다음과 같은 觀測方程式이 얻어진다.

$$V_i = \frac{X_0 - X_i}{L_i^0} \delta X + \frac{Y_0 - Y_i}{L_i^0} \delta Y + \frac{Z_0 - Z_i}{L_i^0} \delta Z + (L_i^0 - L_i) \quad (18)$$

여기서 L_i⁰는

$$L_i^0 = \{(X_0 - X_i)^2 + (Y_0 - Y_i)^2 + (Z_0 - Z_i)^2\}^{1/2} \quad (19)$$

통상 이처럼 調整을 계속하면 正規方程式은 풀어진다.

이와 같은 方法에 의하면 δX, δY, δZ 값을 계산한 다음에 未知點의 最終座標 X, Y, Z가 얻어진다.

(3) 條件方程式에 의한 調整

1) 條件式의 數

三次元 三邊網의 調整을 위해서는 연속적인 四邊鎖 形態를 이루도록 구성되어야 한다. 처음 네점의 位置를 구하기 위해서 6개의 距離가 필요하며 하나의 未知點이 추가될 때 새로이 3개의 距離를 測定해야만 한다.

Fig. 2에서 距離 L₁, L₂, L₃, L₄, L₅, L₆로 네 점 A, B, C, D를 구할 수 있으며 距離 L₇, L₈, L₉로 E점의 位置를 구할 수 있다. 그러므로 만약 N은 網에서 점의 全體數, M은 상대 위치를 구하는데 필요한 最小한의 距離의 수라 하면 다음과 같은 관계가 있다.

$$M = 3N - 6 \quad (20)$$

따라서 最小限의 數 M을 超過하는 모든 距離는 距離條件方程式이 된다. 그러므로 U를 전체거리측정의 수라 하면 方程式의 수 R은 R = U - M이다.

식(20)을 考慮하여 3차원 상변망에서 條件式의 수는 다음과 같다.

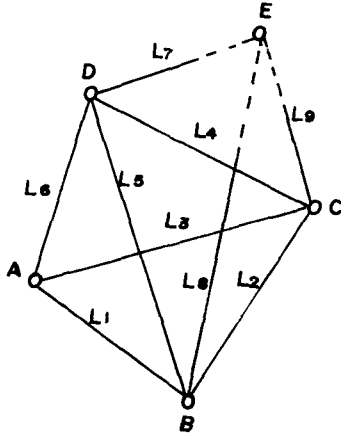


Fig. 2 3-Dimension trilateration

$$R=U-M=U-3N+6 \quad (21)$$

2) 條件方程式

순수 삼차원 삼변망은 6개의 거리를 가진 사변체로 구성된다.

어느 四邊의 네 모서리점의 상대위치는 6개의 測定距離로부터 결정된다. 그러므로 網의 모든점의 위치는 서로서로에 대하여 결정되고 어느 두 점간의 距離라도 계산할 수 있다. Fig. 3에서 변 PP₁, PP₂, PP₃는 점 P₀에서 만난다. 剩餘邊 PP₄는 閉合誤差 W로 인하여 P₀에 閉合되지 못한다. 점 P₀와 P를 適合시키기 위해서는 계산거리 P₀P₄보다 짧거나 길게하는 引張 혹은 壓縮力이 作用되어야 한다. 그러므로 변 PP₁, PP₂, PP₃, PP₄는 축방향의 應力이 생겨서 길이의 變化를 일으킨다. 이러한 길이의 變化가 거리 補正量 V₁, V₂, V₃, V₄가 된다.

이것들은 條件方程式에 의하여 서로서로 관계된다.

$$F_1V_1+F_2V_2+F_3V_3+F_4V_4+W=0 \quad (22)$$

여기서 F₁, F₂, F₃는 剩餘邊에서 인장하중 (F₄=+1)으로 인한 대응변들에서의 힘이다. 또 W는 앞에서 언급한 바와 같이 閉合誤차이다.

