

非線形 케이블 有限要素에 관한 研究 A Study on a Nonlinear Cable Finite Element

장승필*·박정일**

Sung Pil Chang* and Jung Il Park**

要 旨 : 본 논문에서는 가이드 타워, 텐션 레그 플랫폼, 무어링 부이, 해저 케이블, 사장교, 현수교, 케이블 루프 등과 같은 해상 및 육상 구조물의 유한요소 모델에 사용하기 위한 기하학적 비선형 케이블 요소를 연구 제시하였으며, 케이블 요소는 평면내에서 임의의 하중과 기하형상을 갖는 케이블에 대한 탄성현수 케이블 이론으로부터의 적합방정식과 연성행렬을 직접 이용하여 유도하였다.

또한, 유도된 케이블 유한요소에 근거하여, 케이블 부재를 사용하는 구조물들의 유한요소 해석을 위해 전산 프로그램을 개발하였으며, 시간영역 동적 해석을 위해 뉴마크-베타의 직접적분법을 사용하였고, 각 시간간격에서의 비선형 평형방정식 및 적합방정식을 풀기 위한 방법으로서 뉴턴-랩슨의 반복법을 사용하였다. 이상과 같이 개발된 전산 프로그램을 이용하여 케이블 부재에 대한 정적 및 동적 해석을 수행한 후 그 결과를 분석·고찰하여 보았다.

Abstract □ A geometrically nonlinear cable finite element is presented to use in the static or dynamic modeling of offshore and onshore structures such as guyed tower, tension leg platform or mooring buoy, submarine cable, cable-stayed bridge, suspension bridge, cable roof and so on. The cable finite element is derived directly from the compatibility equations and flexibility matrix of elastic catenary cable theory for the arbitrary plane loading and geometry.

A general and versatile computer program has been developed to perform the analyses of cable member itself or cable guyed or suspended structures, in which Newmark- β method is used to obtain a time domain solution and Newton-Raphson iteration method is used to solve the nonlinear system of compatibility equations of cable and algebraic static or dynamic equations at each time step. The results from the static and dynamic analysis of a cable member by the computer program are summarized and presented.

1. 서 론

케이블 부재를 사용하는 해양 구조물로는 가이드 타워(guyed tower), 텐션 레그 플랫폼(tension leg platform), 무어링 부이(mooring buoy) 및 해저 케이블(submarine cable) 등이 있으며, 육상 구조물로는 사장교(cable stayed bridge), 현수교(suspension bridge) 및 케이블 루프(cable roof) 등이 있다.

이러한 구조물들의 유한요소 해석을 위해서는 기존의 보 및 평판요소 등과 함께 사용할 수 있는 케

이블 유한요소의 개발이 필요하다는 일반적인 인식 하에 그 동안 여러가지 형태의 케이블 요소가 개발·제시되어 왔다.

기존의 연구논문을 살펴보면 우선 간단한 하중을 받는 케이블 부재에 대하여 해석적인 연구가 이루어졌다. Irvine(1981)은 Lagrangian 좌표를 사용하여 집중하중을 받는 케이블 부재를 해석하였고, Veletsos와 Dabre(1983)는 포물선 케이블 부재에 대한 운동방정식을 유도하여 케이블의 동적 특성을 분석하였다. 또한, Triantafyllou(1984, 1985)은 케이블에 대한 점근적(asymptotic) 해를 구하여

*서울대학교 토목공학과(Department of Civil Eng., Seoul National University, Seoul 151-742, Korea)

**현대엔지니어링 해양플랜트 구조부(Strucutural Department, Offshore Plant Division, Hyundai Eng., Co., Ltd., Seoul 110, Korea)

케이블의 진동현상을 조사하였다.

그 후 컴퓨터의 발전과 더불어 임의의 하중을 받는 케이블에 대한 수치적인 해석이 활발히 이루어졌다. Leonard와 Recker(1972)는 2-절점 유한요소를 사용하여 케이블의 정적 및 동적 거동을 규명하였으며, Argyris와 Sharpf(1972)는 케이블망의 기하학적 비선형 정적 해석을 수행하여 민헨올림픽 주경기장 설계에 사용하였다. 또한, Henghold와 Russel(1976)은 곡선 요소를 이용하여 케이블 부재를 해석하였으며, Gambhir와 Batchelor(1977)는 케이블 부재를 해석하기 위하여 2-절점 곡선 유한요소를 제시하였다.

그러나, 이상에서 살펴본 바와 같이 기존 연구들은 단순한 케이블 부재의 해석들이 대부분이며, 해석적인 방법에 의한 케이블 부재의 해석은 하중 뿐만 아니라 케이블 부재 형상이 간단한 경우의 해석들이고, 수치적인 방법에 의한 케이블 부재 해석도 간단한 케이블 부재 형상으로 가정하였고 많은 요소로 분할 해야하는 비효율성을 갖고 있다.

본 논문에서는 임의의 하중조건과 기하형상을 갖는 케이블 부재에 대한 보다 해석적이고 일반적인 비선형 케이블 유한요소를 연구·제시하므로써 차후 보 및 평판요소 등과 함께 3-차원 유한요소 해석에 사용할 수 있도록 하고자 한다. 이를 위해 탄성 현수 케이블 이론으로부터의 적합방정식(케이블 부재에 대한 비선형 편미분 방정식의 해석적 정해) 및 연성행렬을 이용하여 처짐형상함수, 절점하중벡터 및 강성·질량·감쇠행렬을 유도하였으며, 수립된 전산 프로그램을 이용하여 케이블의 자유진동 및 지점 운동 해석을 수행하여 그 결과를 분석·고찰하여 보았다.