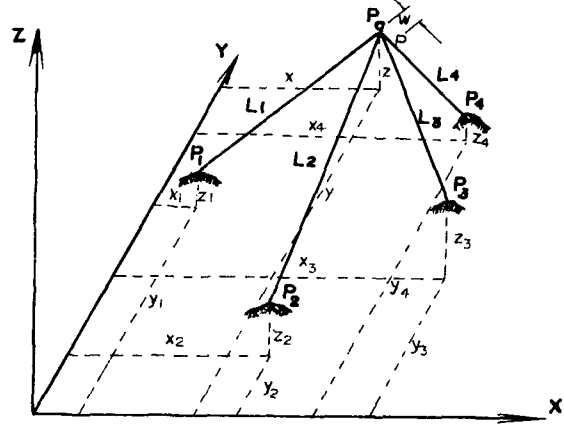


Fig. 3 Redundants observation model

$$W=PP_4(\text{測定值})-P_0P_4(\text{計算值}) \quad (23)$$

힘 F₁, F₂, F₃는 점 P에서 평형이 되게 함으로써 계산할 수 있다. 그러므로 X, Y, Z방향에서의 힘 性分들을 합하면 0이 된다.

$$\sum F_x=0, \sum F_y=0, \sum F_z=0 \quad (24)$$

空間에서 힘 F₁의 性分들 FX₁, FY₁, FZ₁는 각 OX_i, OY_i, OZ_i를 알면 쉽게 계산할 수 있다.

Fig. 4에 의하여 성분들은 다음과 같다.

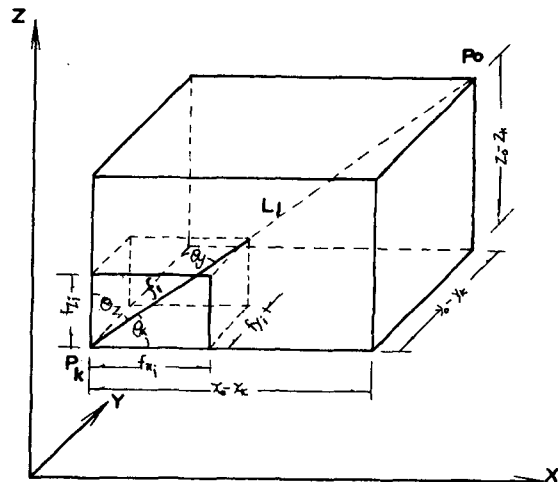


Fig. 4 Relationship component of a force and distance

$$\begin{aligned}
FX_i &= F_i \cos \theta X_i = \frac{X_0 - X_i}{L_i} F_i = \frac{\Delta X_i}{L_i} F_i \\
FY_i &= F_i \cos \theta Y_i = \frac{Y_0 - Y_i}{L_i} F_i = \frac{\Delta Y_i}{L_i} F_i \\
\end{aligned}
\tag{25}$$

$$FZ_i = F_i \cos \theta Z_i = \frac{Z_0 - Z_i}{L_i} F_i = \frac{\Delta Z_i}{L_i} F_i$$

이들 성분의 계수들은 觀測方程式에서 식 (18)의 미지수의 계수와 정확하게 같다 $F_4 = +1$ 과 식(24)를 평행시키기 위하여 네 힘의 X, Y, Z성분을 합하여 0으로 두면 다음과 같은 세方程式이 된다.

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta X_1}{L_1} F_1 + \frac{\Delta X_2}{L_2} F_2 + \frac{\Delta X_3}{L_3} F_3 + \frac{\Delta X_4}{L_4} 1 &= 0 \\
\frac{\Delta Y_1}{L_1} F_1 + \frac{\Delta Y_2}{L_2} F_2 + \frac{\Delta Y_3}{L_3} F_3 + \frac{\Delta Y_4}{L_4} 1 &= 0 \\
\end{aligned}
\tag{26}$$

$$\frac{\Delta Z_1}{L_1} F_1 + \frac{\Delta Z_2}{L_2} F_2 + \frac{\Delta Z_3}{L_3} F_3 + \frac{\Delta Z_4}{L_4} 1 = 0$$

식(26)으로부터 계수 F_1, F_2, F_3 는 계산된다. 輕重率이 同一하다고 가정하면 식(22)에서 補正量은 다음식으로부터 계산된다.

$$V_i = \frac{-W}{\sum F_i^2} F_i \tag{27}$$

따라서 調整距離는 補正量을 測定値에 더하면 구할 수 있다.

이러한 3調整距離는 간단한 空間 後方交會法에 의해 未知點 P의 最終座標를 구하는데 이용된다.

3. 觀測 및 모델構成

(1) 傾斜距離 測定方法

앞의 이론에 적용할 距離는 지상점 사이의 傾斜距離인데, 실측치는 E.D.M과 反射鏡의 높이에 따른 傾斜距離이므로 이를 補正하여 지상점간의 斜距離로 換算해야 한다. Fig. 5에서 L 는 測定斜距離이고 φ 는 측정천정각이며 d 는 각측기에서 E.D.M까지의 높이이다. 선 ET' 와 ER' 는 각각 시준선 IT 와 $P_k P_0$ 와 平行이다. 따라서 각측기의 높이를 i , 반사경 R 의 높이

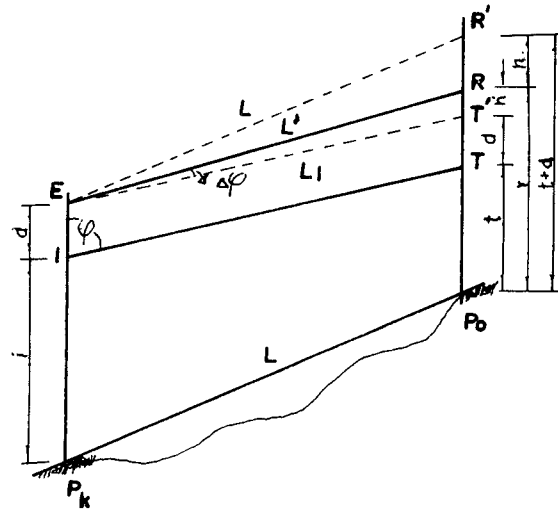


Fig. 5 Relationship between a ground distance and a measured distance

를 r , 타케트 T 의 높이를 t 라하면 三角形 ERT' 에서

$$\sin \Delta \varphi = \frac{h'}{L'} \sin (180 - \varphi) \tag{28}$$

여기서

$$h' = r - t - d$$

$\Delta \delta$ 는 微小하므로 (29)식은 다음과 같다.

$$\Delta \delta'' = \frac{h'}{L'} \sin \varphi \cdot 206265'' \tag{29}$$

三角形 ERR' 로부터 cosine 제 2 법칙에 의하여 지상거리 L 은 다음과 같다.

$$L^2 = L'^2 + h^2 + 2L'h \cos (\varphi - \Delta \varphi) \tag{30}$$

여기서

$$h = i + d - r$$

식(30)은 $0^\circ \sim 180^\circ$ 에 대하여 r 이 i 보다 크거나 작은 모든 경우에 成立한다.

(2) 觀測모델

本 研究의 觀측모델은 東亞大學校內 乘鶴山 중턱에 構成하였다.

觀測用 製備로는 SOKKISHA RED2 E.D.M과 Wild T-2 1독 데오도라이트를 이용하였다. P_1, P_2, P_3 는 既知의 固定座標로서 X, Y, Z를

嚴密히 測定한 다음 剩餘座標로 P_4, P_5 를 固定시키고 未知點 P 에서 各 측점까지의 斜距離 L_1, L_2, L_3, L_4, L_5 를 測定하였다.