본 논문의 비선형 케이블 유한요소의 유도에 있어서 기본 가정은 다음과 같다.

1. 본 논문의 비선형 케이블 요소는 탄성 현수 케이블 이론에 근거하여 유도된다.
2. 케이블 부재에 작용하는 하중(관성력 및 감쇠력 포함)은 양단 절점 및 케이블의 현이 이루는 평면(이하 케이블 평면)내에서 임의의 크기 및 방향으로 직접 재하될 수 있으나 이 평면에 직각(normal)으로 작용하는 하중은 양단의 등가 절점 하중으로 치환하여 재하시켜야 한다. 따라서, 케이

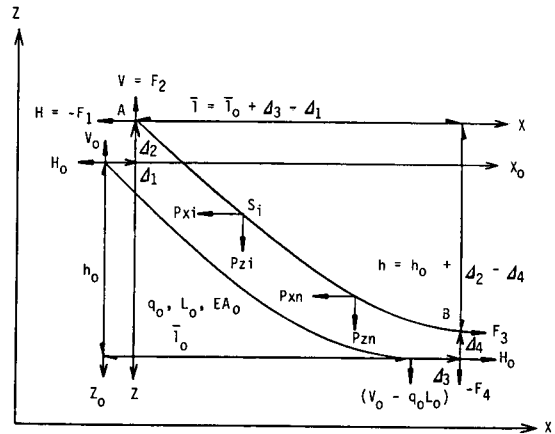


Fig. 1. Global and local coordinate system of cable element.

블 요소는 변형 후 혹은 변형 중에도 항상 평면을 이루어야 한다.

2. 케이블 유한요소

2.1 적합방정식 및 연성행렬

Fig. 1의 케이블 평면좌표계(X-Z)에 대한 케이블 요소의 양단 절점하중 및 변위벡터는 아래와 같이 정의된다.

절점하중 ;

$$F_A = \{F_1, F_2, F_3, F_4\}^T$$

$$= \{-H, V, H + \sum_{i=1}^n (P_{xi}), -V + q_0 L_0 + \sum_{i=1}^n (P_{zi})\}^T$$

절점변위 ;

$$\Delta = \{\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4\}^T \quad (1)$$

케이블 유한요소의 전개에 사용될 탄성 현수 케이블의 기본식이 Fig. 1의 케이블 부재좌표계(X-Z)에 대해 다음과 같이 주어진다(Irvine, 1981).

$$X(S_i) = (H S_i / EA) - \sum_{k=1}^i \left\{ \left(\sum_{j=0}^{k-1} P_{xj} \right) (S_{k-1} - S_k) / EA \right\} + (H_i / q_0) \sum_{k=1}^i \left\{ \sinh^{-1} (V H_{k-1}) - \sinh^{-1} (V H_k) \right\} = f(H, V, S_i)$$

$$\begin{aligned}
 Z(S_i) &= q_o S_i / EA (V / q_o - S_i / 2) \\
 &+ \sum_{k=1}^i \{ (\sum_{j=0}^{k-1} Pz_j) (S_{k-1} - S_k) / EA \} \\
 &+ (H_i / q_o) \sum_{k=1}^i \{ \sqrt{1 + (VH_k)^2} \\
 &- \sqrt{1 + (VH_k)^2} \} = g(H, V, S_i) \quad (2)
 \end{aligned}$$

여기서,

$$H_i = H + \sum_{j=0}^{i-1} (Px_j)$$

$$VH_{k-1} = \{ V - \sum_{j=0}^{k-1} (Pz_j) - q_o S_{k-1} \} / H_i$$

$$VH_k = \{ V - \sum_{j=0}^{k-1} (Pz_j) - q_o S_k \} / H_i$$

$$S_o = 0, S_{N+1} = L_o, X(S_o) = 0, Z(S_o) = 0$$

$$X(S_{N+1}) = \bar{l} = \bar{l}_o - \Delta_1 + \Delta_3,$$

$$Z(S_{N+1}) = h = h_o + \Delta_2 - \Delta_4$$

따라서, 탄성 현수 케이블의 적합방정식은 식 (2)로부터 식 (3)과 같이 얻어진다.

$$\bar{l} = \bar{l}_o - \Delta_1 + \Delta_3, = f(H, V, L_o)$$

$$h = h_o + \Delta_2 - \Delta_4, = g(H, V, L_o) \quad (3)$$

식 (3)으로부터 H, V 는 Newton-Raphson의 반복법을 이용하여 계산되며 이 때 필요한 연성행렬 (flexibility matrix), [F]는 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned}
 \left\{ \begin{array}{c} d\bar{l} \\ dh \end{array} \right\} &= \left\{ \begin{array}{cc} \frac{df}{dH} & \frac{df}{dV} \\ \frac{dg}{dH} & \frac{dg}{dV} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} dH \\ dV \end{array} \right\} = [F] \left\{ \begin{array}{c} dH \\ dV \end{array} \right\} \quad (4)
 \end{aligned}$$