3既知點 P_1, P_2, P_3 는 基本的인 경우의 三次元 三邊測量에 이용하고, P_4, P_5 는 剩餘邊長으로 未知點 P 의 最確값을 檢定할 목적으로 측정하였으며 측정값은 <Table 1>과 같다.

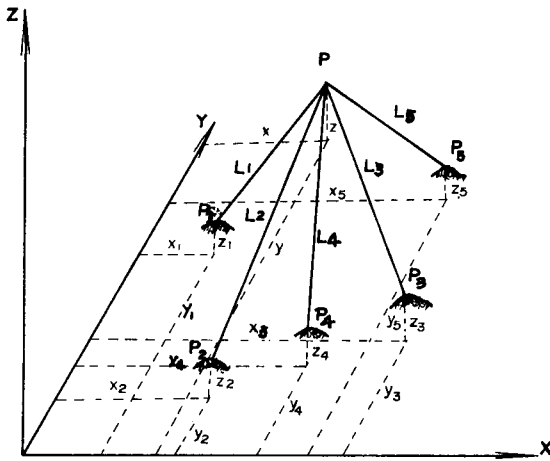


Table 1. Coordinates of control points and slope distances

STATION	X-COORD.	Y-COORD.	Z-COORD.	SLOPE DISTANCE
P(1)	100.00000	121.60100	103.68200	30.05000
P(2)	115.06300	102.89800	101.37600	32.88000
P(3)	110.28000	92.56300	100.00000	28.87000
P(4)	100.00000	100.00000	101.12000	19.20000
P(5)	107.18400	110.15900	102.12100	27.91000

4. 適用 및 考察

(1) 基本的인 경우의 適用

三次元 三邊測量의 基本 알고리즘에 따라 간단한 프로그램을 作成하여 3既知點의 X, Y, Z 座標 및 傾斜距離를 入力시켜 얻은 未知點 P 의 座標는 식(14)에 의하면 다음 <Table 2>와

같다.

Table 2. Final calculated coordinates

STA.NO	X-COORD.	Y-COORD.	Z-COORD.
1	84.66882	100.25110	89.11700
2	84.49049	97.27496	112.09040

기본이론에서 언급한 바와 같이 未知點 P 의 座標는 2개로 出力된다. 이것은 未知點 P 가 未知 3點을 포함하는 同一平面에 있지 않기 때문이며 이 두점은 2既知點을 平面으로 하는 대칭면상의 점이므로 미지점의 높이를 개략적으로 알면 求點을 確定할 수 있으나 그렇지 못할 경우 剩餘點에 의하여 檢定되어야 한다.

(2) 觀測方程式에 의한 調整

앞의 Fig. 5의 基本 모델에서 既知點 P_1, P_2, P_3 의 座標와 傾斜距離 L_1, L_2, L_3 를 이용하여 未知點의 座標를 구하고, 未知點의 檢定을 위해 測定한 剩餘邊 L_4, L_5 를 이용하여 補正量을 $10^{-4}m$ 로 하고, 初期近似값은 <Table 2>의 최종 계산값인 1.2의 두 가지로 각각 調整計算한 結果 1의 경우 4회, 2의 경우 3회 反復 수렴되어 1의 경우는 虛像座標이다.

따라서 실제 未知點 P 의 座標는 2의 경우이며, 結果치는 <Table 6>과 같다. 剩餘邊 L_4, L_5 를 同時に 調整한 경우의 보정계수 <Table 3>, 公分散行列 <Table 4>, 그리고 <Table 5>는 傾斜調整距離와 殘差를 出力한 것이고 Fig. 7은 觀測方程式에 의한 조정 계산의 Flow Chart이다.

Table 3. The coefficient matrix

a matrix		
- .515386	- .809374	.281585
- .929292	- .170744	.327510
- .892397	.163580	.420558
- .806496	- .141391	.574084
- .811651	- .460960	.358803

Table 4. The covariance matrix

covariance matrix	

5.018607	-.227553	9.515661
-.227553	1.471923	.389574
9.515662	.389576	19.720560

Table 5. Adjusted lengths and residuals

line	length(m)	residuals(m)
L ₁	30.042283	-.007717
L ₂	32.870592	-.009408
L ₃	28.869856	-.000144
L ₄	19.198322	-.001678
L ₅	27.927498	.017498

Table 6. Resection Method with Redundant Distances

Redundant	Iteration No.	Coordinate	Corrections V _i	Initial Coord.	Adjusted Coord.
L ₄	1	X	.504528	84.000000	84.504520
		Y	.276747	97.000000	97.276750
		Z	.132832	112.000000	112.132800
	2	X	-.002083	84.504520	84.502440
		Y	-.000267	97.276750	97.276480
		Z	-.012579	112.132800	112.120300
	3	X	.000001	84.502440	84.502440
		Y	.000001	97.276480	97.276480
		Z	-.000002	112.120300	112.120300
L ₅	1	X	.502690	84.000000	84.502690
		Y	.283978	97.000000	97.283970
		Z	.113516	112.000000	112.113500
	2	X	-.004277	84.502690	84.498410
		Y	-.000926	97.283970	97.283050
		Z	-.017338	112.113500	112.096200
	3	X	-.000001	84.498410	84.498410
		Y	-.000004	97.283050	97.283050
		Z	-.000022	112.096200	112.096200
L ₄	1	X	.519319	84.000000	84.519320
		Y	.286085	97.000000	97.286090
		Z	.156081	112.000000	112.156100
	2	X	-.002692	84.519320	84.516620
		Y	-.000548	97.286090	97.285540
		Z	-.014618	112.156100	112.141500
L ₅	3	X	.000001	84.516620	84.516620
		Y	.000002	97.285540	97.285540
		Z	-.000011	112.141500	112.141500

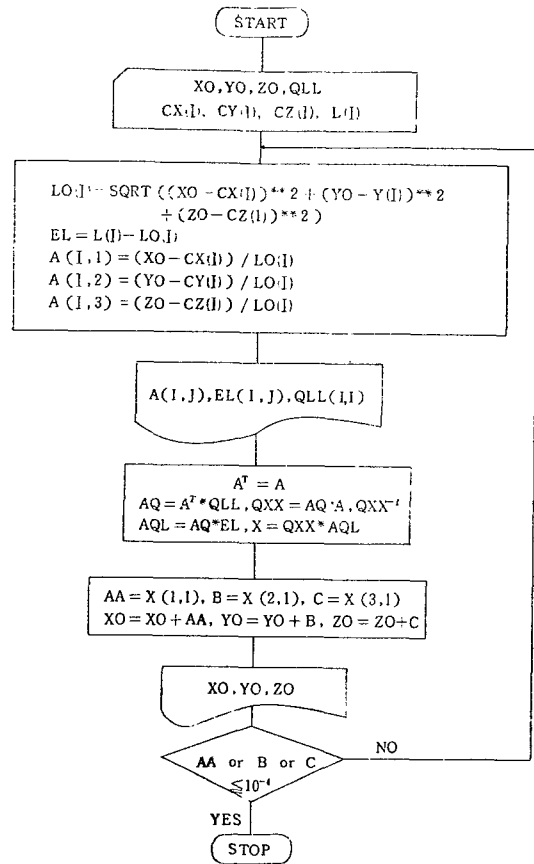


Fig. 7 Flow chart of Observation eq.

(3) 條件方程式에 의한 調整結果

本研究의 모델구성은 변의수 9변, 측정수 5점 이므로 條件方程式의 수는 $R=U-3N+6$ 에 의하여 2개이며 L₄, L₅를 剩餘邊으로 택하였다. 이 두 방정식과 未知點의 座標를 條件方程式 프로그램에 적용하여 계산된 결과치는 아래 <Table 10>과 같고, 出力된 힘의 성분은 Table 7, 힘은 <Table 8>, 그리고 <Table 9>는 調整 傾斜距離와 殘差이다.