또한, 행렬 [F]내의 각 성분은 다음 절 2.2에서 설명될 케이블 요소의 강성행렬 (stiffness matrix)의 구성뿐 아니라, 케이블 유한요소에서 가장 중요한 몫을 차지하게 될 케이블 요소의 처짐 형상함수 (shape function)의 계산에 사용될 것이며, 이들 각 성분의 식의 형태는 식 (2)를 H, V에 대해 편미분하여 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 \frac{df}{dH} &= L_o / EA + 1 / q_o \sum_{k=1}^{N+1} \{ \sinh^{-1}(VH_{k-1}) \\
 &- \sinh^{-1}(VH_k) - VH_{k-1} / \sqrt{1 + (VH_{k-1})^2} \\
 &+ VH_k / \sqrt{1 + (VH_k)^2} \}
 \end{aligned}$$

$$\frac{df}{dV} = 1 / q_o \sum_{k=1}^{N+1} \{ 1 / \sqrt{1 + (VH_{k-1})^2} - 1 / \sqrt{1 + (VH_k)^2} \}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{dg}{dH} &= 1 / q_o \sum_{k=1}^{N+1} \{ \sqrt{1 + (VH_{k-1})^2} - \sqrt{1 + (VH_k)^2} \\
 &- (VH_{k-1})^2 / \sqrt{1 + (VH_{k-1})^2} \\
 &+ (VH_k)^2 / \sqrt{1 + (VH_k)^2} \}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{dg}{dV} &= L_o / EA + 1 / q_o \sum_{k=1}^{N+1} \{ VH_{k-1} / \sqrt{1 + (VH_{k-1})^2} \\
 &- VH_k / \sqrt{1 + (VH_k)^2} \} \quad (4-1)
 \end{aligned}$$

2.2 강성행렬 (Stiffness Matrix)

케이블 요소의 강성행렬은 식 (1)의 절점하중을 절점변위에 대해 변분을 취한 후 식 (4)의 변위량 증분과 하중의 증분 관계식을 이용하여 다음과 같이 계산된다.

$$\frac{dF_{\Delta}}{d\Delta} = [K]_c$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\text{DET}[F]} \left[\begin{array}{cccc} \frac{dg}{dV} & \frac{df}{dV} & -\frac{dg}{dV} & -\frac{df}{dV} \\ \frac{dg}{dH} & \frac{df}{dH} & -\frac{dg}{dH} & -\frac{df}{dH} \\ -\frac{dg}{dV} & -\frac{df}{dV} & \frac{dg}{dV} & \frac{df}{dV} \\ -\frac{dg}{dH} & -\frac{df}{dH} & \frac{dg}{dH} & \frac{df}{dH} \end{array} \right] \quad (5)
 \end{aligned}$$

2.3 처짐 형상함수 (Shape Function)

어느 순간 t에서 케이블 요소의 질량행렬 ([M]_c)이나, 감쇠행렬 ([C]_c)의 계산 또는 절점속도 및 가속도에 의해 두 절점 사이의 케이블을 따라 발생하는 감쇠력 (damping or drag force) 및 관성력 (inertial force)을 나타내 주기 위해서는 처짐 형상함수의 정의와 계산이 선행되어야 한다.

우선 자유도 -1(Δ₁)에 대한 형상함수를 정의해 보

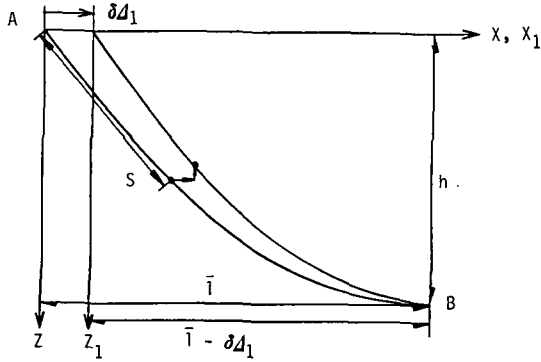


Fig. 2. Virtual displacement in D.O.F.-1.

면, 어느 순간 t 에서 A, B 절점간의 수평, 수직거리를 각각 \bar{l} , h 라 하고 자유도 1 방향으로의 미소 가상변위*1)를 $\delta\Delta_1$ 이라 하면, $\delta\Delta_1$ 에 의한 절점 A에서의 절점력 H , V 의 변화량 dH_1 , dV_1 는 식 (4)를 이용하여 다음과 같이 계산한다.

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} dH_1 \\ dV_1 \end{Bmatrix} &= \frac{1}{\text{DET}|F|} \begin{Bmatrix} \frac{dg}{dV} & -\frac{df}{dV} \\ -\frac{dg}{dH} & \frac{df}{dH} \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} -\delta\Delta_1 \\ 0 \end{Bmatrix} \\ &= \frac{\delta\Delta_1}{\text{DET}|F|} \cdot \begin{Bmatrix} -dg/dV \\ dg/dH \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (6)$$

일단 $\delta\Delta_1$ 에 의한 dH_1 , dV_1 이 계산되면 식 (2)에서와 같이 절점 A로부터 케이블을 따라 S_i 만큼 떨어진 곳의 좌표를 Fig. 2의 새로운 가상의 좌표계 X_1 - Z_1 에 대해 계산할 수 있다.

$$\begin{aligned} X_1(S_i) &= f(H+dH_1, V+dV_1, S_i) \\ Z_1(S_i) &= g(H+dH_1, V+dV_1, S_i) \end{aligned} \quad (7)$$