Table 7. The coefficient of forces

FX 1(i)	-.516125	-.929822	-.893300	-.808143
FY 1(i)	-.809520	-.171018	.163211	-.141993
FZ 1(i)	.278907	.325858	.418781	.571614
FX 2(i)	-.516125	-.929822	-.893300	-.812361
FY 2(i)	-.809520	-.171018	.163211	-.461211
FZ 2(i)	.278907	.325858	.418781	.356867

Table 8. The forces

F I (1)	-.86848	F II (1)	-.52434
F I (2)	1.45292	F II (2)	-.39814
F I (3)	-1.91521	F II (3)	-.19202
F I (4)	-.00168	F II (4)	.01750

Table 9. Adjusted lengths and residuals

line	length	residuals
L1	30.042280	-.007718
L2	32.870590	-.009413
L3	28.869860	-.000140
L4	19.198320	-.001682
L5	27.927500	.017505

Table 10. Final calculated coordinates

X-COORD.	Y-COORD.	Z-COORD.
84.51679	97.28561	112.14190

(4) 考察

觀測方程式 調整計算의 경우 計算時 補正量을 $10^{-4}m$ 로 한 結果 調整座標는 3回 反復으로 수렴되며 2回 수렴時의 未知點 座標 X, Y, Z의 誤差는 $10^{-2}m$ 정도로 되었으며 3回 수렴시 $10^{-4}m$ 이상으로 誤差가 감소 되었다. 이러한 關係를 그림으로 표시하면 Fig. 8과 같다.

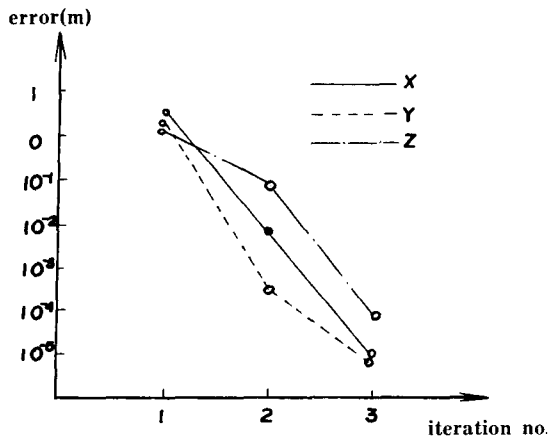


Fig. 8 The relation between iteration no. and error

(Table 6)과 (Fig. 8)에서 보는 바와같이 各座標마다 수렴회수에 따른 수렴율은 제 1 회 反復計算으로 거의 99%까지 수렴되었으며 특히 平面座標 X, Y에서는 거의 100%이나 垂直位置 座標의 수렴율은 90%정도였다.

(Table 11, 12)는 觀測方程式과 條件方程式의 傾斜距離 補正量과 調整座標이다. 이 두 方法에 의한 補正量의 차이는 $10^{-4}m$ 이하이다.

Table 11. Residuals of observation eq. and condition eq.

line	observation eq.	condition eq.
L ₁	-.007717	-.007718
L ₂	-.009408	-.009413
L ₃	-.000144	-.000140
L ₄	-.001678	-.001682
L ₅	.017498	.017505

Table 12. Adjusted coordinates of observation eq. and condition eq.

coord.	ovservation eq.	condition eq.
X	84.516620	84.51679
Y	97.285540	97.28561
Z	112.141500	112.14190

補正距離에서 보는 바와같이 觀測方程式이나 條件方程式에 의한 補正값이 거의 비슷하고 座標計算에 있어서는 平面座標 X, Y는 거의 비슷하나 垂直座標는 다소 차이를 보이기 때문에 觀測時 E.D.M 本體와 反射鏡 사이의 傾斜에 따른 距離誤差에 주의할 필요가 있다. 이와같은 問題점은 機械製作時 反射鏡의 傾斜角에 따른 편심의 影響을 考慮하지 않았기 때문으로 向後 反射鏡 製作時 技術적 研究가 要請되는 바이다. 두 方程式을 比較하면 最終計算座標가 近似할 때 剩餘邊의 數에 따라 精度는 變하지만 計算式이 觀測方程式技法이 簡單하고 많을 때 適合하며, 條件方程式技法은 最終 補正計算은 分配率에 따른 결과이므로 簡潔한 점이 있어 剩餘點 1개 만으로 檢定한다면 매우 便利하게 될 것으로 보인다.