따라서, 자유도 1에 대한 형상함수 ϕ_{1x} , ϕ_{1z} 는 다음과 같이 계산된다.

$$\begin{aligned} \phi_{1x}(S_i) &= \{\delta\Delta_1 + X_1(S_i) - X(S_i)\} / \delta\Delta_1 \\ \phi_{1z}(S_i) &= \{0.0 - Z_1(S_i) + Z(S_i)\} / \delta\Delta_1 \end{aligned} \quad (8)$$

같은 방법으로 자유도 2, 3 및 4에 대한 형상함수들은 아래와 같이 계산된다.

$$\begin{aligned} \phi_{2x}(S_i) &= \{0.0 + X_2(S_i) - X(S_i)\} / \delta\Delta_2 \\ \phi_{2z}(S_i) &= \{\delta\Delta_2 - Z_2(S_i) + Z(S_i)\} / \delta\Delta_2 \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \phi_{3x}(S_i) &= \{0.0 + X_3(S_i) - X(S_i)\} / \delta\Delta_3 \\ \phi_{3z}(S_i) &= \{0.0 - Z_3(S_i) + Z(S_i)\} / \delta\Delta_3 \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \phi_{4x}(S_i) &= \{0.0 + X_4(S_i) - X(S_i)\} / \delta\Delta_4 \\ \phi_{4z}(S_i) &= \{0.0 - Z_4(S_i) + Z(S_i)\} / \delta\Delta_4 \end{aligned} \quad (11)$$

여기서, 주지할 사실은 케이블과 같이 비선형 요소에서는 미소 가상변위 $\delta\Delta_i$ ($i=1, 2, 3, 4$)의 크기 뿐만 아니라, 방향(+, -)에 따라서도 형상함수가 변화한다. 따라서, 보다 정확한 의미의 형상함수를 정의하기 위해서는 각 자유도에 대한 미소 가상변위 $\delta\Delta_i$ 의 +, -값에 대한(즉 +, $-\delta\Delta_i = \delta\Delta_i^+$, $\delta\Delta_i^-$ 로 정의하여) 형상함수를 계산하여 그 평균값을 취해야 한다는 사실이 질량 행렬 등을 계산하는 과정에서 입증되었다.

따라서, 이와같은 사실에 근거하여 형상함수를 다시 정의하면 식 (8)-(11)까지의 형상함수는 + $\delta\Delta_i$ 에 대한 것이므로 이를 형상함수에 +의 첨부호를 붙인 다음 $-\delta\Delta_i$ 에 대한 형상함수들은 식 (6)-(11)까지와 같은 계산의 반복이 필요 없이,

$$\begin{aligned} \phi_{1x}^- (S_i) &= 1 - \phi_{1x}^+ (S_i) \\ \phi_{1z}^- (S_i) &= 1 - \phi_{1z}^+ (S_i) \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \phi_{2x}^- (S_i) &= -\phi_{2x}^+ (S_i) \\ \phi_{2z}^- (S_i) &= 1 - \phi_{2z}^+ (S_i) \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \phi_{3x}^- (S_i) &= 1 - \phi_{3x}^+ (S_i) \\ \phi_{3z}^- (S_i) &= -\phi_{3z}^+ (S_i) \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \phi_{4x}^- (S_i) &= -\phi_{4x}^+ (S_i) \\ \phi_{4z}^- (S_i) &= 1 - \phi_{4z}^+ (S_i) \end{aligned} \quad (15)$$

임을 이용하여, 보다 개선된 형상함수는 다음과 같이 계산된다.

$$\begin{aligned} \phi_{1x}(S_i) &= \{\phi_{1x}^+(S_i) + \phi_{1x}^-(S_i)\} / 2 \\ &= \{\phi_{1x}^+(S_i) + 1 - \phi_{1z}^+(S_i)\} / 2 \end{aligned}$$

$$\phi_{1z}(S_i) = \{\phi_{1z}^+(S_i) + \phi_{1z}^-(S_i)\} / 2$$

* 참조 1 : 선형에서는 형상함수가 가상 변위의 크기와 무관하므로 $\delta\Delta_i=1$ 로 가정하지만, 비선형에서는 $\delta\Delta_i$ 에 따라 형상함수가 변화하므로 계산상의 오차가 최소인 범위 내에서 가능한 작게 가정하여야 한다.

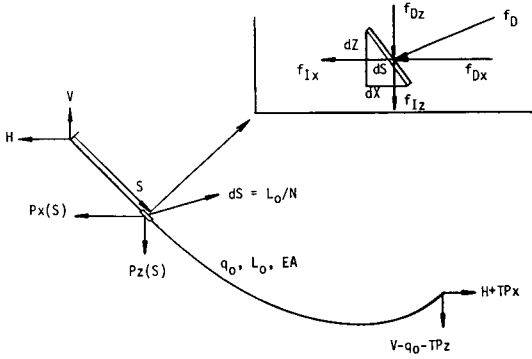


Fig. 3. Internal and nodal forces in cable element.