5. 結 論

本 研究는 傾斜距離 測定에 의한 三次元 位置決定에 있어서, 剩餘邊에 의한 誤差調整 方法으로 觀測方程式에 의한 方法과 條件方程式에 의한 方法을 比較한 것이다. 이를 실제 觀측모델에 適用하여 다음과 같은 結論을 얻었다.

(1) 斜距離를 이용하는 三次元 三邊測量은 從來의 位置決定 方法에 비하여 外業이 간단하며 水平, 垂直의 位置를 同時に 決定할 수 있는 利點이 있다.

(2) 條件方程式은 觀測方程式의 方法보다 計算課程이 복잡하지만 소수의 剩餘邊일 경우 유리하며, 觀測方程式은 剩餘點數가 많을때 條件方程式의 方法보다 計算課程이 간단하고 反復 計算에 의해 精度를 높일 수 있다.

(3) 既知 3點만으로 구한 未知點의 座標는 未知點의 개략적 座標가 있으면 쉽게 未知點 座標를 알 수가 있으나, 그렇지 못할 경우는 未知點에 대해 剩餘測定을 하여 觀測方程式으로 座標를 調整한 결과 수렴이 늦은 座標가 虛像임을 確認할 수 있다.

(4) 세 既知點에 대한 傾斜距離만으로 三次元 位置를 구할 수 있어 標高差가 있는 곳에 効果적으로 適用할 수 있을 것으로 생각된다.

최근 電算機의 普及과 測量器機의 발달로 넓은 三邊網에도 三次元 三邊測量의 技法에 대한 活用이 기대되므로 이에 대한 研究가 더욱 要求된다.

參考文獻

1. 김기성, 광파측기, 기공사, 1982. 3, pp. 8
2. Stipp, D.W. 1962, Trilateration adjustment, E 258 Surveying & Mapping, 22(4), pp. 575~590,
3. Jerie H.G. 1962, Analogue Computer for Calculating and adjusting trilateration, Empire survey, No. 126, pp. 351~359.
4. Wolf, P.R. 1969, Trilaterated Photo Coordinates, D 319 Photogrammetric Eng. 35(6), pp. 543~547.
5. P.V Angus-Leppan 1972, Adjustment of trilateration using length ratios, Co 28 Survey Review, 21 (166), pp. 355~368.
6. Wolf, P.R. 1974, and S.D Johnson, Trilateration with short range E.D.M equipment and Comparison with triangulation, Surveying and Mapping, Vol. 34, No. 4, pp. 337~340.
7. Jr Ball, W.E. 1974, Three-dimension Positioning by Multilateration, Surveying & Mapping, pp. 63~74.
8. 澤田良修, 1978 測量計算マニュアル, 山海堂, p. 80.
9. Danial, N.F. 1979, Virtual Work adjustment of trilateration nets, Surveying & Mapping, pp. 67~83.
10. Wolf, P.R. 1980, Adjustment Computations, (2/e), P.B.L Publishing Co, pp. 17~142.
11. Danial, N.F. 1983, Space resection with distances, ACSM-ASP technical paper, pp. 700~709.
12. Danial, N.F. 1985, Small trilateration nets in three dimensions, Survey Review, Vol. 28, 216, pp. 75~88.
13. Li-Yu Sung and David D. Jackson, 1985 Geographical research letters, Vol. 12, No. 1.