$$= \{ \phi_{1z}^+(S_i) - \phi_{3z}^+(S_i) \} / 2 \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \phi_{2z}(S_i) &= \{ \phi_{2z}^+(S_i) + \phi_{2z}^-(S_i) \} / 2 \\ &= \{ \phi_{2z}^+(S_i) - \phi_{4z}^+(S_i) \} / 2 \\ \phi_{2z}(S_i) &= \{ \phi_{2z}^+(S_i) + \phi_{2z}^-(S_i) \} / 2 \\ &= \{ \phi_{2z}^+(S_i) + 1 - \phi_{4z}^+(S_i) \} / 2 \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \phi_{3z}(S_i) &= 1 - \phi_{1z}(S_i) \\ \phi_{3z}(S_i) &= -\phi_{1z}(S_i) \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \phi_{4z}(S_i) &= -\phi_{2z}(S_i) \\ \phi_{4z}(S_i) &= 1 - \phi_{2z}(S_i) \end{aligned} \quad (19)$$

2.4 질량행렬 (Mass Matrix)

케이블 요소의 질량행렬은 식 (16)-(19)의 형상 함수를 이용하여 다음과 같이 계산된다. 질량행렬 $[M]_e$ 내의 각 성분:

$$m_{qr} = m \int_0^{L_0} \{ (\phi_{qx}(S) \phi_{rx}(S)) + (\phi_{qz}(S) \phi_{rz}(S)) \} ds \quad (20)$$

여기서, m : 단위 길이당 질량(케이블이 유체 중에서 움직이고 있다면, 부가질량 $(\rho_w \cdot C_m \cdot \nabla)$ 를 포함)

2.5 감쇠행렬 (Damping Matrix)

케이블 요소의 감쇠행렬은 케이블 자체의 감쇠상수 (C) 와 케이블 요소가 유체 중에서 움직이고 있다면 유체의 항력에 의한 수력학적 감쇠력까지를 고려하여 아래와 같이 계산된다.

감쇠행렬 $[C]_e$ 내의 각 성분:

$$\begin{aligned} C_{qr} &= C \int_0^{L_0} \{ (\phi_{qx} \phi_{rx}) + (\phi_{qz} \phi_{rz}) \} ds \\ &+ \rho_w C_d D_0 \int_0^{L_0} \{ (\phi_{qx} (\phi_{rx} dZ/dS + \phi_{rz} dX/dS)^2 (dZ/dS)) + (\phi_{qz} (\phi_{rx} dZ/dS + \phi_{rz} dX/dS)^2 (dX/dS)) \} | \dot{\Delta}_r | ds \end{aligned} \quad (21)$$

여기서,

$$\begin{aligned} dX/dS &= dX(S_i)/dS = (H_i/T_i) (1 + T_i/EA_0) \\ dZ/dS &= dZ(S_i)/dS = (V_i/T_i) (1 + T_i/EA_0) \end{aligned}$$

이며, $H_i = H + \sum_{j=0}^{i-1} (P_{xj})$ (식 (2) 참조)

$$V_i = V - \sum_{j=0}^{i-1} (P_{zj}) - q_0 S_i$$

$$T_i = \sqrt{H_i^2 + V_i^2} \quad (22)$$

2.6 케이블 요소의 절점하중 (Nodal Force of Cable)

일반적으로 선형에서는, 감쇠력과 관성력에 의한 절점하중은 각각 절점속도와 가속도에 선형적으로 비례한다고 가정한다.

$$\begin{aligned} \text{즉, 감쇠력 } F_D &= [C]_e \dot{\Delta} \\ \text{관성력 } F_I &= [M]_e \ddot{\Delta} \end{aligned} \quad (23)$$

그러나, 케이블 요소와 같은 비선형 문제에서는 관성력과 감쇠력은 각각 가속도와 속도에 선형적으로 비례하지 않고 비선형성을 띄우게 된다. 따라서, 식 (20) 및 (21)의 질량 및 감쇠행렬은 Newton의 반복법에서 접선강도 행렬에 포함되어 비선형계의 수렴에 기여하게 된다. 그리고, 속도 및 가속도에 의한 감쇠력 및 관성력은 변위 및 자중에 의한 부재 내력과 동시에 작용하여 이들 모두의 영향을 포함한 절점하중 $(F_{\Delta+I+D})$ 의 계산에 사용된다.

Fig. 3에서,

$$\begin{aligned} f_D &= \rho C_d D \sum_{i=1}^4 (\phi_{ix} dZ/dS + \phi_{iz} dX/dS)^2 \\ &\dot{\Delta}_i | \dot{\Delta}_i | (L_0/N) \\ f_{Dx} &= f_D (dZ/ds), f_{Dz} = \sum_{i=1}^4 \{ m \phi_{ix} \dot{\Delta}_i (L_0/N) \} \end{aligned}$$

$$f_{Dz} = f_D (dX/dS), f_{Iz} = \sum_{i=1}^4 \{m \phi_{iz} \ddot{\Delta}_i (L_o/N)\}$$

$$P_x(S) = f_{Ix}(S) + f_{Dx}(S)$$

$$P_z(S) = f_{Iz}(S) + f_{Dz}(S) \quad (24)$$

$$TP_x = \sum_{i=1}^N P_x(S_i)$$

$$TP_z = \sum_{i=1}^N P_z(S_i) \quad (25)$$

따라서, 케이블 요소의 절점하중은 최종적으로 다음과 같이 정의된다.

$$F_{TOT} = F_{4+I+D}$$

$$= \left\{ \begin{matrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{matrix} \right\}_{4+I+D} = \left\{ \begin{matrix} -H \\ V \\ H + TP_x \\ q_o L_o + TP_z - V \end{matrix} \right\} \quad (26)$$

이 절점하중은 자중 q_o 와 많은 집중하중 ($P_x(S_i), P_z(S_i), i=1, \dots, N$)이 작용하는 케이블의 탄성현수 이론으로부터 계산된다. 이렇게 구해진 어떤시점 t 에서의 절점내력, F_{4+I+D} 는 이 때 작용된 절점의력과 함께 비선형계 잔류하중 (residual or unbalanced forces)을 구성하게 되고, 이 잔류하중이 0에 접근할 때 케이블은 시점 t 에서 평형상태에 도달하게 된다.

비선형계의 잔류하중 ;

$$\Phi = F_{TOT} - F_E(t) = 0 \quad (27)$$

여기서, $F_E(t)$; 시간의 함수로의 외력
유효접선 강도행렬 ;

$$\frac{d\Phi}{d\Delta} = \frac{dF_{TOT}}{d\Delta} + \frac{dF_{TOT}}{\beta(dt)^2 d\Delta} + \frac{\alpha dF_{TOT}}{\beta(dt) d\Delta}$$

$$= [K_r] = [K]_c + \frac{[M]_c}{\beta(dt)^2} + \frac{\alpha [C]_c}{\beta(dt)} \quad (28)$$

여기서, α, β ; Newmark- β 방법의 상수
 dt ; 시간에 대한 적분 간격

식 (28)의 질량행렬 $[M]_c$ 는 2.4절의 식 (20)에 의해 구해진 것을 사용할 수 있다.

그러나, 식 (28)의 $(dF_{TOT}/d\ddot{\Delta})$ 의 정의에 따라 절점가속도 $\ddot{\Delta}$ 의 함수인 식 (26)의 절점하중 F_{TOT} 를 절점가속도 $\ddot{\Delta}$ 로 직접 편미분 혹은 변분을 취하

여 질량행렬을 구할 수 있으며, 이렇게 구한 질량행렬은 2.4절의 질량행렬과 비교하여 0.1% 이하의 오차를 보여주었다.

질량행렬을 다시 구해보면,

$$dF_{TOT} = \begin{bmatrix} \frac{-dH}{d\ddot{\Delta}_1} & \dots \\ \frac{dV}{d\ddot{\Delta}_1} & \dots \\ (\frac{dH}{d\ddot{\Delta}_1} + \frac{dTP_x}{d\ddot{\Delta}_1}) & \dots \\ (\frac{-dV}{d\ddot{\Delta}_1} + \frac{dTP_z}{d\ddot{\Delta}_1}) & \dots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\ddot{\Delta}_1 \\ d\ddot{\Delta}_2 \\ d\ddot{\Delta}_3 \\ d\ddot{\Delta}_4 \end{Bmatrix} = [M]_c d\ddot{\Delta} \quad (29)$$

식 (29)내의 $dH/d\ddot{\Delta}$ 또는 $dV/d\ddot{\Delta}$ 는 다시 2.1절의 탄성현수 케이블의 적합방정식(식 (3))을 절점가속도 $\ddot{\Delta}$ 에 대해 미분 또는 변분을 취하므로써 구할 수 있으며, 그 과정에서 $dTP_x/d\ddot{\Delta}$ 또는 $dTP_z/d\ddot{\Delta}$ 도 같이 얻을 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = [F] \begin{Bmatrix} dH \\ dV \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} (\frac{df}{dTP_x} \cdot \frac{dTP_x}{d\ddot{\Delta}_1} + \frac{df}{dTP_z} \cdot \frac{dTP_z}{d\ddot{\Delta}_1}) \dots \\ (\frac{dg}{dTP_x} \cdot \frac{dTP_x}{d\ddot{\Delta}_1} + \frac{dg}{dTP_z} \cdot \frac{dTP_z}{d\ddot{\Delta}_1}) \dots \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} d\ddot{\Delta}_1 \\ d\ddot{\Delta}_2 \\ d\ddot{\Delta}_3 \\ d\ddot{\Delta}_4 \end{Bmatrix} \quad (30)$$

여기서, $[F]$; 연성행렬(2.1절 식 (4) 참조)
그리고,

$$dTP_x/d\ddot{\Delta}_r = mL_o/N \sum_{i=1}^N \{\phi_{rx}(S_i)\}$$

$$= m \int_0^L \phi_{rx}(S) ds$$

$$dTP_z/d\ddot{\Delta}_r = mL_o/N \sum_{i=1}^N \{\phi_{rz}(S_i)\}$$

$$= m \int_0^L \phi_{rz}(S) ds \quad (31)$$

여기서,

- m ; 부가질량을 포함한 단위 질량
- r ; 자유도 1, 2, 3, 4
- N ; 충분히 큰 수

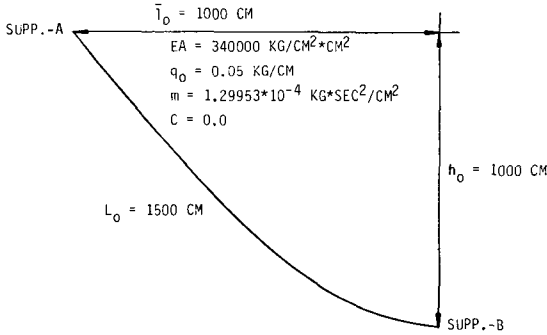


Fig. 4. Example problem.

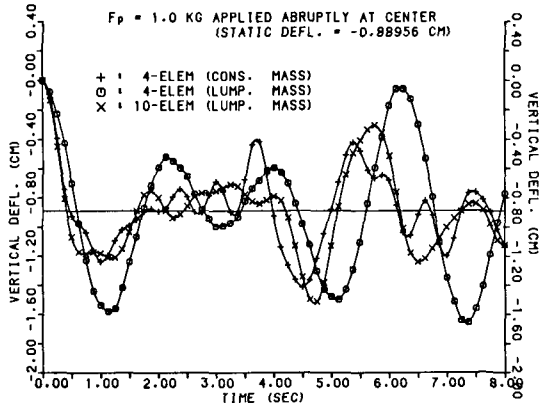


Fig. 5. Time versus vertical deflections at center of cable (free vibration).

3. 전산결과의 고찰

본 논문의 비선형 케이블 유한요소해에 근거하여 수립된 전산 프로그램을 이용하여 위 <예제> (Fig. 4)의 케이블에 대해 해석하고 그 결과를 분석·고찰하여 보았다 (Fig. 5-8 참조).

Fig. 5에서는 케이블의 진동현상을 관측하기 위하여 케이블의 중앙 ($S=L_0/2$)에 1.0 kg의 하중을 순간적으로 재하한 경우에 대한 중앙에서의 연직변위를 도식하여 보았다. <예제>의 두 지점 A, B 사이에 걸쳐있는 케이블을 각각 4개의 요소와 10개의 요소로 나누어 4개 요소의 경우에는 집중질량과 분포질량에 대해, 10개 요소의 경우에는 집중질량에 대해 해석해 보았다. 4개 요소 - 집중질량의 경우에는 나머지 두 경우와는 상이한 결과를 나타냈으나, 나머지 두 경우는 서로 비슷한 거동을 보여주었다. Fig. 5에서는 집중질량의 경우에는 분포질량의 경우

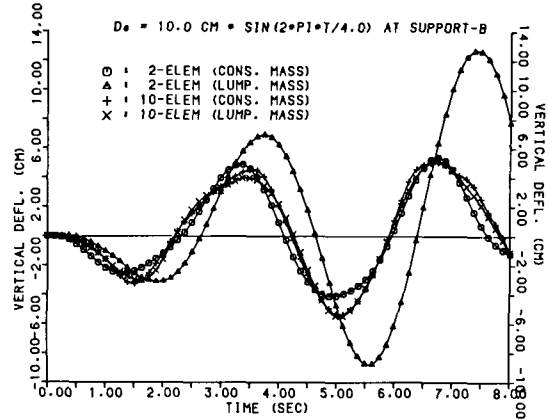


Fig. 6. Time versus vertical deflections at center of cable (support vibration).

보다 더 많은 요소로 나누어 주어야 실제의 진동현상에 접근해 간다는 평범한 진리를 입증해주고 있다. 두 개의 요소로 나눈 경우에는 보류 자유도수가 작아 해석 결과가 단순한 진동 모드만을 보여주므로 도식화를 생략하였다.

Fig. 6에서는, <예제>의 케이블을 2개 요소와 10개 요소로 나눈 경우에 대해 지점 -B의 지점운동에 대한 케이블 중앙에서의 연직처짐을 도식화하였다. 항상 발생할 수 있는 현상은 아니지만, 2개 요소 - 집중질량의 경우는 시간에 따른 변위의 증폭현상을 보여주었으며, 나머지 경우에는 비교적 근사한 결과를 나타냈다.

Fig. 7에서는, Fig. 6과 같은 해석조건에서, 분포질량에 대한 관성력을 케이블 부재내에 분포하중(실제는 충분히 많은 수의 집중하중으로 간주하여)으로 직접 작용시켜 절집하중에 포함되도록 한 본 논문의 방법과 관성력을 선형해석에 대한 기존의 통념대로 $dF_1 = [M]_e d\ddot{\Delta} \cong F_1 = [M]_e \ddot{\Delta}$ 로 간주(본 논문에서는 준 비선형 케이블 요소 (semi-nonlinear cable element)로 명명하여 고려한 방법을 서로 비교하여 도식화하였다. 물론, 10개 요소의 경우에는 Fig. 6에서와 마찬가지로 어떤 질량형태에 대해서도 거의 동일한 거동을 보여주었다. 그러나, 본 예제의 관심은 분포질량에 대한 상기 관성력의 두 가지 고려방법이 2개 요소의 경우에 대해서도 비교적 근사한 결과를 나타내주고 있다는 데 있다. 따라서, 전산 비용이 문제가 되는 경우에는 준비선형 케이블 요소를 무리없이 대응할 수 있을 것으로 기대한다.

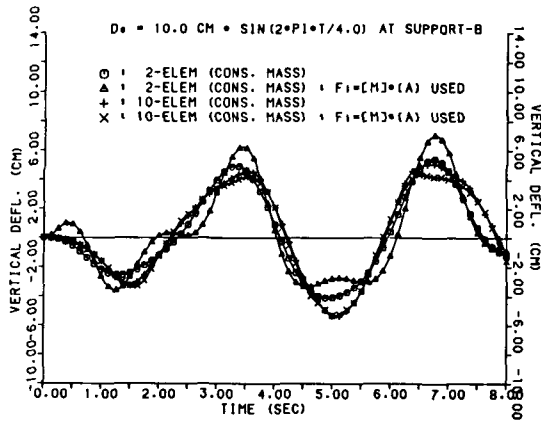


Fig. 7. Time versus vertical deflections at center of cable (support vibration).

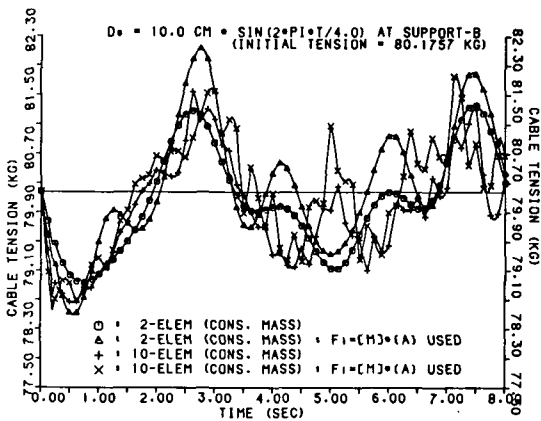


Fig. 8. Time versus cable tension at support-A (support vibration).

Fig. 8에서는 Fig. 7과 동일한 해석조건 및 경우에 대한 지점 -A에서의 케이블 인장력을 도식화하였다. 외견상으로는 산만한 것 같으면서도 내용상 근사한 결과를 보여주고 있으며 Fig. 7에서와 같은 결론을 도출해낼 수 있을 것이다.

4. 결 론

탄성 현수 케이블 이론(elastic catenary cable theory)으로부터의 적합방정식(compatibility equation)은 케이블 평면내의 임의의 하중조건에 대한 고차의 편미분 방정식의 정해이므로, 이로부터 구한 케이블 부재의 기하형상 및 부재내력(수평, 수

직 및 인장력)은 정확한 해석적 수치이다.

따라서, 이 적합방정식을 사용하여 계산된 처짐 형상함수, 강성, 질량, 감쇠행렬 및 절점 하중벡터는 현재 얻을 수 있는 가장 정확한 해석적 값들이며 본 논문의 비선형 케이블 유한요소는 충분한 정확성과 신뢰도를 갖고 사용될 수 있으리라 생각된다.

또한, 기존의 보 및 평판요소에서는 절점에서의 경계조건을 만족시키는 처짐 형상함수를 가정하여 사용하지만, 본 논문의 케이블 요소에서는 탄성현수 케이블 이론으로부터의 적합방정식을 직접 이용하여 케이블의 처짐 형상함수를 계산한다는데 그 특징이 있으며, 일반적으로 유한요소법에 있어서의 처짐 형상함수가 차지하는 중요성을 감안한다면, 이 케이블 부재의 해석적 처짐 형상함수의 발견은 본 연구의 핵심적인 성과가 될 수 있을 것으로 기대된다.

본 연구를 통하여 얻은 가외의 소득은 구조물 전체의 자유도가 불가피하게 많아 전산시간이 과다하게 소요될 것이 예상되는 경우 전산결과와 고찰을 통해 설명된 준 비선형 케이블 요소(semi-non-linear cable element)를 무리없이 대용할 수 있다는 사실이며, 아울러 집중질량행렬의 사용시는 충분한 사전 검토가 선행되어야 할 것이다.

한편, 본 논문의 케이블 요소는 케이블 부재를 사용하는 일반 구조물의 유한요소 해석을 위해 3차원 공간으로 좌표변환 후 사용되어야 하겠지만, 서론의 기본 가정에서도 언급하였듯이 케이블 평면에 수직 한 방향으로의 하중이나 질량은 양단 절점하중으로 치환하여 고려하여야 한다는 부분적 제약을 갖고 있다. 이는 케이블내에 3차원적으로 작용하는 하중에 대한 비선형 편미분 방정식의 해석적인 정해를 얻기가 불가능하다는데 연유하고 있다. 그러나, 본 논문의 케이블 요소는 공학적으로 무리가 없는 가정하에서 케이블 부재를 사용하는 구조물들의 3차원 해석 모델을 제시하는데 문제가 없을 것으로 판단된다.

참고문헌

- Agyris, J.H. and Sharpf, D.W., 1972. Large deformation analysis of prestress networks, *Jour. Struc. Div. ASME.*, 48.
- Gambhir, M.L. and Batchelor, B., 1977. A finite element for 3-D prestressed cable nets, *Int. Jour. Num. Mech. Engng.*, 11.

- Henghold, W.H. and Russel, J.J., 1976. Equilibrium and natural frequencies of cable structures, *Comput. Struc.*, 6.
- Irvine, H.M., 1981. Cable structures, MIT Press: 15-24.
- Leonard, J.W. and Recker, W.W., 1972. Nonlinear dynamics of cable with low initial tension, ASME., 98.
- Triantafyllou, M.S., 1985. The dynamics of translating cables, *Jour. Sound. Vibr.*, 103.
- Triantafyllou, M.S., 1984. The dynamics of taut inclined cables, *Jour. Mech. and Appl. Math.*, 37.
- Veletsos, A.S. and Darbre, G.R., 1983. Free vibration of parabolic cables, ASCE., 109.